Esercizi - settimana del 14 ottobre 2013

Esercizio 1. Si consideri nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ il sottoinsieme $\mathcal{B}$ costituito dai tre vettori $\{(1,2,3),(1,1,2),(1,1,1)\}$

(1) Si provi che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$;
(2) si trovino le coordinate del vettore $(1,-1,1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$;
(3) se $M_{\mathcal{B}}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ è l'applicazione che associa ad ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$, si scriva esplicitamente il valore di $M_{\mathcal{B}}(a_1,a_2,a_3)$.

Esercizio 2. Sia dato in $\mathbb{R}^4$ il sottoinsieme costituito da quattro vettori

$$\mathcal{C}=\{(1,1,2,2),(1,-1,2,1),(1,3,2,3),(1,0,0,0)\}$$

(1) Si trovi un sottoinsieme massimale $\mathcal{D}$ di vettori linearmente indipendenti in $\mathcal{C}$;
(2) si trovi un secondo sottoinsieme massimale $\mathcal{E}\neq\mathcal{D}$ di vettori linearmente indipendenti in $\mathcal{C}$;
(3) si provi che $span\{\mathcal{C}\}=span\{\mathcal{D}\}=span\{\mathcal{E}\}$;
(4) si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ che contenga $\mathcal{D}$;
(5) si trovi un'equazione che descriva il sottospazio vettoriale $span\{\mathcal{C}\}$ di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i due vettori $A_1=(1,2,-1,-2)$ e $A_2=(1,1,1,1)$

(1) Si trovi la dimensione del sottospazio $U=span\{A_1,A_2\}$;
(2) si determini un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$, di dimensione 2, in modo tale che $U\cap V=\{0\}$;
(3) si dica se esiste un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$, di dimensione 3, tale che $U\cap W=\{0\}$;

Esercizio 4. Nello spazio $\mathbb{R}^5$ si considerino i sottoinsiemi U e W definiti da

$$U=\big\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\;\big|\;x_1+x_2+x_3=0\big\}$$
$$W=\mathrm{Span}\,\big\{(1,0,1,0,0),(0,2,0,0,1),(0,-1,0,1,0)\big\}$$

(1) Dire per quale ragione U e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ e calcolarne le dimensioni.
(2) Calcolare una base dell'intersezione $U\cap W$.
(3) Trovare, se esistono, due basi $\mathfrak{B}_1$ di U e $\mathfrak{B}_2$ di W fatte in modo tale che $\mathfrak{B}_1\cap\mathfrak{B}_2$ sia una base di $U\cap W$.

Esercizio 5 $(*)$**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo.

(1) Siano dati quattro coefficienti qualsiasi in $\mathbb{K}$ che indicheremo con $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$. Inoltre poniamo $b_{ij}=a_{ji}$ (cioè, i coefficienti b sono gli stessi dei coefficienti a ma con gli indici scambiati). Dimostrare che i vettori

$$A_1=(a_{11},a_{12}),$$
$$A_2=(a_{21},a_{22})$$

sono linearmente indipendenti se e solo se i vettori

$$B_1 = (b_{11}, b_{12}),$$
$$B_2 = (b_{21}, b_{22})$$

lo sono.

(2) Generalizzare al caso di n vettori in $\mathbb{K}^n$.