

Analysis II - Übung 10

Lukas Miaskiwsyi, Marcel Nieberler, Johannes Zobel
Gruppe 08 - Dienstag 14-16 Uhr

10.1

Berechnen Sie die Längen der folgenden parametrisierten Kurven und skizzieren Sie diese:

a) $t \in [0, 2\pi] \mapsto c(t) := (\cos t, 1) \in \mathbb{R}^2$

b) $t \in [0, 2\pi] \mapsto c(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2$

Lösung: a) Zunächst ist $c(t)$ offensichtlich komponentenweise differenzierbar mit $\dot{c}(t) = (-\sin t, 0)$. Damit ist auch diese Ableitung differenzierbar, und wir dürfen die Länge l der Kurve nach Vorlesung via Integral bestimmen, nämlich wie folgt:

$$l = \int_0^{2\pi} |\dot{c}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (0)^2} dt = \int_0^{2\pi} |\sin(t)| dt.$$

Auch wenn uns momentan keine explizite Stammfunktion zu $|\sin(t)|$ bekannt ist, können wir ausnutzen, dass wir wissen, dass der Graph von $\sin(t)$ zu jedem Punkt $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) punktsymmetrisch ist und $\sin(k\pi) = 0$ gilt, also gilt insbesondere:

$$\int_0^\pi \sin(t) dt = - \int_\pi^{2\pi} \sin(t) dt \implies \int_0^\pi |\sin(t)| dt = \int_\pi^{2\pi} |\sin(t)| dt.$$

Für $t \in [0, \pi]$ ist $\sin(t) \geq 0$, weswegen wir $\int_0^\pi |\sin(t)| dt = \int_0^\pi \sin(t) dt$ schreiben können. Zusammenfassend gilt also mit $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$:

$$l = \int_0^{2\pi} |\sin(t)| dt = 2 \int_0^\pi \sin(t) dt = 2[-\cos(t)]_0^\pi = 2(-\cos(\pi) + \cos(0)) = 4.$$

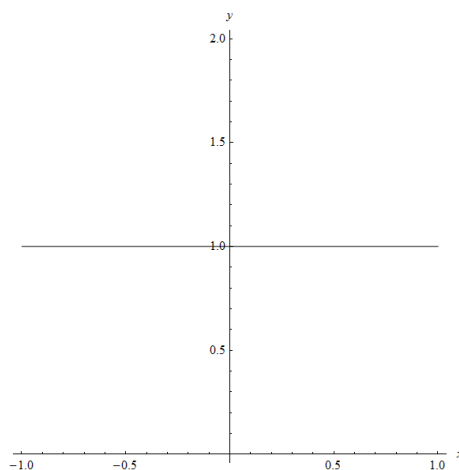


Abbildung 1: Die Kurve aus a) in der xy -Ebene.

b) Auch hier ist $c(t)$ als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen differenzierbar mit $\dot{c}(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$. Die Länge l ergibt sich wie in a) über das Integral:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} |\dot{c}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt. \end{aligned}$$

Dazu müssen wir das unbestimmte Integral von $\sqrt{1 - \cos(t)}$ bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \cos(t)} dt &= \int \sqrt{\frac{(1 + \cos(t))(1 - \cos(t))}{1 + \cos(t)}} dt = \\ &= \int \sqrt{\frac{1 - \cos^2(t)}{1 + \cos(t)}} dt = \int \text{sign}(\sin(x)) \frac{\sin(t)}{\sqrt{1 + \cos(t)}} dt. \end{aligned}$$

Fallunterscheidung: Sei zunächst $0 \leq t \leq \pi \implies \sin(x) \geq 0$. Dann gilt, mit Substitution $u := 1 + \cos(t) \implies dt = -\frac{du}{\sin(t)}$:

$$\int \text{sign}(\sin(x)) \frac{\sin(t)}{\sqrt{1 + \cos(t)}} dt = - \int u^{-\frac{1}{2}} du = -2\sqrt{1 + \cos(t)} + c.$$

Für den Fall $\pi \leq t \leq 2\pi$ erhalten wir dasselbe Ergebnis mit umgekehrtem Vorzeichen, also $2\sqrt{1 + \cos(t)} + c$. Das dies tatsächlich Stammfunktionen sind, erhalten wir durch Differentiation. Wir müssen das Integral also in zwei Bereiche unterteilen, und erhalten:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt = \sqrt{2} \left(\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt \right) = \\ &= \sqrt{2} ([-2\sqrt{1 + \cos(t)}]_0^{\pi} + [2\sqrt{1 + \cos(t)}]_{\pi}^{2\pi}) = \sqrt{2} (2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = 8. \end{aligned}$$

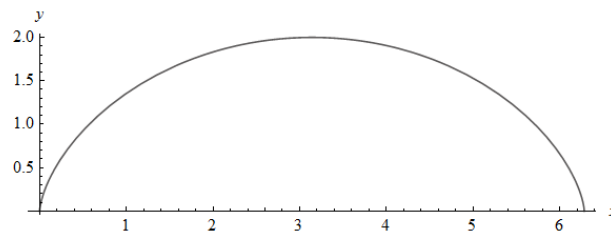


Abbildung 2: Die Kurve aus b) in der xy -Ebene.

10.2 Untersuchen Sie, ob die Funktionen

a) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R},$

b) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$

jeweils über $]0, 1]$ und $[1, \infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar sind.

Lösung: a) Wir machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $\alpha = -1 \implies f(x) = \frac{1}{x}$. Wir wissen natürlich, dass $\int \frac{1}{x} dx = \log(x) + c$ gilt. Also:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \log(1) - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x)}_{=-\infty} = \infty, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x)}_{=\infty} - \log(1) = \infty,$$

$\frac{1}{x}$ ist also auf keinem der beiden Intervalle uneigentlich integrierbar.

Fall 2: $\alpha < -1$. Hier gilt $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$. Wegen $\alpha + 1 < 0$ gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = 0,$$

folglich erhalten wir in den Integralen

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha+1} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \infty, \\ \int_1^\infty x^\alpha dx &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} = -\frac{1}{\alpha+1}, \end{aligned}$$

womit $f(x)$ für $\alpha < -1$ auf $[1, \infty[$ uneigentlich integrierbar ist.

Fall 3: $\alpha > -1$. Wie in Fall 2 gilt: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$. Wegen $\alpha + 1 > 0$ gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{0^{\alpha+1}}{\alpha+1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \infty,$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha+1} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}, \\ \int_1^\infty x^\alpha dx &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} = \infty, \end{aligned}$$

und $f(x)$ ist für $\alpha > -1$ auf $]0, \infty]$ uneigentlich integrierbar.

b) Zunächst gilt für das unbestimmte Integral mit Substitution $u := \frac{1}{x} \implies dx = -x^2 du$ und $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$:

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = - \int \sin(u) du = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + c.$$

Ableiten des entstehenden Terms bestätigt die Stammfunktionseigenschaft. Uns ist bekannt, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ unbestimmt divergent ist und $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}\right) = \cos(0) = 1$ wegen der Stetigkeit des Kosinus gilt, also erhalten wir für die uneigentlichen Integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \cos(1) - \lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

welches aufgrund der unbestimmten Divergenz des Subtrahenden ebenfalls divergiert. Das andere Integral liefert:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \cos(1) = 1 - \cos(1),$$

und ist somit uneigentlich integrierbar.

10.3 Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$F(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass F zweimal partiell differenzierbar ist, aber $\partial_1 \partial_2 F(0, 0) \neq \partial_2 \partial_1 F(0, 0)$ gilt.
- b) Ist F stetig in $(0, 0)$?

Lösung: **a)** Die Funktion ist zunächst einmal in $(x, y) = (0, 0)$ total differenzierbar, denn

$$F(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = F(0, 0) + \underbrace{\left(y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)}_{\Delta_1(x, y)} (x - 0) + \underbrace{0}_{\Delta_2(x, y)} (y - 0),$$

wobei $\Delta_2(x) = 0$ offensichtlich stetig ist und $\Delta_1(x) = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

nach Epsilon-Delta-Kriterium, denn für $|(x, y) - (0, 0)| = |(x, y)| < \varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned} |F(x, y) - F(0, 0)| &= |y| \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |y| \frac{|x^2| + |y^2|}{x^2 + y^2} = \\ &= |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)|_2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da sie total differenzierbar ist, ist sie insbesondere partiell differenzierbar, und wir können ableiten wie ein Weltmeister. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ erhalten wir (Quotientenregel):

$$\begin{aligned} \partial_x F(x, y) &= \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3 y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = y \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_y F(x, y) &= \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - 2y(x^3 y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = x \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu erkennen, dass $\lim_{x \rightarrow 0^+} \partial_x F(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \partial_x F(x, 0) = 0$ bzw. $\lim_{y \rightarrow 0^+} \partial_x F(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \partial_x F(0, y) = 0$ gilt, und somit ist F in allen Komponenten partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\partial_x F(x, y) &= \begin{cases} y \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\ \partial_y F(x, y) &= \begin{cases} x \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}\end{aligned}$$

Diese Ableitungen sind als Zusammenstellung differenzierbarer Funktionen in $(x, y) \neq (0, 0)$ offensichtlich wiederum partiell differenzierbar. Andererseits erhalten wir:

$$\partial_x F(0, y) = \begin{cases} -y & \text{für } y \neq 0, \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases} = -y, \quad \partial_y F(x, 0) = \begin{cases} x & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} = x,$$

also ergibt sich für die partiellen Ableitungen

$$\partial_{yx} F(0, 0) = \partial_y(-y) = -1 \neq +1 = \partial_x(x) = \partial_{xy} F(0, 0).$$

b) Wir haben gezeigt, dass F einmal total differenzierbar ist, also aus Zusammensetzung stetiger Funktionen $\Delta_1(x, y), \Delta_2(x, y)$ konstruierbar ist. Damit ist F selbst stetig.

10.4 Für ein differenzierbares Vektorfeld $F : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die sogenannte *Divergenz* $\operatorname{div} F : G \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch:

$$\operatorname{div} F(x) := \sum_{i=1}^n \partial_i F_i(x).$$

Berechnen Sie für die Funktion $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$r(x) := \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (\text{Euklidische Norm})$$

den Gradienten $\nabla r(x) := \operatorname{grad} r(x)$ sowie $\operatorname{div} \nabla r(x)$ für $x \neq 0$.

Lösung: Zunächst ist $r(x)$ als Norm für $x \neq 0$ niemals Null, weswegen wir nie ein Problem haben, wenn $r(x)$ im Nenner steht. Desweiteren ergibt sich für ein beliebiges k mit $1 \leq k \leq n$ die partielle Ableitung nach k von $r(x)$ über eine simple Anwendung der Kettenregel:

$$\partial_k r(x) = \partial_k \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \left(\partial_k \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = \frac{1}{2r(x)} 2x_k = \frac{x_k}{r(x)},$$

womit sich der Gradientenvektor wie folgt ergibt:

$$\operatorname{grad} r(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 r(x) \\ \vdots \\ \partial_n r(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r(x)} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{r(x)} \end{pmatrix} = \frac{1}{r(x)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Wiederum die Ableitung der k -ten Komponente nach der k -ten Variable dieses Gradienten liefert (via Quotientenregel):

$$\begin{aligned}\partial_k(\operatorname{grad} r)_k(x) &= \partial_k \frac{x_k}{r(x)} = \frac{r(x)\partial_k x_k - x_k \partial_k r(x)}{r^2(x)} = \\ &= \frac{r(x) - x_k \frac{x_k}{r(x)}}{r^2(x)} = \frac{1}{r^3(x)}(r^2(x) - x_k^2),\end{aligned}$$

womit für die Divergenz folgt:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} r(x) &= \sum_{i=1}^n \partial_i (\operatorname{grad} r)_i(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r^3(x)}(r^2(x) - x_i^2) = \\ &= \frac{1}{r^3(x)} \left(\sum_{i=1}^n r^2(x) - \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{=r^2(x)} \right) = \frac{1}{r^3(x)}(nr^2(x) - r^2(x)) = \frac{n-1}{r(x)}.\end{aligned}$$