

17. POMIAR WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI POWIETRZA.

WYZNACZANIE ŚREDNIEJ DROGI SWOBODNEJ I ŚREDNICY CZĄSTECZEK GAZU
ORAZ LICZBY REYNOLDSA DLA PRZEPŁYWU POWIETRZA PRZESZ KAPILARĘ

Przepływ płynów lepkich

Przez pojęcie płynu rozumie się zarówno ciecze, jak i gazy. Istotną rolę podczas przepływów płynu przez przewody odgrywa jego lepkość, zwana też tarciem wewnętrznym. Powstaje ona na skutek ruchów cieplnych cząsteczek oraz sił międzycząsteczkowych. Wyobraźmy sobie warstwę płynu składającą się z wielu bardzo cienkich warstewek spoczywających względem siebie. Jeżeli przyłożymy jakąś siłę \vec{F} do płytki P pływającej na powierzchni cieczy, to można stwierdzić, że przy odpowiednio dobranej sile płytka ta przesuwa się ruchem jednostajnym. Oznacza to, że między warstewką cieczy zwilżającą płytkę a warstewką znajdującą się niżej powstaje hamująca ruch płytki siła tarcia \vec{T} . Ilustruje to rys. 17.1. Siła tarcia (wynikająca głównie z przenikania cząstek płynu z jednej warstewki do drugiej i przenoszenia przez te cząsteczki pewnego pędu) powoduje wprowadzenie w ruch warstewek cieczy przez poruszającą się płytkę P .

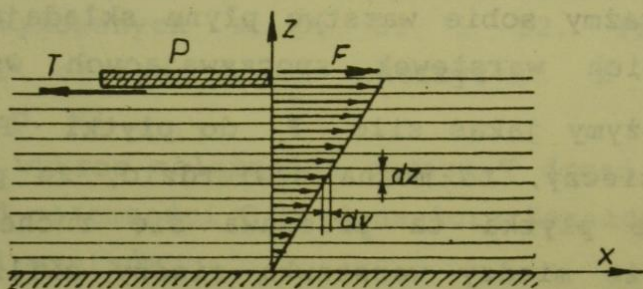
Jak wykazał Newton, jeżeli między dwiema warstwami płynu o powierzchni S odległymi o dz występuje różnica prędkości dv , to siła tarcia wewnętrznego wynosi:

$$\vec{T} = - \eta S \left(\frac{dv}{dz} \right) \frac{\vec{v}}{v} \quad (17.1)$$

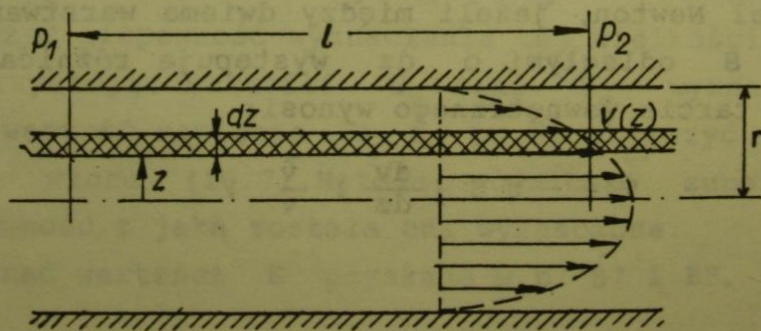
gdzie dv/dz oznacza moduł gradientu prędkości, η - współczynnik lepkości zależny od rodzaju substancji oraz od temperatury i ciśnienia, \vec{v}/v - wersor skierowany w kierunku ruchu warstewki płynu.

Współczynnik lepkości η jest liczbowo równy sile, z jaką trą o sobie dwie warstewki cieczy o powierzchni 1 m^2 , przesuwające się względem siebie z gradientem prędkości $1/\text{s}$. Jednostką współczynnika lepkości jest $[\text{Ns/m}^2] = [\text{kg/sm}]$. Stosowaną dawniej jednostką lepkości był puaz ($1 \text{ P} = 10^{-2} [\text{kg/sm}]$).

Ruch płynu przedstawiony na rys. 17.1, który posłużył do określenia współczynnika lepkości, nazywamy ruchem warstwowym, czyli laminarnym. Nazwa ta pochodzi stąd, że możemy wyróżnić warstewki poruszające się z różnymi prędkościami, w zasadzie nie mieszające się ze sobą.



Rys. 17.1. Schematyczny ruch warstewek płynu spowodowany lepkością



Rys. 17.2. Rozkład prędkości przepływu laminarnego w rurce

Rozpatrzmy przepływ pewnego płynu przez cienką rurkę o długości l , wywołany niewielką różnicą ciśnień $p_1 - p_2 = \Delta p$ na jej końcach. Warstewki tego płynu można potraktować jako bardzo cienkie współosiowe cylindry o grubości dz i promieniu z , przy czym prędkość każdej warstewki jest stała w czasie i wynosi $v(z)$. Ilustruje to rys. 17.2. Między tymi cylindrami występuje tarcie wewnętrzne opisane wzorem Newtona (17.1). Różnica ciśnień Δp powodująca ruch płynu zawartego w walcu o promieniu z odpowiada sile:

$$\vec{F} = \pi z^2 \Delta p \frac{\vec{v}}{v} \quad (17.2)$$

W przypadku gdy $\vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$, wystąpi przepływ stacjonarny. Korzystając z równań (17.1) i (17.2) oraz przyjmując $S = 2\pi z l$ (gdzie l oznacza długość rozpatrywanego odcinka rury), a także zakładając warunek brzegowy $\vec{v}(r) = 0$ (r oznacza promień wewnętrzny rury), łatwo znajdziemy wzór opisujący prędkość płynu w funkcji odległości od środka rury. Ma on postać:

$$v(z) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (r^2 - z^2) \quad (17.3)$$

Całkowita objętość płynu przepływającego laminarnie przez rurkę o długości l w czasie t określona jest równaniem:

$$V = t \int_0^r 2\pi z v(z) dz = \frac{\pi \Delta p r^4}{8\eta l} t \quad (17.4)$$

Równanie to nosi nazwę równania Hagen-Poiseuille'a. Opisuje ono przepływ laminarny nieściśliwego płynu przez rury o sztywnych ściankach. Jednak, jak wykazały badania, można je zastosować nawet w przypadku przepływu krwi przez elastyczne naczynia krwionośne (np. przez silnie rozwiniętą sieć naczyń kapilarnych).

Przy opisie przepływu płynu wprowadza się często pojęcie średniej prędkości przepływu \bar{v} definiowanej z natężenia przepływu J

$$J = \frac{V}{t} = \pi r^2 \bar{v} ,$$

(17.5)

gdzie V - objętość płynu, która przepłynęła przez poprzeczny przekrój rury o promieniu r w czasie t .

Jak łatwo zauważyć z porównania (17.4) i (17.5)

$$\bar{v} = \frac{\Delta p}{8 \eta l} r^2 .$$

(17.6)

Liczba Reynoldsa

Ważnym, bezwymiarowym współczynnikiem charakteryzującym przepływy płynów oraz ruch ciał w płynach jest tzw. liczba Reynoldsa

$$Re = \frac{\rho \bar{v} r}{\eta} ,$$

(17.7)

gdzie ρ oznacza gęstość płynu.

Można wykazać, że Re odpowiada stosunkowi pracy zużytej na przyspieszenie jednostki objętości cieczy do prędkości v do pracy wykonanej dla pokonania sił oporu lepkiego.

Wykorzystując pojęcie Re można stosować tzw. prawo przepływów. Mówi ono, że w przypadku, gdy ruch różnych cieczy płynących z różnymi prędkościami w różnych przewodach jest scharakteryzowany jednakowymi wartościami liczby Reynoldsa, to charakter ruchu tych cieczy jest jednakowy. Podobnie można porównywać ruch ciał różnych rozmiarów poruszających się z różnymi prędkościami w płynach o różnych gęstościach. Prawo to ma podstawowe znaczenie dla eksperymentalnego określania oporów ruchu przy wykorzystywaniu odpowiednich modeli i kanałów. Poza tym wartość Re pozwala rozgraniczyć przypadki przepływów laminarnych ($Re < 1160$) oraz turbulentnych ($Re > 1160$).

Prawo Bernoulliego

Warto jeszcze zauważyć, że do przepływów laminarnych stosuje się prawo Bernoulliego. Prawo to mówi, że w dowolnym punkcie rury suma ciśnienia zewnętrznego p , hydrodynamicznego $\rho v^2/2$ oraz hydrostatycznego $\rho g h$ jest wielkością stałą

$$p + \rho v^2/2 + \rho g h = \text{const} \quad , \quad (17.8)$$

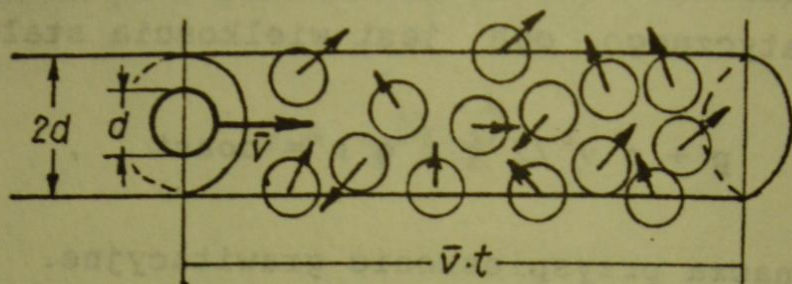
gdzie g oznacza przyspieszenie grawitacyjne.

Zjawiska przenoszenia w gazach

Ruch cząsteczek gazu jest ruchem chaotycznym. Ponieważ w gazach można zaniedbać siły oddziaływania wzajemnego cząsteczek, ich ruch cieplny odbywa się ze stałą prędkością aż do chwili zderzenia z inną cząsteczką. W wyniku tego zderzenia zmienia się raptownie kierunek i wartość prędkości cząsteczki. Do opisu zachowania się cząsteczek można stosować jedynie prawa statystyczne, co oznacza, że musimy posługiwać się pojęciem uśrednionej wartości prędkości cząsteczek, średniej drogi swobodnej (tj. drogi cząsteczki między dwoma kolejnymi zderzeniami), średniej liczby zderzeń, średniej energii itp. Oznacza to też, że w każdym z możliwych kierunków porusza się średnio taka sama liczba cząsteczek (np. w dodatnim kierunku osi x kartezjańskiego układu współrzędnych $1/6$ wszystkich cząsteczek zawartych w zbiorniku). Średnią prędkość poruszania się cząsteczek gazu można obliczyć stosując prawo rozkładu prędkości cząsteczek podane przez Maxwella. Odpowiedni rachunek (który znaleźć można w każdym uniwersyteckim podręczniku fizyki doświadczalnej) prowadzi do wzoru:

$$\bar{v} = \left(\frac{8 R T}{\pi \mu} \right)^{1/2} \quad , \quad (17.9)$$

gdzie T oznacza temperaturę gazu, μ - jego masę molową, R - uniwersalną stałą gazową. Jak widać, średnia prędkość cząsteczek zależy od temperatury gazu i jego rodzaju.



Rys. 17.3. Ilustracja wpływu koncentracji i wymiarów cząsteczek gazu na ich liczbę zderzeń w jednostce czasu t (d - średnica cząsteczki gazu, \bar{v} - jej średnia prędkość)

W celu wyznaczenia średniej drogi swobodnej cząsteczek rozważmy cząsteczkę w kształcie sztywnej kuli o średnicy d poruszającą się z prędkością \bar{v} . Zderza się ona w czasie t z wszystkimi cząsteczkami znajdującymi się wewnątrz walca o średnicy $2d$ i długości $\bar{v}t$. Przedstawia to rys. 17.3. Walec ten jest "wyprostowaną" drogą przebytą w rzeczywistości ruchem zygzakowatym przez cząsteczkę w czasie t . Jeżeli koncentracja cząsteczek wynosi n_0 , to liczba zderzeń Z w czasie t winna wynosić:

$$Z = n_0 \bar{v} t \pi d^2 \quad (17.10)$$

Można wykazać, że uwzględnienie ruchu pozostałych cząsteczek zwiększa liczbę zderzeń o czynnik równy $\sqrt{2}$. Koncentracja cząsteczek wynika z równania stanu gazu doskonałego i wyraża się wzorem:

$$n_0 = N/V = \frac{p}{RT} N_A \quad (17.11)$$

gdzie N oznacza całkowitą liczbę cząsteczek gazu zawartego w objętości V , N_A jest liczbą Avogadra, p - ciśnieniem.

Po uwzględnieniu (17.11) otrzymuje się na średnią drogę swobodną ($\bar{\lambda} = \bar{v} t / Z$) wzór:

$$\bar{\lambda} = \frac{R T}{N_A \sqrt{2} \pi p d^2} \quad (17.12)$$

Liczba zderzeń jakich średnio doznaje cząsteczka w ciągu 1 sekundy nazywa się średnią liczbą zderzeń. Równa się ona:

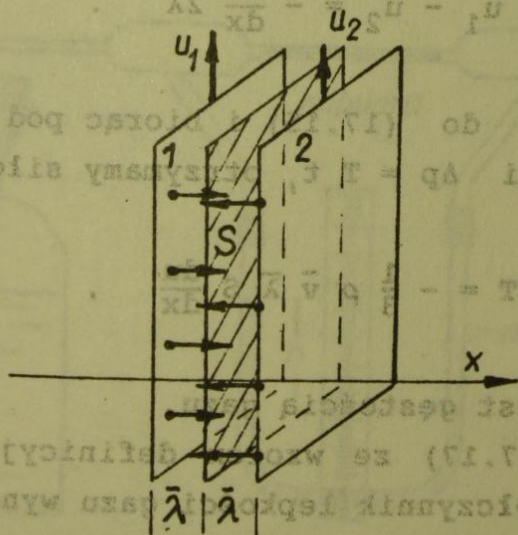
$$\bar{z} = \bar{v} / \bar{\lambda} \quad (17.13)$$

Chaotyczny ruch cieplny cząsteczek umożliwia zaistnienie tzw. zjawisk transportu, związanych z przenoszeniem przez cząsteczki masy, pędu i energii. Do zjawisk tych zaliczamy:

- dyfuzję (transport masy),
- przewodnictwo cieplne (przenoszeniem energii),
- lepkość (związaną z poprzecznym transportem pędu).

Współczynnik lepkości gazu

Korzystając z założeń kinetycznej teorii gazów spróbujemy wykazać, od jakich czynników zależy współczynnik lepkości gazu zdefiniowany wzorem (17.1). W tym celu narysujemy jakąś powierzchnię odniesienia S , prostopadłą do kierunku



Rys. 17.4. Schematyczna wymiana cząsteczek pomiędzy różnymi warstwami płynu

x , względem której poruszają się dwie cienkie warstewki gazu, których prędkości wynoszą u_1 i u_2 . Aby cząsteczki rozpoczynające ruch w warstewce 1 i biegnące w dodatnim kierunku x oraz cząsteczki z warstwy 2 biegnące w ujemnym kierunku osi x dotarły bez zderzeń i zmiany kierunku do powierzchni S przyjmujemy, że znajdują się one w odległości $l \leq \bar{\lambda}$ (rys. 17.4). Przy przejściu jednej cząsteczki o masie m na prawo i jednej cząsteczki o tej samej masie na lewo przez powierzchnię S pęd zmieni się o $\delta p = m u_1 - m u_2$. Liczba cząsteczek docierających z każdej strony do powierzchni S w ciągu czasu t wynosi:

$$n = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} t S \quad (17.14)$$

Zatem całkowita zmiana pędu równa się:

$$\Delta p = \frac{1}{6} m n_0 \bar{v} t S (u_1 - u_2) \quad (17.15)$$

Ze względu na możliwą dla bardzo małych odległości linearyzację funkcji $u = u(x)$ można całkowitą różnicę prędkości warstw 1 i 2 zapisać w formie:

$$u_1 - u_2 = - \frac{du}{dx} 2\bar{\lambda} \quad (17.16)$$

Wstawiając (17.16) do (17.15) i biorąc pod uwagę, że zgodnie z II zasadą dynamiki $\Delta p = T t$, otrzymamy siłę tarcia T :

$$T = - \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} S \frac{du}{dx} \quad (17.17)$$

gdzie $\rho = m n_0$ jest gęstością gazu.

Porównując wzór (17.17) ze wzorem definicyjnym (17.1) możemy stwierdzić, że współczynnik lepkości gazu wynosi:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \quad (17.18)$$

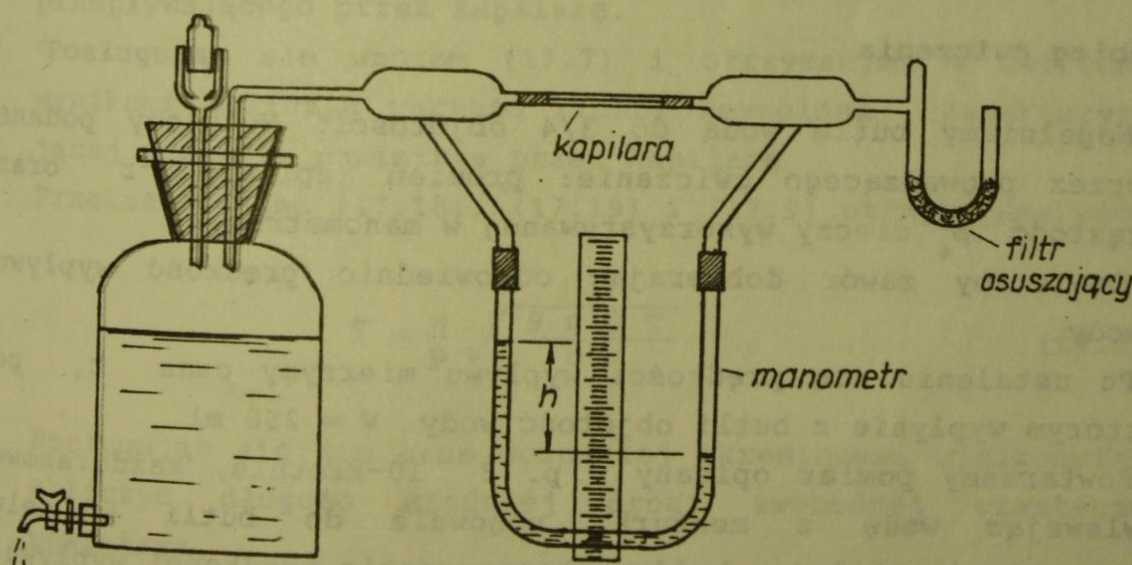
Jeżeli policzyć gęstość gazu z równania stanu gazu doskonałego otrzymamy:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{p \mu}{R T} \quad (17.19)$$

Uwzględniając (17.19), (17.9) i (17.12) we wzorze (17.18) łatwo pokazać, że lepkość gazu zależy jedynie od rodzaju gazu i jego temperatury, a nie zależy od ciśnienia, pod którym on się znajduje.

Opis metody pomiarowej

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie bezwzględnego współczynnika lepkości powietrza, określenie charakteru przepływu gazu przez rurkę kapilarną z wartości liczby Reynoldsa, a także obliczenie z wartości wyznaczonej lepkości średniej drogi swobodnej, średniej liczby zderzeń oraz efektywnej średnicy cząsteczek. Lepkość powietrza wyznaczamy mierząc czas przepływu określonej objętości gazu przez rurkę kapilarną i korzystając z prawa



Rys. 17.5. Schemat układu do pomiaru lepkości powietrza

Hagena - Poiseuille'a. Schemat urządzenia pomiarowego przedstawiono na rys. 17.5. Jeden koniec rurki kapilarnej o znanej długości i średnicy wewnętrznej łączy się z filtrem osuszającym powietrze wciągane do układu oraz jednym z ramion manometru. Drugi koniec kapilary łączy się z drugim ramieniem manometru oraz dużą butlą szklaną zawierającą wodę. Butla zamknięta jest korkiem służącym do napełniania butli wodą. Po otwarciu zaworu przy dnie butli zaczyna z niej wypływać woda do podstawionej menzurki, a na skutek tego obniża się ciśnienie powietrza w butli. W ten sposób zostaje między końcami kapilary wytworzona różnica ciśnień $\Delta p = p_1 - p_2$, którą wyznacza się za pomocą manometru. Jeżeli różnica poziomów cieczy manometrycznej wynosi h , a jej gęstość ρ_c , to

$$\Delta p = h g \rho_c \quad . \quad (17.20)$$

Wartość tę należy wstawić do prawa Hagena - Poiseuille'a wyrażonego wzorem (17.4). Ponieważ wzór ten stosuje się tylko dla niewielkiej różnicy ciśnień oraz przepływu laminarnego płynu, należy w pierwszej kolejności wyznaczyć wartość liczby Reynoldsa, a ponadto dobrać tak prędkość wypływu wody z butli, aby zapewnić takie warunki.

Przebieg ćwiczenia

1. Napełniamy butlę wodą do $3/4$ objętości. Notujemy podane przez prowadzącego ćwiczenie: promień kapilary r oraz gęstość ρ_c cieczy wykorzystywanej w manometrze.
2. Otwieramy zawór dobierając odpowiednio prędkość wypływu wody.
3. Po ustaleniu się prędkości wypływu mierzymy czas t , po którym wypłynie z butli objętość wody $V = 250$ ml.
4. Powtarzamy pomiar opisany w p. 3 10-krotnie, każdorazowo wlewając wodę z menzurki ponownie do butli w celu zapewnienia stałej w każdym eksperymencie prędkości wypływu.
5. Podczas ustalonego wypływu wyznaczamy każdorazowo różnicę poziomów h cieczy w manometrze.

6. Za pomocą barometru i termometru mierzymy ciśnienie atmosferyczne p i temperaturę T w pomieszczeniu, w którym dokonuje się pomiaru lepkości.

Opracowanie wyników

7. Obliczyć gęstość powietrza ρ dla wyznaczonych w p. 6 wartości p i T wg zależności (17.19). Jako masę molową powietrza przyjąć uśrednioną wartość $\mu = 29,0 \cdot 10^{-3}$ [kg/mol].
8. Obliczyć wartości średnie i ich odchylenia standardowe dla wyników uzyskanych w p. 3, 4 i 5.
9. Korzystając z uzyskanych wyników obliczyć natężenie wypływu wody z butli $J = V/t$, jakie obserwowaliśmy w p. 3 i 4.
10. Wykorzystując wzór (17.5) oraz znane wielkości J oraz r obliczyć średnią prędkość \bar{v} przepływu gazu przez kapilarę.
11. Przekształcając (17.6), (17.20) i (17.5) otrzymujemy wzór:

$$\eta = \frac{\pi r^4 h \rho_c g}{8 J l} . \quad (17.21)$$

Wykorzystując powyższy wzór obliczyć lepkość powietrza przepływającego przez kapilarę.

12. Posługując się wzorem (17.7) i otrzymanymi w ćwiczeniu wynikami obliczyć wartość liczby Reynoldsa, charakteryzującej przepływ powietrza przez kapilarę.
13. Przekształcając (17.18), (17.19) i (17.9) otrzymujemy wzór:

$$\bar{\lambda} = \frac{\eta}{p} \sqrt{\frac{9 \pi R T}{8 \mu}} . \quad (17.22)$$

Posługując się nim oraz wcześniej określonymi wielkościami obliczyć długość średniej drogi swobodnej cząsteczek powietrza.

14. Korzystając ze wzoru (17.13) oraz wyznaczonych poprzednio wielkości obliczyć średnią liczbę zderzeń cząsteczek powietrza w jednostce czasu.

15. Przekształcając wzór (17.12) otrzymujemy

$$d = \left(\frac{R T}{N_A \pi p \lambda \sqrt{2}} \right)^{1/2}. \quad (17.23)$$

Wykorzystując powyższy wzór oraz wcześniej wyznaczone wielkości obliczyć średnicę cząsteczek powietrza.

16. Po dokonaniu obliczeń wielkości \bar{v} , Re , η , $\bar{\lambda}$, \bar{z} i d obliczyć niepewności wyznaczenia tych wielkości metodą różniczeki zupełnej lub różniczkowania logarytmicznego. W obliczeniach wykorzystać odchylenia standardowe wyznaczanych doświadczalnie wielkości t oraz h .

17. Porównać otrzymane wartości z danymi tablicowymi.

Literatura uzupełniająca: [42], [65], [70]