Analysis II - Übung 6

1. Gegeben ist die Funktionenreihe $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ mit $f_n(x) = e^{-n}\cos(n^2 x)$.

   (a) Zeigen Sie, dass alle Reihen $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergieren und folgern sie daraus, dass durch $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ eine C^∞-Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert.

   (b) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k$ (im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) den Konvergenzradius $R = 0$ besitzt.

Beweis. **(a)** Per Induktion nach k ist zunächst leicht zu zeigen, dass $f_n^{(2k)} = (-1)^k n^{4k} e^{-n}\cos(n^2 x)$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:
Induktionsanfang:

$$f_n^{(0)} = e^{-n}\cos(n^2 x) = (-1)^0 n^{4\cdot 0} e^{-n}\cos(n^2 x)$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein $k \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} f_n^{(2(k+1))} &= \left((-1)^k n^{4k} e^{-n}\cos(n^2 x)\right)'' & = \\ &= \left((-1)^{k+1} n^{4k+2} e^{-n}\sin(n^2 x)\right)' & = \\ &= (-1)^{k+1} n^{4(k+1)} e^{-n}\cos(n^2 x). \end{aligned}$$

Analog zeigt sich

$$f_n^{(2k+1)} = (-1)^{(k+1)} n^{4k+2} e^{-n}\sin(n^2 x)$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$. Da Sinus und Kosinus im Reellen beide mit 1 beschränkt sind, gilt natürlich für alle $k, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$:

$$f_n^{(k)} \leq n^{2k} e^{-n} = \frac{n^{2k}}{e^n}$$

und für ihre Reihe also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2k}}{e^n}.$$

Mit dem Wurzelkriterium ergibt sich aber auch:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2k}}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}^{2k}}{e} = \frac{1^{2k}}{e} = \frac{1}{e} < 1, \tag{1}$$

weswegen obige Reihe konvergiert. Nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium konvergiert dann aber $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$ sogar gleichmäßig für alle k. Nun ist auch jede solche Reihe summandenweise differenzierbar, und Satz 4.2.7 ergibt dann

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k+1)}(x),$$

und wenn wir uns $f_k(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$ als die Grenzfunktion der k-ten Ableitung definieren, erhalten wir $f_k(x)' = f_{k+1}(x)$. Damit ist jede Ableitung von $f(x) := f_0(x)$ wieder differenzierbar, und die Aussage $f \in C^\infty$ ist bewiesen.

(b) $\square$