

Лекция 9.

Элементарные приемы решения экстремальных задач.

1. Общие понятия

1.1. Функционал

Определение. Пусть дан некоторый класс функций $y(x)$. $J[y(x)]$ называется функционалом от функции $y(x)$ данного класса, если каждой функции этого класса $y(x)$ отвечает некоторое число $J[y(x)]$. Класс функций $y(x)$, на которых определен функционал, называется областью задания функционала.

Рассмотрим функционал.

$$J[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (1)$$

Вычислим

$$J[x] = \int_0^1 \sqrt{1 + 1} dx = \sqrt{2}x \Big|_0^1 = \sqrt{2}$$

$$J\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(e^x + e^{-x})'^2}{4}} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}} dx =$$
$$\int_0^1 \frac{(e^x + e^{-x})}{2} dx = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} \Big|_0^1 = \frac{(e + e^{-1})}{2}$$

Рассмотрим функционал:

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x) dx \quad (2)$$

При $y > 0$ этот функционал равен площади фигуры, ограниченной линиями $y(x)$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. Пусть $y(x)$ есть совокупность всех непрерывных функций.

Вычислим

$$J[x] = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$J[x] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$J\left[\frac{1}{1+x}\right] = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2$$

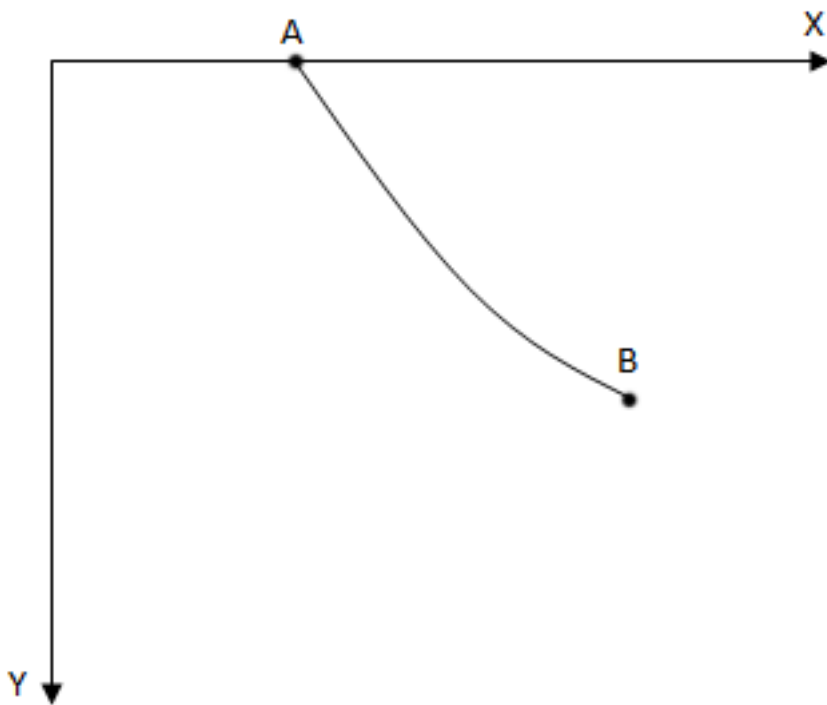
$$J\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Функционал (1) определен на классе функций имеющих непрерывную производную, а (2) - на более широком классе непрерывных функций

1.2. Экстремум функционала

Рассмотрим задачу о брахистохроне, поставленную И. Бернулли:

Среди всех кривых, соединяющих две данные точки A и B , найти ту, по которой тяжёлая точка, двигаясь из точки A под влиянием силы тяжести с начальной скоростью, равной нулю, попадёт **в кратчайший срок** в точку B . Предполагается, что A и B не лежат на одной вертикальной прямой. Если бы A и B лежали на одной вертикальной прямой, то решением задачи являлась бы эта прямая.



Ограничимся рассмотрением плоских линий, соединяющих точки A и B . $A(x_0; 0)$, $B(x_1; y_1)$.

Если тяжёлая точка движется из A без начальной скорости, то её скорость V связана с её ординатой y следующим соотношением:

$$V^2 = 2gy,$$

где g - ускорение силы тяжести, или

$$V = \sqrt{2gy}$$

Пусть $y = y(x)$ есть уравнение кривой, по которой движется точка из A в B . Скорость движения точки равна

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{dt},$$

где dt - элемент времени. Отсюда

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{V} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{\sqrt{2gy}} \quad (3)$$

Интегрируя (3), получим время, необходимое для перемещения точки от A до B по кривой $y = y(x)$:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (4)$$

T есть функционал, зависящий от $y(x)$. Требуется найти функцию $y(x)$ (или кривую $y = y(x)$), для которой T принимает наименьшее значение

Решение этой задачи будет рассмотрено позже.

2. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

2.1. Постановка простейшей задачи вариационного исчисления

Цель - дать методы решения простейших задач вариационного исчисления.

По аналогии с признаками существования экстремума функции одного и многих переменных естественно намечаются три проблемы, которые надо решить:

I. Найти такие необходимые условия, которые должны удовлетворять искомой функции, чтобы, пользуясь ими, при наличии решения, можно было искомую кривую определить

II. Найти достаточно общие признаки существования экстремума

III. Имея кривую, удовлетворяющую основному необходимому условию, установить критерии по которым можно было бы судить, даёт ли эта кривая действительно экстремум, и если дает, то будет ли это минимум или максимум.

Начнем с рассмотрения проблем первой группы. Пусть дана функция $F(x, y, y')$, непрерывная вместе с её частными производными по всем трём аргументам до второго порядка включительно. Рассмотрим в плоскости XOY две точки $A(a, b)$ и $B(a_1, b_1)$.

Простейшая задача вариационного исчисления формируется следующим образом: среди всех кривых, выражаемых уравнением

$$y = y(x) \quad (5)$$

(функция $y(x)$ непрерывна вместе со своей производной $y'(x)$ в промежутке $a \leq x \leq a_1$) и проходящих через заданные точки А и В, определить ту, вдоль которой интеграл

$$\int_a^{a_1} F(x, y, y') dx \quad (6)$$

принимает наибольшее или наименьшее значение

2.2. Уравнение Эйлера

Рассматривая поставленную задачу, Эйлер впервые доказал следующую теорему:

Теорема 1. Если кривая $y = y(x)$ даёт экстремум интегралу J то функция $y = y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (7)$$

или

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0 \quad (8)$$

3. Вариация функционала

3.1. Близость кривых

Определение. Вариацией или приращением δy аргумента $y(x)$ функционала $J[y(x)]$ называется разность между двумя функциями $y(x)$ и $y_0(x)$, принадлежащими выбранному классу M функций:

$$\delta y = y(x) - y_0(x) \quad (9)$$

Для класса k раз дифференцируемых функций имеем:

$$(\delta y)^{(k)} = \delta y^{(k)}(x) \quad (10)$$

Кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$, заданные на отрезке $[a, b]$ называются *близкими* в смысле близости нулевого порядка, если $|y(x) - y_1(x)|$ мала на $[a, b]$. Геометрически это означает, что эти кривые на $[a, b]$ близки по ординатам.

Кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$, заданные на отрезке $[a, b]$ называются *близкими* в смысле близости первого порядка, если $|y(x) - y_1(x)|$ и $|y'(x) - y_1'(x)|$ малы на $[a, b]$. Геометрически это означает, что эти кривые на $[a, b]$ близки как по ординатам, так и по направлениям касательных в соответствующих точках.

Кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$, заданные на отрезке $[a, b]$ называются *близкими* в смысле близости k -го порядка, если $|y(x) - y_1(x)|, |y'(x) - y_1'(x)|, \dots, |y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)|$ малы на $[a, b]$.

Если кривые близки в смысле близости k -го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

Расстоянием между кривыми $y = f(x)$ и $y = f_1(x)$, где $f(x)$ и $f_1(x)$ непрерывные на $[a, b]$ функции, называется неотрицательное число ρ , равное максимуму $|f_1(x) - f(x)|$ на $[a, b]$:

$$\rho = \rho[f_1(x), f(x)] = \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f(x)| \quad (11)$$

Расстоянием n -го порядка между кривыми $y = f(x)$ и $y = f_1(x)$ называется наибольший из максимумов следующих величин:

$$|f_1(x) - f(x)|, |f_1'(x) - f'(x)|, \dots, |f_1^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)|$$

на $[a, b]$

Будем обозначать это расстояние так:

$$\rho_n = \rho_n[f_1(x), f(x)] = \max_{0 \leq k \leq n} \max_{a \leq x \leq b} |f_1^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| \quad (12)$$

ε -окрестностью n -го порядка кривой $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$), называется совокупность кривых $y = f_1(x)$, расстояния n -го порядка которых от кривой $y = f(x)$ меньше ε :

$$\rho_n = \rho_n[f(x), f_1(x)] < \varepsilon \quad (13)$$

ε -окрестность нулевого порядка называется сильной ε -окрестностью функции $y = f(x)$

Сильная ε -окрестность кривой $y = f(x)$ состоит из кривых, расположенных в полосе ширины 2ε вокруг кривой $y = f(x)$

ε -окрестность нулевого порядка называют слабой ε -окрестностью функции $y = f(x)$

3.2. Непрерывность функционала

Определение. Функционал $J[y(x)]$, определенный в классе M функций $y(x)$, называется непрерывным при $y = y_0(x)$ в смысле близости n -го порядка, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\eta > 0$ такое, что для всех допустимых функций $y = y(x)$, удовлетворяющих условиям

$$|y(x) - y_0(x)| < \eta, |y'(x) - y'_0(x)| < \eta, |y^{(n)}(x) - y_0^{(n)}(x)| < \eta$$

выполняется неравенство

$$|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \varepsilon.$$

Иными словами $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \varepsilon$, если $\rho_n[y(x), y_0(x)] < \eta$.

Функционал, не являющийся неразрывным в смысле близости n -го порядка будем называть разрывным в смысле указанной близости.

Пусть

$$y^{(k)}(x) = y_0^{(k)}(x) + \alpha \omega^{(k)}(x), (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

где α - некоторый параметр, а $\omega(x)$ - произвольная функция из класса M , замечаем, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} y^{(k)}(x) = y_0^{(k)}(x), (k = 0, 1, \dots, n),$$

и определение непрерывности функционала при $y(x) = y_0(x)$ можно записать в виде

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J[y_0(x) + \alpha \omega(x)] = J[y_0(x)].$$

Пример. Показать, что функционал

$$J[y(x)] = \int_0^1 [y(x) + 2y'(x)] dx$$

определенный в пространстве $C_1[0, 1]$, непрерывен на функции $y_0(x) = x$ в смысле близости первого порядка.

Решение. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует число $\eta > 0$ такое, что

$$|J[y(x)] - J[x]| < \varepsilon,$$

как только

$$|y(x) - x| < \eta, |y'(x) - 1| < \eta.$$

Имеем

$$|J[y(x)] - J[x]| = \left| \int_0^1 [y(x) + 2y'(x) - x - 2] dx \right| \leq \int_0^1 |y(x) - x| dx + 2 \int_0^1 |y'(x) - 1| dx.$$

Выберем $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда для всех $y(x) \in C_1[0, 1]$ для которых $|y(x) - x| < \frac{\varepsilon}{3}$ и $|y'(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$, будем иметь

$$|J[y(x)] - J[x]| < \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$, например, $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$, такое, что как только $\rho_1[y(x), x] < \eta$ то $|J[y(x)] - J[x]| < \varepsilon$. По определению это означает, что данный функционал непрерывен на функции $y_0(x) = x$ в смысле близости первого порядка.

3.3. Линейные функционалы

Определение 1. Пусть M - линейное нормированное пространство функций $y(x)$. Функционал $L[y(x)]$, определенный в пространстве M называется линейным, если он удовлетворяет условиям:

1. $L[Cy(x)] = CL[y(x)]$, где C - произвольная постоянная.
2. $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$, где $y_1(x) \in M$, $y_2(x) \in M$.

Определение 2. Функционал $L[y(x)]$ называют линейным, если он:

1. Непрерывен
2. $\forall y_1(x), y_2(x) \in M$ удовлетворяет условию $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$

Можно показать, что определения 1 и 2 эквивалентны.

3.4. Вариация функционала

Определение. Пусть функционал $J[y(x)]$ задан на множестве M функций $y(x)$. Приращением функционала $J[y(x)]$, отвечающим приращению $\delta y(x)$ аргумента, называется величина:

$$\Delta J = \Delta J[y(x)] = J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)] \quad (14)$$

$$(\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x), \text{ где } y(x) \in M, \tilde{y}(x) \in M)$$

Определение. Если приращение функционала $\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)]$ можно представить в виде $\Delta J = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y)\|\delta y\|$, где $L[y(x), \delta y]$ - линейный по отношению к δy функционал и $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$ при $\|\delta y\| \rightarrow 0$, то линейная по отношению к δy часть приращения функционала, т.е. $L[y(x), \delta y]$, называется **вариацией функционала** и обозначается δJ .

В этом случае функционал $J[y(x)]$ называется дифференцируемым в точке $y(x)$.

Пример. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

определенный в пространстве $C_1[a, b]$ непрерывных функций $y(x)$ на отрезке $[a, b]$, обладающих непрерывными производными 1-го порядка. Функция $f(x, y, y')$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно в области $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < y' < +\infty$.

Найдем приращение функционала ΔJ отвечающее приращению δy аргумента, где $\delta y \in C_1[a, b]$. Имеем

$$\Delta J[y(x)] = \int_a^b [f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y')] dx \quad (15)$$

По формуле Тейлора

$$f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y') = \frac{\delta f}{\delta y} \delta y + \frac{\delta f}{\delta y'} \delta y' + R(x, y, y', \delta y, \delta y') \quad (16)$$

где $R(x, y, y', \delta y, \delta y')$ - остаточный член формулы Тейлора.

Подставляя (16) в (15), получим

$$\Delta J[y(x)] = \int_a^b \left(\frac{\delta f}{\delta y} \delta y + \frac{\delta f}{\delta y'} \delta y' \right) dx + \int_a^b R(x, y, y', \delta y, \delta y') dx \quad (17)$$

Первое слагаемое в правой части (17) линейно относительно δy и $\delta y'$. Пусть все вторые частные производные функции $f(x, y, y')$ по y и y' не превосходят по абсолютной величине некоторой константы $M > 0$ в ограниченной по y и y' области. Тогда справедлива оценка:

$$\int_a^b |R(x, y, y', \delta y, \delta y')| dx \leq 2M \int_a^b \|\delta y\|^2 dx = 2M(b-a)\|\delta y\|^2$$

Здесь $\|\delta y\| = \max_{a \leq x \leq b} (|\delta y|, |\delta y'|)$. Таким образом, второе слагаемое в правой части (17) - второго порядка малости относительно $\|\delta y\|$. Следовательно, согласно определению, функционал $J[y]$ дифференцируем в пространстве $C_1[a, b]$ и его вариация имеет вид

$$\delta J[y] = \int_a^b \left(\frac{\delta f}{\delta y} \delta y + \frac{\delta f}{\delta y'} \delta y' \right) dx \quad (18)$$

Пример. Найти вариацию функционала

$$J[y] = \int_{-1}^1 (y' e^y + x y^2) dx$$

Решение $f(x, y, y') = y' e^y + x y^2$, очевидно, непрерывна по совокупности переменных x, y и y' , имеет частные производные всех порядков по y и y' , ограниченные в любой ограниченной области изменения переменных y и y' . Поэтому данный функционал дифференцируем в пространстве $C_1[-1, 1]$ и его вариация согласно (18) равна:

$$\delta J = \int_{-1}^1 [(y' e^y + 2xy) \delta y + e^y \delta y'] dx$$

Второе определение вариации функционала.

Вариацией функционала $J[y(x)]$ в точке $y = y(x)$ называется значение производной функционала $J[y(x) + \alpha \delta y(x)]$ по параметру α , когда $\alpha = 0$:

$$\delta J = \left. \frac{\delta}{\delta \alpha} J[y(x) + \alpha \delta y(x)] \right|_{\alpha=0} \quad (19)$$

Если существует вариация функционала как главная линейная часть его приращения т.е. в смысле первого определения, то существует и вариация как значение производной по параметру α при $\alpha = 0$ и эти вариации совпадают.

Пример. Пользуясь вторым определением, найти вариацию функционала

$$J[y(x)] = \int_a^b y^2(x) dx.$$

Решение. Вариация функционала в смысле первого определения равна:

$$\delta y = 2 \int_a^b y(x) \delta y(x) dx$$

Найдем вариацию функционала $J[y]$, пользуясь вторым определением вариации. Имеем

$$J[y(x) + \alpha \delta y(x)] = \int_a^b [y(x) + \alpha \delta y(x)]^2 dx$$

Тогда

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} J[y + \alpha \delta y(x)] = 2 \int_a^b (y + \alpha \delta y(x)) \delta y dx$$

и, следовательно,

$$\delta J = \frac{\delta}{\delta \alpha} J[y + \alpha \delta y(x)] \Big|_{\alpha=0} = 2 \int_a^b y \delta y dx.$$

Вариации функционала в смысле первого и второго определения совпадают.

Пример. На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$J[y(x)] = \int_1^2 (y'^2 - 2xy) dx, y(1) = 0, y(2) = -1?$$

Решение. Здесь $f(x, y, y') = y'^2 - 2xy$, так что уравнение Эйлера имеет вид $y'' + x = 0$. Общее решение уравнения Эйлера есть

$$y(x) = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Граничные условия дают систему линейных уравнений для определения C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{6}, \\ 2C_1 + C_2 = \frac{2}{6}. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = \frac{1}{6}$, $C_2 = 0$.

Следовательно экстремум может оказаться лишь на кривой

$$y = \frac{x}{6}(1 - x^2)$$

4. Вторая вариация функционала

Определение. Функционал $J[x, y]$, зависящий от 2-х элементов x и y (принадлежащих некоторому линейному пространству), называется **билинейным** если при фиксировании x он представляет собой линейный функционал от y , а при фиксировании y - линейный функционал от x .

Таким образом, функционал $J[x, y]$ билинеен, если

$$J[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = \alpha_1 J[x_1, y] + \alpha_2 J[x_2, y],$$

$$J[x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2] = \beta_1 J[x, y_1] + \beta_2 J[x, y_2].$$

Полагая в билинейном функционале $y = x$, получаем выражение $J[x, x]$, называемое **квадратичным функционалом**.

Билинейный функционал в конечномерном пространстве называется **билинейной формой**.

Квадратичный функционал $J[x, x]$ называется положительно определенным, если $J[x, x] > 0$ для любого ненулевого элемента x

Например:

1) Выражение

$$J[x, y] = \int_a^b A(t)x(t)y(t)dt,$$

где $A(t)$ - фиксированная непрерывная функция, представляет собой билинейный функционал, а $\int_a^b A(t)x^2(t)dt$ - квадратичный функционал в пространстве $C[a, b]$, причем если $A(t) > 0$ при всех $t \in [a, b]$, то этот квадратичный функционал будет положительно определенным.

2) Выражение

$$\int_a^b [A(t)x^2(t) + B(t)x(t)x'(t) + C(t)x'^2(t)]dt$$

представляет собой пример квадратичного функционала, определенного для всех функций из пространства $C_1[a, b]$

3) Интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K(S, t)x(S)y(t)dSdt,$$

где $K(S, t)$ - фиксированная функция двух переменных, является билинейным функционалом в $C[a, b]$

Определение. Пусть $J[y]$ - функционал определенный в каком либо нормированном пространстве. Будем говорить, что функционал $J[y]$ имеет вторую вариацию, если его приращение

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y]$$

можно записать в виде

$$\Delta J = L_1[\delta y] + \frac{1}{2}L_2[\delta y] + \beta\|\delta y\|^2, \quad (20)$$

где $L_1[\delta y]$ - линейный функционал, $L_2[\delta y]$ - квадратичный функционал, а $\beta \rightarrow 0$ при $\|\delta y\| \rightarrow 0$

Квадратичный функционал $L_2[\delta y]$ будем называть второй вариацией (вторым дифференциалом) функционала $J[y]$ и обозначать $\delta^2 J$.

Вторая вариация функционала (если она существует) определяется однозначно.

Пример. Найти вторую вариацию функционала

$$J[y] = \int_0^1 (xy^2 + y'^3) dx,$$

определенного в пространстве $C_1[0, 1]$ функцией $y(x)$. Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[y + \delta y] - J[y] = \int_0^1 [x(y + \delta y)^2 + (y' + \delta y')^3 - xy^2 - y'^3] dx = \\ &= \int_0^1 [2xy\delta y + x(\delta y)^2 + 3y'^2\delta y' + 3y'(\delta y')^2 + (\delta y')^3] dx = \\ &= \int_0^1 (2xy\delta y + 3y'^2\delta y') dx + \int_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2] dx + \int_0^1 (\delta y')^3 dx \end{aligned}$$

При фиксированном $y(x)$ первое слагаемое конечной записи есть линейный функционал относительно $\delta y(x)$ второе слагаемое есть квадратичный функционал, а третье допускает очевидную оценку:

$$\left| \int_0^1 (\delta y') dx \right| \leq (\max |\delta y'|)^2 \int_0^1 |\delta y'| dx \leq \int_0^1 |\delta y'| dx \|\delta y\|^2$$

(нормы в смысле пространства $C_1[0, 1]$), откуда видно, что это слагаемое представляемо в виде $\beta \|\delta y\|^2$, где $\beta \rightarrow 0$ при $\|\delta y\| \rightarrow 0$. Согласно определению, данный функционал имеет вторую вариацию и она равна:

$$\delta^2 J = 2 \int_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2] dx$$

Введем функцию $\Phi(\alpha) = J[y + \alpha \delta y]$. Вторая вариация $\delta^2 J$ функционала $J[y]$ определяется также через вторую производную функции $\Phi(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$:

$$\delta^2 J = \left. \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0}$$

Для функционалов интегрального типа, которые мы будем преимущественно рассматривать, оба эти варианта совпадают.

5. Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума

Говорят, что функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума, если значение функционала $J[y(x)]$ на любой близкой к $y = y_0(x)$ кривой не больше чем $J[y_0(x)]$, то есть

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \leq 0$$

Если $\Delta J \leq 0$, причем $\Delta J = 0$ только при $y = y_0(x)$, то говорят, что на кривой $y = y_0(x)$ достигается строгий максимум. Аналогично определяется кривая, на которой реализуется минимум.

Пример. Показать, что функционал

$$J[y(x)] = \int_0^1 (x^2 + y^2) dx$$

на кривой $y(x) \equiv 0$ достигает строгого минимума.

Решение. Для любой непрерывной на $[0, 1]$ функции $y(x)$ имеем

$$\Delta J = J[y(x)] - J[0] = \int_0^1 (x^2 + y^2) dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 y^2 dx \geq 0,$$

причем знак равенства достигается только при $y(x) \equiv 0$.

Сильный и слабый экстремум.

Говорят, что функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ сильного относительного максимума, если для всех допустимых кривых $y = y_0(x)$, расположенных в некоторой ε -окрестности нулевого порядка кривой $y = y_0(x)$, имеем

$$J[y(x)] \leq J[y_0(x)].$$

Аналогично определяется слабый относительный минимум функционала.

Минимумы и максимумы, сильные и слабые, функционала $J[y]$ называют относительными экстремумами. Всякий сильный экстремум есть в то же время и слабый, но не наоборот.

Экстремум функционала $J[y]$ на всей совокупности функций, на которых он определен, называется абсолютным экстремумом.

Всякий абсолютный экстремум является слабым и сильным относительным экстремумом, но не всякий относительный экстремум будет абсолютным.

6. Достаточные условия экстремума функционала

Рассматривается простейшая задача для функционала:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx, \quad (21)$$

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1. \quad (22)$$

1. Достаточные условия Вейерштрасса.

Функцией Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ называется функция, определяемая равенством

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p), \quad (23)$$

где $p = p(x, y)$ - наклон поля экстремалей рассматриваемой вариационной задачи (21)-(22) в точке (x, y) .

Достаточные условия слабого экстремума.

Кривая C доставляет слабый экстремум функционалу (21), если:

1. Кривая C является экстремалью функционала, удовлетворяющей граничным условиям, то есть является решением уравнения Эйлера для функционала (21), удовлетворяющим условиям (22).

2. Экстремаль C может быть включена в поле экстремалей; в частности, это будет, если выполнено условия Якоби.

3. Функция Вейерштрасса должна сохранять знак во всех точках, близких к экстремали C , и для близких к $p(x, y)$ значений y' . Функционал $J[y]$ будет иметь максимум на C , если $E \leq 0$, и минимум, если $E \geq 0$.

Достаточные условия сильного экстремума. Кривая C доставляет сильный экстремум функционалу (21), если:

1. Кривая C является экстремалью функционала, удовлетворяющей граничным условиям.

2. Экстремаль C может быть включена в поле экстремалей.

3. Функция Вейерштрасса должна сохранять знак во всех точках, близких к экстремали C , и для произвольных значений y' . Функционал $J[y]$ будет иметь максимум на C , если $E \leq 0$, и минимум, если $E \geq 0$.

Замечание. Условие Вейерштрасса необходимо для наличия экстремума в следующем смысле - если в точках экстремали для некоторых значений y' функция E имеет противоположные знаки, то сильный экстремум не достигается.

Если это свойство имеет место при сколь угодно близких к p значениях y' , то не достигается и слабый экстремум.

2. Достаточные условия Лежандра.

Пусть функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывную частную производную $F_{y'y'}(x, y, y')$ и пусть экстремаль C включена в поле экстремалей.

Если на экстремали C имеем $F_{y'y'} > 0$, то на кривой C достигается слабый минимум, а если $F_{y'y'} < 0$, то слабый максимум.

В том случае, когда $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ в точках (x, y) , близких к экстремали C , при произвольных значениях y' , то имеем сильный минимум, а в случае, когда выполняется $F_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$ - сильный максимум.