

Índice General

Capítulo 1. TECNICAS DE INTEGRACION.	3
1.1. Substitución.	5
1.2. Completación de Cuadrados.	7
1.3. Primitivas de potencias de sin y cos.	9
1.4. Otras substituciones.	10
1.5. Fracciones Parciales.	11
1.6. La substitución $x = \tan(\frac{\theta}{2})$.	13
1.7. Integración por Partes.	13

TECNICAS DE INTEGRACION.

Observamos que si F y G son primitivas de f entonces $(F-G)' = 0$. Por lo tanto $G = F + C$ con C constante. Así, si F es una primitiva de f toda otra primitiva es de la forma $F + C$ con C constante.

De aquí en adelante denotaremos por $\int f(x)dx$ la primitiva, o antiderivada, más general de la función f . Por ejemplo

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C.$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

La idea que usaremos en los párrafos a continuación es la siguiente. Si f es una función continua podemos encontrar una primitiva F . Si ahora derivamos F obtenemos de vuelta f . Por otra parte si partimos con una función derivable F con derivada continua y la derivamos obtenemos su derivada $F' = f$. Si ahora buscamos una primitiva de f , no obtenemos exactamente F sino en general $F + C$ donde C es constante. En otras palabras si partimos con una función continua, le buscamos cualquier primitiva y luego derivamos esta primitiva obtenemos la función original. Por otro lado si partimos con una función F con derivada continua, la derivamos y luego buscamos una primitiva a esta derivada obtenemos, en general, $F + C$ donde C es una constante. Ilustramos esto en el diagrama siguiente:

$$f \longrightarrow \int f(x)dx = F \longrightarrow F' = f$$

$$F \longrightarrow F' \longrightarrow \int F'(x)dx = F + C$$

Lo anterior significa que las operaciones de derivar y de encontrar primitivas son casi "operaciones inversas". De este modo, siguiendo un principio general, las reglas de derivación deben tener su versión en la búsqueda de primitivas. La instancia mas simple de esta situación son las reglas

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

y

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx.$$

Miremos dos ejercicios:

Ejercicio: Encontrar en forma "bonita" una primitiva de

$$\frac{1}{1+x^{\frac{8}{3}}}.$$

Respuesta: Imposible, para mi al menos, de darla en términos de funciones conocidas. La única que se me ocurre, recurriendo al Teorema fundamental del Cálculo y ya que la función es continua, es

$$\int_1^x \frac{ds}{1+s^{\frac{8}{3}}}.$$

Si la primitiva de esta función apareciera a menudo en problemas prácticos yo definiría la función

$$S(x) = \int_1^x \frac{ds}{1+s^{\frac{8}{3}}}$$

y la estudiaría. Además, usando aproximaciones por Taylor o sumas de Riemann la tabularía, la programaría en calculadoras y la incluiría en Maple. En una de esas la función $S(x)$ se hacía famosa como le puede haber pasado, no me hago cargo de la historia, a la función logaritmo o a la exponencial.

Por otra parte, usando las reglas de derivación en muchos casos es posible expresar una primitiva en términos de funciones clásicas ya conocidas. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejercicio: Encontrar en forma "bonita" una primitiva de

$$\frac{\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}}{1+x^{\frac{8}{3}}}.$$

Respuesta: Muy fácil. Como el numerador es la derivada del denominador se tiene por la Regla de la Cadena que

$$\frac{d}{dx}(\log(\frac{1}{1+x^{\frac{8}{3}}})) = \frac{\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}}{1+x^{\frac{8}{3}}}.$$

En lo que sigue mostraremos técnicas para expresar primitivas, en algunos casos, en términos de funciones ya conocidas. A continuación estudiaremos algunas de estas técnicas.

1.1. Substitución.

Recordemos la Regla de la Cadena:

$$(f(u(x)))' = f'(u(x))u'(x).$$

En términos de primitivas esto significa

$$\int f'(u(x))u'(x)dx = f(u(x)) + C.$$

Ejercicio: Calcular

- a) $\int \cos(x^2)x dx.$
- b) $\int \cos(x^5)x^4 dx.$
- c) $\int \frac{x}{1+x^2} dx.$
- d) $\int \frac{1}{1+x^2} dx.$
- e) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$
- f) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$
- g) $\int e^{\sin(x)} \cos(x) dx.$
- h) $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)} dx.$

Introducimos ahora la notación siguiente: Si u es función de x definimos

$$du = u'(x)dx.$$

Con esta notación la regla precedente se escribe

$$\int f'(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du.$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo: Calcular $\int e^{x^2+2x}(x+1)dx.$

Solución: Usando la notación anterior pongamos $u = x^2 + 2x$. Entonces $du = 2(x+1)dx$ o $(x+1)dx = \frac{1}{2}du$. Substituyendo obtenemos

$$\int e^{x^2+2x}(x+1)dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C.$$

Substituyendo de vuelta obtenemos

$$\int e^{x^2+2x}(x+1)dx = \frac{1}{2}e^{x^2+2x} + C.$$

Ejercicio: Calcular:

- a) $\int \frac{x}{1+x^2} dx.$
- b) $\int \frac{x}{1+x^4} dx.$

c) $\int \cos(\log(\sin^2(x))) \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x)} dx.$

d) $\int \tan(x) dx.$

Substitución en el caso de integrales definidas:

Veremos ahora la regla de substitución para integrales definidas $\int_a^b f(x) dx.$

Sea F tal que $F' = f$. La Regla de la Cadena nos dice que

$$(F(u(x)))' = f(u(x))u'(x).$$

Integrando esta relación de a a b obtenemos

$$F(u(b)) - F(u(a)) = \int_a^b f(u(x))u'(x) dx.$$

Recordamos que por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx$$

de donde se obtiene la regla de substitución para integrales definidas:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx.$$

Ejemplo: Calcular $\int_1^2 \tanh(x) dx.$

Solución: Lo haremos de dos maneras:

a) Calcularemos, por substitución, una primitiva de \tanh y luego evaluamos.

$$\int \tanh(x) dx = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} dx.$$

Ponemos $u = \cosh(x)$, luego $du = \sinh(x) dx$, y obtenemos

$$\int \tanh(x) dx = \int \frac{1}{u} du = \log(u) = \log(\cosh(x)).$$

Por lo tanto

$$\int_1^2 \tanh(x) dx = \log(\cosh(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} = \log(\cosh(2)) - \log(\cosh(1)).$$

b) Haremos substitución en la integral definida:

Ponemos $u = \cosh(x)$, luego $du = \sinh(x) dx$. Ahora

$$\int_1^2 \tanh(x) dx = \int_{\cosh(1)}^{\cosh(2)} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} dx = \int_{\cosh(1)}^{\cosh(2)} \frac{1}{u} du = \log(u) \Big|_{u=\cosh(1)}^{u=\cosh(2)} = \log(\cosh(2)) - \log(\cosh(1)).$$

1.2. Completación de Cuadrados.

Ilustramos a continuación como el conocer primitivas de $\frac{1}{1+x^2}$ y de $\frac{1}{1-x^2}$ nos permite de manera elemental, mas precisamente por completación de cuadrados, obtener

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

en el caso $a \neq 0$ ya que el caso $a = 0$ es inmediato.

Recordemos que

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C.$$

Además

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh}(x) + C = \frac{1}{2} \log\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C.$$

(Demuestre la última igualdad. Indicación $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x}$.)

Observación:

Si bien $\operatorname{arctanh}(x)$ y $\frac{1}{2} \log\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$ son primitivas de $\frac{1}{1-x^2}$, y por lo tanto difieren en una constante en su intervalo de definición común, observamos que en tanto $\operatorname{arctanh}(x)$ está definida para $x \in (-1, 1)$, $\frac{1}{2} \log\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$ está definida para todo $x \neq -1, 1$. Evaluando las constantes se tiene

$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \log\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) \text{ para todo } x \in (-1, 1).$$

Veremos ahora un par de ejemplos.

Ejemplo:

a) Calcular $\int \frac{dx}{2x^2+3x+1}$.

Solución: Completando cuadrados tenemos

$$2x^2 + 3x + 1 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}.$$

Así haciendo la substitución $\frac{1}{4}u = (x + \frac{3}{4})$, y por lo tanto $\frac{1}{4}du = dx$, obtenemos

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{1}{16}} dx = 2 \int \frac{1}{u^2 - 1} du = -2\operatorname{Arctanh}(u) + C.$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1} = -2\operatorname{Arctanh}\left(\frac{1}{4}\left(x + \frac{3}{4}\right)\right) + C.$$

También Ud. podría haber elegido la primitiva en términos de logaritmo.

b) Calcular $\int \frac{dx}{2x^2+3x+2}$.

Solución: Completando cuadrados tenemos

$$2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}.$$

Así haciendo la substitución $\frac{\sqrt{7}}{4}u = (x + \frac{3}{4})$, y por lo tanto $\frac{\sqrt{7}}{4}du = dx$, obtenemos

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{7}{16}} dx = \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{2}{\sqrt{7}} \text{Arctan}(u) + C.$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 2} = \frac{\sqrt{7}}{8} \text{Arctanh}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\left(x + \frac{3}{4}\right)\right) + C.$$

Observación: Observamos que el hecho de obtener Arctan o Arctanh en la primitiva depende del discriminante de la cuadrática $ax^2 + bx + c$.

Ejercicio: Calcular $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Ejemplo: Podemos calcular también integrales del tipo

$$\int \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Por ejemplo calcular $\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2} dx$.

Solución: Para producir la derivada del denominador sumamos y restamos $\frac{3}{4}$ en el numerador. Entonces

$$\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2} dx = \int \frac{x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{2x^2+3x+2} dx.$$

Así

$$\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+3}{2x^2+3x+2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2x^2+3x+2} dx.$$

De este modo usando el ejercicio anterior para la segunda primitiva y una substitución elemental para la primera primitiva obtenemos

$$\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2} dx = \frac{1}{4} \log(|2x^2+3x+2|) + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{7}}{8} \text{Arctanh}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\left(x + \frac{3}{4}\right)\right) + C.$$

La idea de completar cuadrados puede ser usada en otros casos como se ilustra en el ejercicio siguiente.

Ejercicio: Recuerde que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arcsinh}(x) + C$$

$$\text{y que } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{arccosh}(x) + C.$$

Calcular:

- a) $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+3x+2}} dx.$
 b) $\int \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+x-2}} dx.$

1.3. Primitivas de potencias de \sin y \cos .

Potencias impares: Mostraremos este caso con ejemplos.

Ejemplo: Calcular $\int \cos^3(x) dx$.

Solución: Se tiene

$$\int \cos^3(x) dx = \int \cos^2(x) \cos(x) dx = \int (1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx.$$

Luego

$$\int \cos^3(x) dx = \int \cos(x) dx - \int \sin^2(x) \cos(x) dx = \sin(x) - \frac{1}{3} \sin^3(x) + C.$$

Ejercicio:

- a) Usando que $\cos^5(x) = (1 - \sin^2(x))^2 \cos(x)$ calcular $\int \cos^5(x) dx$.
 b) Usando que $\cos^7(x) = (1 - \sin^2(x))^3 \cos(x)$ calcular $\int \cos^7(x) dx$.
 c) Usando que $\cos^9(x) = (1 - \sin^2(x))^4 \cos(x)$ calcular $\int \cos^9(x) dx$.
 d) Dé una fórmula para $\int \cos^{2n+1}(x) dx$ con $n \in \mathbb{N}$.
 e) Dé una fórmula para $\int \sin^{2n+1}(x) dx$ con $n \in \mathbb{N}$.

Potencias pares:

Ejemplo: Calcular $\int \cos^2(x) dx$.

Solución: Recordemos la fórmula

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

Integrando obtenemos

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos(2x) dx \right) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + C.$$

Ejemplo: Calcular $\int \cos^4(x) dx$.

Solución: Se tiene

$$\cos^4(x) = \frac{1}{4}(1 + \cos(2x))^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \cos^2(2x).$$

Recordando ahora que conocemos $\int 1 dx$, $\int \cos(2x) dx$ y $\int \cos^2(2x) dx$ obtenemos el resultado.

Ejercicio:

- a) Imagine una manera recursiva para calcular $\int \cos^{2n}(x)dx$ con $n \in \mathbb{N}$.
- b) Imagine una manera recursiva para calcular $\int \sin^{2n}(x)dx$ con $n \in \mathbb{N}$.
- c) Calcular $\int \sin^3(x) \cos^4(x)dx$.
- d) Calcular $\int \sin^2(x) \cos^4(x)dx$.
- e) Calcular $\int \cos^3(x) \sin^4(x)dx$.
- f) Calcular $\int \sin(2x) \cos^4(x)dx$.

1.4. Otras substituciones.

Ejemplo: Calcular $\int \sqrt{1-x^2}dx$.

Solución: En este caso la fórmula $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ nos motiva a hacer la substitución $x = \sin(u)$, luego $dx = \cos(u)du$. Así

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2(u)du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u) + C.$$

Por lo tanto

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) + C.$$

Si desea Ud. puede simplificar la expresión $\sin(2\arcsin(x))$.

Ejercicio:

- a) Usando $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$ calcular $\int \sqrt{1+x^2}dx$.
- b) Completando cuadrados calcular $\int \sqrt{x^2 - x + 1}dx$.
- c) Completando cuadrados calcular $\int \sqrt{x^2 - x - 1}dx$.

Ejemplo: Calcular $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ con $n \neq 1$.

Solución: Hacemos la substitución $x = \tan(u)$, luego $dx = \frac{1}{\cos^2(u)}du$. Ahora

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \int \cos^{2n-2}(u)du.$$

Podemos ahora calcular esta última primitiva por los métodos ya vistos lo que termina el ejemplo.

Ejemplo: Calcular $\int \frac{1}{(1-x^2)^n}dx$ con $n \neq 1$.

Solución: Hacemos la substitución $x = \tanh(u)$, luego $dx = \frac{1}{\cosh^2(u)}du$. Ahora

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^n}dx = \int \cosh^{2n-2}(u)du.$$

Podemos ahora calcular esta última primitiva de manera sencilla ya que

$$\cosh^{2n-2}(u) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^{2n-2}.$$

Esto termina el ejemplo.

Ejercicio:

- a) Completando cuadrados calcular $\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx$.
- b) Completando cuadrados calcular $\int \frac{1}{(x^2-x-1)^2} dx$.
- c) Calcular $\int \frac{x+1}{(x^2-x+1)^2} dx$.

1.5. Fracciones Parciales.

Consulte un texto para una explicación mas detallada de este tópico. Aquí sólo explicaremos la idea y daremos un ejemplo.

El algoritmo de la división de polinomios nos garantiza que cualquier cociente de polinomios $\frac{p(x)}{q(x)}$ siempre puede escribirse en la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = m(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

donde $m(x)$ y $r(x)$ son polinomios y grado de $r <$ grado de q .

Como $\int m(x)dx$ es trivialmente obtenible tenemos que para calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ basta calcular $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$.

El Teorema Fundamental del Algebra nos garantiza que el polinomio $q(x)$ siempre puede descomponerse en la forma

$$q(x) = q_1^{k_1}(x) \cdots q_n^{k_n}(x)$$

donde $k_j \in \mathbb{N}$ y los q_j son polinomios de grado a lo más dos.

Obtener esta descomposición, que corresponde al problema de encontrar las raíces reales y complejas del polinomio, en la práctica es un problema difícil, mas bien imposible, pero supongamos que lo hemos conseguido.

La técnica de descomposición en Fracciones Parciales garantiza que la fracción $\frac{r(x)}{q(x)}$ puede expresarse como suma de fracciones elementales de los dos siguientes tipos

- I. $\frac{A}{(ax+b)^n}$ con $n \in \mathbb{N}$.
- II. $\frac{Ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Como, de las técnicas anteriores, somos capaces de encontrar primitivas para ambos casos I. y II. estamos en condiciones de encontrar una primitiva para cualquier cociente de polinomios siempre que seamos capaces de descomponer, cosa bastante improbable, el denominador.

A continuación veremos un ejemplo. Para mas detalles de esta técnica consulte un texto.

Ejemplo: Calcular $\int \frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)} dx$.

Solución: Buscamos, por el método de coeficientes indeterminados, A , B y C tales que

$$\frac{5x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+5)}.$$

Sumando las dos fracciones del lado derecho obtenemos

$$\frac{5x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+2x+5)}.$$

Igualando coeficientes en los numeradores se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ 2A + 2B + C &= 6 \\ 5A + 2C &= 2. \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos $A = 2$, $B = 3$ y $C = -4$. De este modo

$$\frac{5x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{2}{(x+2)} + \frac{3x-4}{(x^2+2x+5)}$$

y por lo tanto

$$\int \frac{5x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2+2x+5)} dx = \int \frac{2}{(x+2)} dx + \int \frac{3x-4}{(x^2+2x+5)} dx.$$

Como, por los métodos precedentes, podemos calcular $\int \frac{2}{(x+2)} dx$ y $\int \frac{3x-4}{(x^2+2x+5)} dx$ hemos resuelto el problema.

Ejercicio: Calcular

a)

$$\int \frac{3x+8}{x^3+5x^2+6x} dx.$$

b)

$$\int \frac{3x+7}{x^4-16} dx.$$

c)

$$\int \frac{2x^4+9x^2+x-4}{x^3+4x} dx.$$

1.6. La substitución $x = \tan(\frac{\theta}{2})$.

Comenzamos con un ejemplo.

Ejemplo: Calcular $\int \frac{\cos(\theta) - \sin(\theta)}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} d\theta$.

Solución: Hacemos la substitución $x = \tan(\frac{\theta}{2})$. Entonces usando las fórmulas trigonométricas tenemos

$$\cos(\theta) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

$$\sin(\theta) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

y

$$d\theta = \frac{2}{1 + x^2} dx.$$

Por lo tanto

$$\int \frac{\cos(\theta) - \sin(\theta)}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} d\theta = \int \frac{2(1 - x^2 - 2x)}{(1 - x^2 + 2x)(x^2 + 1)} dx.$$

Esta última integral puede ser evaluada por el método de fracciones parciales lo que termina el ejemplo.

Observación: La substitución $x = \tan(\frac{\theta}{2})$ siempre transforma cuocientes de polinomios en $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ en cuocientes de polinomios en x . Estos últimos pueden ser integrados por fracciones parciales.

Ejercicio: Calcular

a) $\int \frac{1}{\sin(\theta) + \cos(\theta)} d\theta$.

b) $\int \frac{\sin(\theta) + \cos(\theta)}{1 + \sin(\theta) + \cos^2(\theta)} d\theta$.

1.7. Integración por Partes.

Recordemos la regla del producto para derivadas:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

A nivel de primitivas esta regla se vé

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

y en el caso de integrales definidas se tiene

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo: Calcular $\int x \cos(x) dx$.

Solución: En este caso pongamos $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos(x)$. Entonces $f'(x) = 1$ y $g(x) = \sin(x)$. Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos

$$\int x \cos(x) dx = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + C.$$

Ejercicio: Calcular:

- a) $\int x^2 \sin(x) dx$.
- b) $\int x^3 e^x dx$.
- c) $\int \log(x) dx$. Indicación: $\int \log(x) dx = \int 1 \cdot \log(x) dx$ e integre por partes.
- d) $\int \arctan(x) dx$. Indicación: $\int \arctan(x) dx = \int 1 \cdot \arctan(x) dx$ e integre por partes.
- d) $\int \arcsin(x) dx$. Indicación: $\int \arcsin(x) dx = \int 1 \cdot \arcsin(x) dx$ e integre por partes.

Ejemplo: Calcular $\int e^x \cos(x) dx$.

Solución: En este caso pongamos $f(x) = e^x$ y $g'(x) = \cos(x)$. Entonces $f'(x) = e^x$ y $g(x) = \sin(x)$. Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx.$$

Ahora integrando por partes, con $f(x) = e^x$ y $g'(x) = \sin(x)$ en la integral de la izquierda obtenemos

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

Despejando obtenemos

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{1}{2} e^x (\sin(x) + \cos(x)) + C.$$

El método del ejemplo precedente puede ser usado en muchos otros casos, por ejemplo

Ejercicio: Calcular:

- a) $\int \sin(x) \cos(2x) dx$.
- b) $\int e^{-x} \cos(3x) dx$.
- c) $\int \sin(x) \sin(5x) dx$.
- d) $\int \cos(x) \sin(7x) dx$.
- e) $\int e^{-3x} \sin(2x) dx$.

Finalizamos con un ejemplo para integrales definidas.

Ejemplo: Calcular $\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx$ con $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ y $m \neq n$.

Solución: Integrando por partes una vez se tiene

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = \sin(mx) \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} m \cos(mx) \frac{\sin(nx)}{n} dx.$$

Como

$$\sin(mx) \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

se tiene

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = - \int_0^{2\pi} m \cos(mx) \frac{\sin(nx)}{n} dx.$$

Integrando por partes de nuevo tenemos

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = m \cos(mx) \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} m^2 \sin(mx) \frac{\cos(nx)}{n^2} dx.$$

Como

$$m \cos(mx) \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

se tiene

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m^2}{n^2} \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx.$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0$$

ya que $\frac{m^2}{n^2} \neq 1$.

Ejercicio: Calcular:

- a) $\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx$ con $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ y $m \neq n$.
- b) $\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx$ con $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ y $m \neq n$.