

Practicum Numerieke Wiskunde

2e Bachelor Informatica-Wiskunde

Academiejaar 2012-2013

Het doel van dit practicum is het gebruiken van Matlab voor het benaderen van functies met veeltermen in een interval $[-1, 1]$. Eerst schrijf je een aantal Matlab functies om de interpolerende veelterm te berekenen en te evalueren in verschillende basissen. Deze code kan dan gebruikt worden om verschillende basissen en puntenverzamelingen met elkaar te vergelijken. Je gebruikt vervolgens een goede basis en een goede puntenverzameling om het convergentiegedrag van veeltermbenaderingen van toenemende graad te bestuderen. Tenslotte schrijf je nog een Matlab functie om een interpolerende veelterm te berekenen die equivalent is met een gegeven functie tot op machine nauwkeurigheid.

Het benaderen van functies is een uitgebreid studiedomein en we zullen ons dan ook beperken tot het onderzoeken van de numerieke problemen die binnen het bereik van deze cursus vallen.

1 Achtergrond

Zij P_n de deelruimte van veeltermen van graad $k \leq n$. Een veelterm $p \in P_n$ kan voorgesteld worden in verschillende basissen $\{b_0, \dots, b_n\}$. Beschouw de volgende vier basissen:

- de monomiaalbasis $b_k(x) = x^k$,
- de Lagrange basis,
- de Newton basis,
- de Chebyshev basis.

De Chebyshev veeltermen van de eerste soort $T_k(x)$ worden gedefinieerd op basis van de volgende recursiebetrekking

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1, \\T_1(x) &= x, \\T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).\end{aligned}$$

Opdracht: Toon aan dat in het interval $[-1, 1]$ deze veeltermen ook voldoen aan

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)). \quad (1)$$

We vergelijken de interpolerende veelterm voor twee verschillende puntenverzamelingen: equidistante punten¹ en Chebyshev punten. In het interval $[-1, 1]$ worden Chebyshev punten meestal gedefinieerd als

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right), \quad 0 \leq j \leq n.$$

¹Voor één punt nemen we het midden van het interval.

Een maat voor hoe goed een veelterm $p \in P_n$ een gegeven functie f benadert in het interval $[-1, 1]$ is de ∞ -norm van het verschil

$$E = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)|. \quad (2)$$

2 Matlab Code

Beijk de Matlab functie `evalbasis.m` die je kan vinden op Toledo. Schrijf voor elk van de vier basissen de respectievelijke functies `monomiaalbasis.m`, `lagrangebasis.m`, `newtonbasis.m` en `chebyshevbasis.m`, die als argument kunnen worden doorgegeven aan `evalbasis`. Bv.

```
b = evalbasis(y,n,@lagrangebasis,x)
```

evalueert n Lagrange veeltermen, bepaald door de interpolatiepunten x , in de punten y . Voor de Chebyshev basis volstaat het dat de functie kan evalueren in het interval $[-1, 1]$. Let op dat je het bestand `evalbasis.m` niet wijzigt!

Vervolgens maak je een functie met volgende signatuur

```
p = interpolerende_veelterm(x,fun,type)
```

die gegeven een vector \mathbf{x} van interpolatiepunten in het interval $[-1, 1]$, een function handle `fun` voor de functie die geïnterpoleerd wordt en een string `type` die het type van de basis weergeeft ('monomiaal', 'lagrange', 'newton' of 'chebyshev'), een Matlab structure² `p` teruggeeft met de volgende velden

- `p.coef` is de coëfficiëntenvector van de interpolerende veelterm in de opgegeven basis,
- `p.val` is een function handle die toelaat de interpolerende veelterm te evalueren in een vector y als `pval = p.val(y)`.

Tenslotte schrijf je nog een functie om de benaderingsfout in de ∞ -norm te benaderen door het interval $[-1, 1]$ te discretiseren met N equidistante punten. De functie heeft volgende signatuur

```
E = maxnorm(f,p,N)
```

waarbij `f` en `p` function handles zijn voor respectievelijk de functie die benaderd wordt en de interpolerende veelterm.

3 Veelterminterpolatie

In deze sectie vergelijken we equidistante interpolatiepunten met Chebyshev interpolatiepunten en vergelijken we verschillende basissen om de veeltermen voor te stellen. Daarna onderzoeken we voor goede interpolatiepunten en een goede basis de convergentie voor verschillende functies.

Bundel de code voor deze sectie in een script `hoofdprogramma.m`, waarbij je de verschillende onderdelen van elkaar scheidt d.m.v. 'Cells' (%% in het begin van een regel).

²Zie de Matlab documentatie voor meer uitleg.

3.1 Equidistante punten en het Runge fenomeen

Beschouw de functie

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2},$$

en maak een grafiek waarin je de functie plot samen met de interpolerende veelterm van graad 6, 10 en 14 in de Lagrange basis voor equidistante punten. Voeg een legende toe. Wat neem je waar?

Bereken ook de benaderingsfout E voor toenemende graden $0, 1, \dots, 50$ en plot deze fout in functie van de graad. Bereken dezelfde benaderingsfout E , maar voor Chebyshev punten en voeg deze toe aan je figuur. Gebruik een goede schaal voor de assen. Bespreek het foutenverloop voor beide puntenverzamelingen.

Voor equidistante punten is er duidelijk divergentie voor de Runge functie f , genoemd naar de Duitse wiskundige Carl Runge. Equidistante punten worden in de praktijk bijna nooit gebruikt voor veelterminterpolatie van hogere graad en we zullen in de rest van het practicum gebruik maken van Chebyshev punten.

3.2 Verschillende basissen

We berekenen opnieuw de interpolerende veelterm van de Runge functie, maar deze keer in de Chebyshev punten. Maak een grafiek van de benaderingsfout E voor toenemende graden $0, 1, \dots, 80$ voor de vier basissen. Wat neem je waar? Welke basis(sen) verkies je?

Als er meerdere basissen het goed doen³, voer dan een tijdsmeting uit op het evalueren van de interpolerende veelterm. Bereken telkens de interpolerende veelterm van graad $n = 50$ in de Chebyshev punten en meet de uitvoeringstijd voor het evalueren van de veelterm in $N = 10000$ punten. Gebruik `tic` en `toc`, en neem het gemiddelde van minstens 10 metingen. Welke basis wordt het snelst geëvalueerd? Neem nu $n = 100$. Wat gebeurt er met de uitvoeringstijden? Wat zegt dit over de grootte orde van het aantal bewerkingen dat gedaan moet worden? Welke basis verkies je op basis van de uitvoeringstijd?

3.3 Convergentiegedrag

We bekijken het convergentiegedrag van de interpolerende veelterm in Chebyshev punten voor verschillende functies. De convergentie is ofwel $\mathcal{O}(C^{-n})$ (geometrische convergentie), ofwel $\mathcal{O}(n^{-\nu})$, waarbij n de graad van de interpolerende veelterm voorstelt. Stel de interpolerende veelterm steeds voor in de basis die je gekozen hebt in de vorige sectie. Bereken de benaderingsfout E voor toenemende graden $0, 1, \dots, n_{max}$ voor de volgende functies:

1. $f_1(x) = \frac{1}{1 + 25x^2},$
2. $f_2(x) = |x|,$
3. $f_3(x) = |\sin(5x)|^3,$
4. $f_4(x) = \cos(20x).$

Plot de functies in vier deelfiguren van één figuur m.b.v. `subplot`. (Hint: je kan in je script een cell array maken van function handles, om je code compacter te maken.)

Maak vervolgens twee figuren van de benaderingsfouten voor een goede keuze van n_{max} , en waarbij je in elke figuur een gepaste schaal kiest voor de assen, zodat je het gedrag van de benaderingsfouten voor elk van de vier functies kan vergelijken. Beantwoord m.b.v. deze figuren de volgende vragen:

³Er zijn er inderdaad meerdere die het goed doen...

- Voor welke functie krijg je de snelste convergentie? Voor welke de traagste? Enz.
- Voor welke functies krijg je geometrische convergentie? Voor welke is de convergentie $\mathcal{O}(n^{-\nu})$? Verklaar m.b.v de grafiek.

Zoek tenslotte de waarde van ν en C voor de relevante functies en leg uit hoe je deze berekent.

3.4 Benaderen tot op machine nauwkeurigheid

Bereken de interpolerende veelterm van graad 300 in de Chebyshev basis (en met Chebyshev punten) van de functie $f_1(x)$. Plot de absolute waarden van de coëfficiënten gedeeld door de absolute waarde van de grootste coëfficiënt met een gepaste schaal op de assen. Merk op dat de coëfficiënten van basisveeltermen van oneven graad gelijk zijn aan nul. Merk ook op dat de gescaleerde coëfficiënten exponentieel afnemen, tot ze dezelfde grootte orde hebben als de machine nauwkeurigheid.

Maak een figuur waarin je de eerste acht Chebyshev veeltermen plot. Merk op dat de Chebyshev veeltermen in $[-1, 1]$ in absolute waarde begrensd zijn door 1, wat rechtstreeks volgt uit formule (1). Hieruit volgt dat als we de interpolerende Chebyshev veelterm afbreken van zodra de gescaleerde coëfficiënten van grootte orde de machine nauwkeurigheid zijn, we een relatieve fout maken die van de grootte orde van de machine nauwkeurigheid is.

Schrijf een functie `p = equivalente_veelterm(f)` waarbij `f` een function handle is van de te benaderen functie. Deze functie berekent de interpolerende Chebyshev veelterm voor steeds hoger wordende graad en stopt wanneer de gescaleerde coëfficiënten de machine nauwkeurigheid bereikt hebben. Vervolgens wordt de graad bepaald, door de hoogste-graads-coëfficiënten die te verwaarlozen zijn te laten wegvallen. De output `p` is de resulterende interpolerende veelterm, analoog aan de functie `interpolerende_veelterm`. (Hint: Je mag de graad sneller laten toenemen dan ze in elke stap met 1 te verhogen.)

Pas de functie `equivalente_veelterm` toe op de vier functies uit de vorige sectie, en bepaal op basis van het aantal coëfficiënten de optimale graad van de interpolerende veelterm voor elke functie en zet deze graden in een tabel.

4 Praktisch

Groepen

Je werkt in groepjes van twee personen. Ten laatste op **maandag 22 april** stuur je per groepje een email naar matthias.humet@cs.kuleuven.be met hierin de namen en de studentenummers van de leden van je groepje. Zet het woord ‘practicum’ in het onderwerp van de email. We raden aan om samen te werken met iemand van een andere studierichting en voordeel te halen uit elkaars expertise.

Code

De code moet geupload worden op Toledo door iemand van het groepje ten laatste op **donderdag 9 mei**. Zet al de code in één zip-bestand met jullie achternamen in de bestandsnaam, bv. `codeDeSmetVanIeper.zip`. Het zip-bestand moet minstens de volgende bestanden bevatten:

- `monomiaalbasis.m`
- `lagrangebasis.m`
- `newtonbasis.m`

- `chebyshevbasis.m`
- `interpolerende_veelterm.m`
- `maxnorm.m`
- `equivalente_veelterm.m`
- `hoofdprogramma.m`

Vergeet mogelijke hulpfuncties niet toe te voegen die jullie geschreven hebben. Merk op dat je de functie `evalbasis.m` niet hoeft mee te sturen. Dit betekent dat jullie code moet werken met de versie die op Toledo staat.

Verslag

Schrijf een duidelijk gestructureerd en bondig verslag van maximaal 8 pagina's waarin zeker het volgende staat:

- Alle figuren en tabellen. Benoem steeds de assen en zorg ervoor dat de grafieken leesbaar zijn. Voeg legendes toe indien nodig. Je hoeft geen uitgebreid onderschrift te voorzien, als je in de tekst duidelijk naar de figuur verwijst.
- Antwoorden op alle opgaves en vragen die gesteld worden.
- Indien je dit nodig acht, kan je in het verslag bepaalde ontwerpkeuzes voor je algoritmes verduidelijken.
- Tijdsbesteding aan de verschillende onderdelen van het practicum:
 - Schrijven functies
 - Schrijven van `hoofdprogramma.m` en het maken van de figuren.
 - Debuggen
 - Schrijven verslag

Indien jullie het werk verdeeld hebben en de tijdsschattingen voor beide groepsleden verschillen, geef dit dan ook duidelijk aan.

Je uploadt je verslag op Toledo als één pdf-bestand ten laatste op **donderdag 9 mei**. Geef het pdf-bestand een analoge naam als je code, bv. `verslagDeSmetVanIeper.pdf`. Tevens geef je een afgedrukte versie van je verslag af. Je kan je verslag deponeren in de studentenbrievenbus vanaf maandag 6 mei, met als harde deadline **vrijdag 10 mei om 12h**. De studentenbrievenbus hangt in het printerlokaal op het gelijkvloers van gebouw 200A.

Evaluatie

De evaluatie van dit practicum is gebaseerd op de ingediende code, het verslag en een demo die je zal moeten geven van je programma's. Tijdens de demo zullen er ook extra vragen gesteld worden en is er ruimte voor feedback. De demo's zullen doorgaan tijdens de week van 13 mei.

Er zal vanaf maandag 6 mei aan het prikbord naast het secretariaat een blad hangen waar je je moet inschrijven voor de demo. Dit moet ten laatste gebeuren op **vrijdag 10 mei om 12h**.

Overzicht deadlines

Wat	Waar	Deadline
Verdelen in groepjes	e-mail	maandag 22 april
Uploaden code	Toledo	donderdag 9 mei
Uploaden verslag	Toledo	donderdag 9 mei
Indienen afgedrukt verslag	Studentenbrievenbus 200A	vrijdag 10 mei om 12h
Inschrijven demo	Prikbord 200A	vrijdag 10 mei om 12h

Veel succes!

Dirk, Yvette, Matthias en Marc