1re S

Nouvelle Collection Indice

Maths

PROGRAMME 2011

Sous la direction de :
Michel PONCY
Yves GUICHARD
Marie-Christine RUSSIER

Jean-Louis BONNAFET
René GAUTHIER
Yvette MASSIERA
Denis VIEUDRIN
Jean-François ZUCCHETTA

éco responsable
Bordas

Sommaire

CHAPITRE 1

Le second degré

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Second degré Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.	• Déterminer et utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.	On fait le lien avec les représentations graphiques étudiées en classe de Seconde. ◇ Des activités algorithmiques doivent être réalisées dans ce cadre.

B Notre point de vue

Nous avons choisi de commencer le livre par ce chapitre consacré au second degré, car il fournit des méthodes et des outils que l'on pourra réutiliser dans les chapitres suivants. Après deux paragraphes consacrés à la résolution d'équations et d'inéquations du second degré, le dernier paragraphe reprend ce qui a été vu en Seconde : la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré fournit les coordonnées du sommet de la parabole représentant cette fonction, le coefficient indique dans quel sens est tournée la parabole. La forme canonique permet ainsi de dresser le tableau de variation d'une fonction du second degré. C'est pour cette raison qu'il nous a semblé inutile de proposer dans ce chapitre des démonstrations algébriques du sens de variation d'une fonction du second degré. Il nous semble que nous avons ainsi suivi ce que préconisent les programmes « *On fait le lien avec les représentations graphiques étudiées en classe de Seconde* ».

Les schémas et légendes qui figurent à la page 14 donnent un résumé complet et argumenté des différents cas possibles.

Dans les exercices que nous proposons, lorsqu'il est question de déterminer les variations d'une fonction du second degré, de chercher son maximum ou son minimum, nous considérons que ces informations se déduisent de la forme canonique et des indications qu'elle fournit sur la parabole représentant la fonction en question.

Nous avons veillé à proposer des exercices dans lesquels la réponse n'est possible que si « *l'on choisit la forme adéquate* » de la fonction du second degré.

Des exercices demandent explicitement d'utiliser la calculatrice ; c'est bien sûr un outil de vérification pour la résolution d'équations ou d'inéquations, mais elle peut aussi aider l'élève à comprendre pourquoi certaines techniques sont fausses (par exemple, diviser les deux membres d'une égalité par une expression contenant la variable) parce ce qu'il trouve est en contradiction avec ce qu'il peut lire sur l'écran de sa calculatrice.

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique est préconisée dans certains exercices pour conjecturer des propriétés ou déterminer des ensembles de points.

Nous avons également veillé à proposer quelques exercices qui font intervenir la logique (proposition directe, réciproque ou contraposée), d'autres dans lesquels il faut écrire et faire fonctionner des algorithmes. Les deux TP qui figurent à la fin de ce chapitre utilisent divers outils TICE : calculatrices, logiciel de calcul formel et tableur.

Les notions abordées dans le chapitre 1

1. Équations du second degré
2. Factorisation et signe d'un trinôme
3. Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

C Avant de commencer

Se tester avec des QCM

1 C ; **2** B ; **3** A ; **4** C ;
5 B et C ; **6** C et D ; **7** C.

Se tester avec des exercices

8 **a.** $A(x) = x(6x - 5)$.
b. $B(x) = (4x - 3)^2$.
c. $C(x) = (x - 7)(x + 3)$.

9 **a.** $x = 0$ ou $x = \dfrac{5}{3}$.
b. $x = 7$.
c. $x = \sqrt{13}$ ou $x = -\sqrt{13}$.
d. $x = -5$ ou $x = 1$.
e. $x = -1$ et $x = -9$.
f. Pas de solution.

10 **a.** $\left[-6\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right]$. **b.** $]-3\ ;0[$. **c.** $]-\infty\ ;-12] \cup [-8\ ;+\infty[$.

11 **a.** f est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$ et croissante sur $[0\ ;+\infty[$.
b. g est croissante sur $]-\infty\ ;0]$ et décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.
c. h est décroissante sur $]-\infty\ ;-2]$ et croissante sur $[-2\ ;+\infty[$.
d. k est décroissante sur $]-\infty\ ;1]$ et croissante sur $[1\ ;+\infty[$.

D Activités

Activité 1 La méthode d'Al-Khawarizmi

Cette activité a pour but d'introduire la forme canonique en proposant une méthode attribuée à Al- Khawarizmi.

1. L'aire du carré est $(x+5)^2$ ou encore $x^2+5x+5x+25$, soit $x^2 + 10x + 25$. On obtient : $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$. Comme par hypothèse, $x^2 + 10x = 39$ alors on peut écrire : $39 = (x + 5)^2 - 25$, soit $(x + 5)^2 = 64$. Ainsi $x+5=8$ ou $x+5=-8$. Les deux solutions sont 3 et –13.

2. a. $x^2 + 12x = 45$ si $(x+6)^2 - 36 = 45$, soit $(x+6)^2 = 81$. On obtient ainsi $x + 6 = 9$ ou $x + 6 = -9$, soit deux solutions 3 et –15.
b. $x^2 + 4x - 32 = (x + 2)^2 - 4 - 32 = (x + 2)^2 - 36$.
Ainsi $x^2 + 4x - 32 = 0$ si $(x + 2 + 6)(x + 2 - 6) = 0$, soit $(x + 8)(x - 4) = 0$. Les deux solutions sont –8 et 4.

Activité 2 Observation de paraboles

Cette activité a pour but d'introduire le discriminant d'un polynôme f du second degré et de montrer le lien entre le signe de Δ et le nombre de solutions de l'équation f (x)= 0. Ici on utilise la calculatrice pour visualiser le nombre de solutions, qui sont les abscisses des points d'intersection de la parabole représentant f avec l'axe des abscisses.

	a	b	c	Δ	N
$f(x)$	3	2	–5	64	2
$g(x)$	–9	13	10	529	2
$h(x)$	6	5	0	25	2
$k(x)$	5	1	3	–59	0
$j(x)$	2	–8	8	0	1

Activité 3 Avec des polynômes du second degré

Les élèves savent maintenant déterminer la forme canonique d'un polynôme du second degré. On se propose ici d'établir que l'on peut ainsi, dans certains cas, en déduire la forme factorisée de ce polynôme et étudier son signe.

1. $f(x) = (x+4)^2 - 1 = (x+5)(x+3)$. À l'aide d'un tableau de signes, on en déduit que $f(x)$ est positif si $x < -5$ ou $x > -3$, négatif si x est compris entre –5 et –3.

2. $g(x) = -(x-3)^2 + 16 = (4 + x - 3)(4 - x + 3)$, soit $g(x) = (x+1)(-x+7) = -(x+1)(x-7)$. On en déduit que $g(x)$ est positif si x compris entre –1 et 7, négatif si $x < -1$ ou $x > 7$.

3. $h(x) = (4x+1)^2$, donc $h(x)$ est positif ou nul pour tout réel x.

4. $k(x) = 3(x+1)^2 + 1$. On peut en déduire que $k(x)$ est strictement positif pour tout réel x.

Activité 4 Des paraboles qui changent de forme

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 01S_activite4a.ggb, 01S_activite4b.ggb et 01S_activite4c.ggb (Geogebra). *Dans chacun des cas, on a créé un curseur qui permet d'animer la figure et de conjecturer les résultats que l'on va ensuite démontrer.*

L'objectif est d'établir le lien entre la parabole et les coefficients a, b et c de la fonction polynôme associée. Cette activité permet d'introduire le dernier paragraphe du cours et de visualiser les propriétés qui vont être présentées. ***Nous proposons aussi sur le site un fichier Geogebra et un fichier Geoplan regroupant les 3 courbes : 01S_activite4.ggb (Geogebra)et 01S_activite4.g2w (Geoplan).***

1. Lorsque c varie, les paraboles se « déplacent verticalement ». En effet, les sommets de ces parabole ont tous la même abscisse $x = -1$. Les sommets des paraboles appartiennent à la droite d'équation $x = -1$.

2. Lorsque b varie, les paraboles se déplacent en gardant la même forme ; elles sont toutes tournées vers le haut, conservent le même écartement. Elles coupent deux fois l'axe des abscisses lorsque $b < -2$ ou $b > 2$; elles sont tangentes à l'axe des abscisses lorsque $b = 2$ ou $b = -2$. Pour b compris entre –2 et 2, elles ne coupent pas l'axe des abscisses. Elles passent toutes par le point de coordonnées (0 ; 1).

3. Lorsque a varie, les paraboles changent de forme. Lorsque a est positif, elles sont tournées vers le haut ; lorsque a est négatif, elles sont tournée vers le bas. Elles passent toutes par le point de coordonnées (0 ; –1). Si $a > -4$, elles coupent deux fois l'axe des abscisses. Si $a < -4$, elles ne coupent pas l'axe des abscisses. Si $a = -4$, la parabole est tangente à l'axe des abscisses.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 **1.** Équations du second degré : **a**, **d**, **e**.

2 **a.** $f(x) = x^2 + 6x - 9$. $a = 1$, $b = 6$, $c = -9$.
b. $f(x) = 4x^2 + 13x + 8$. $a = 4$, $b = 13$ et $c = 8$.
c. $f(x) = 36x^2 + 12x - 12$, $a = 36$, $b = 12$ et $c = -12$.
d. $f(x) = 8x^2 - 3x - 15$, $a = 8$, $b = -3$ et $c = -15$.
e. $f(x) = 3x^2 - 6x - 5$, $a = 3$, $b = -6$ et $c = -5$.

3 $f(x) = (x+2)^2 - 3$; $g(x) = (x-3)^2 - 16$; $h(x) = (x+6)^2$; $k(x) = (x-1)^2 + 2$.

4 $f(x) = 2(x+3)^2 - 23$; $g(x) = -(x-1)^2 + 6$; $h(x) = -(x+1)^2 + 17$; $k(x) = (x+4)^2 - 16$.

5 **a.** 16 ; **b.** 9 ; **c.** 49 ; **d.** 124 ; **e.** 233 ; **f.** 64.

6 **a.** 1 et –3 ; **b.** –1 et –2 ; **c.** –1 et 3 ; **d.** 0 et 9 ; **e.** L'équation n'a pas de solution.

7 **a.** pas de solution **b.** –2 et –10 **c.** $\frac{7}{3}$
d. –9 et 5 **e.** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

8 On résout l'équation $n(n+1) = 702$, soit $n^2 + n - 702 = 0$. Les entiers consécutifs sont 26 et 27 ainsi que –27 et –26.

9 $A(x) = (x+3)^2$; $B(x) = 4x(x+2)$; $C(x) = -(x-5)(x+3)$; $D(x) = (x+7)(x+11)$.

10 $E(x) = (x-1)(x+9)$; $F(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)(x-2)$; $G(x)$ ne se factorise pas ; $H(x) = (4x-5)(4x+5)$.

11 $f(x)$ est positif ou nul si $x \leqslant -6$ ou $x \geqslant 4$, négatif sinon.
$g(x)$ est toujours strictement positif.
$h(x) = (3x+1)^2$ donc toujours positif, nul pour $x = -\frac{1}{3}$.
$j(x)$ est positif ou nul si $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 0$, négatif sinon.

12 $f(x)$ est positif ou nul si $x \leqslant \frac{1}{3}$ ou $x \geqslant 1$, négatif sinon.
$g(x)$ est toujours strictement positif.
$h(x)$ est positif ou nul si $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 2$, négatif sinon.

13 **a.** $x \leqslant -10$ ou $x \geqslant 1$. **b.** Pas de solution.
c. Pas de solution.

14 **a.** $\mathbb{R}$. **b.** $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 9$. **c.** $-6 < x < 0$.

15 Le coefficient de x^2 est positif ; le discriminant est positif.

16 f est représentée par $\mathcal{P}_1$, g est représentée par $\mathcal{P}_2$.

17 f est décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$. La parabole représentant f a pour sommet le point S(1 ; – 9).

18 La parabole représentant f a pour sommet le point S(3 ; –4). $f(x) = 0$ si $x = 1$ ou $x = 5$.

POUR S'ENTRAÎNER

19 **a.** $f(x) = 6(x+1)^2 - 11$; **b.** $g(x) = -2(x-2)^2 + 8$;
c. $h(x) = 3\left(x - \dfrac{1}{6}\right)^2 + \dfrac{71}{12}$; **d.** $j(x) = -5(x-1)^2 + 2$.

20 **a.** $f(x) = 3\left(x + \dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{37}{12}$; **b.** $g(x) = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{81}{4}$;
c. $h(x) = -8\left(x + \dfrac{1}{8}\right)^2 + \dfrac{57}{8}$; **d.** $j(x) = -2\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{57}{8}$.

21 **a.** $(x) = 4\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - 3$; **b.** $g(x) = 9(x-2)^2 + 1$;
c. $h(x) = -3x^2 + 3$; **d.** $j(x) = 2(x+2)^2 + 18$.

22 **a.** $\Delta = \dfrac{5}{3}$; **b.** $\Delta = 121$; **c.** $\Delta = 97$; **d.** $\Delta = 7$.

23 **a.** $\Delta = 25$; **b.** $\Delta = -80$; **c.** $\Delta = 0$; **d.** $\Delta = 217$.

24 **a.** $-\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{3}{5}$; **b.** 0 et 16 ; **c.** –3 et 5 ; **d.** 0 et $\dfrac{7}{2}$;
e. Pas de solution.

25 **a.** $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{7}{2}$; **b.** 8 et $-\dfrac{9}{2}$, **c.** $-\dfrac{1}{4}$ et 2 ; **d.** Pas de solution ;
e. 1 et 11.

26 **a.** –3 ; **b.** –15 et 5 ; **c.** Pas de solution ; **d.** $\dfrac{7}{4}$;
e. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

27 **a.** $\dfrac{13-\sqrt{145}}{12}$ et $\dfrac{13+\sqrt{145}}{12}$; **b.** – 9 et $\dfrac{2}{13}$;
c. Pas de solution ; **d.** 0 et $\dfrac{6}{5}$; **e.** 0 et $\dfrac{13}{57}$.

28 **a.** $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$; **b.** 0 et 5 ; **c.** Pas de solution ;
d. –2 et $-\dfrac{11}{7}$; **e** . 4 et $-\dfrac{2}{9}$.

30 **a.** $-\dfrac{49}{11}$ et 5 ; **b.** $-\dfrac{17}{4}$ et 5.

31 **a.** –8 et $-\dfrac{17}{9}$; **b.** $-\dfrac{9}{5}$ et 3 ; **c.** $\dfrac{27-5\sqrt{33}}{16}$ et $\dfrac{27+5\sqrt{33}}{16}$;
d. 4.

32 Algorithme :

Saisir a, b, c
Afficher $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$
Afficher $\beta = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

33 Les solutions de l'équation sont $\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$. Avec la commande **Solve** on obtient deux valeurs approchées de ces solutions : –3,305 et 0,302.

34 Après transformation, on obtient : $2x^2 - 24x + 20 = 0$.
Solutions : $6+\sqrt{26}$ et $6-\sqrt{26}$.
Avec **Solve** : 11,09 et 0,9.

35 $x^2 + 4x + 4 = 0$, soit $(x+2)^2 = 0$. Solution : –2.

36 Les équations **a.** et **c.** ont les mêmes solutions.

37 L'autre solution est $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

38 $c = -12$. L'autre solution est 4.

39 $\Delta = 9 - 36a$, donc si $a = \dfrac{1}{4}$ l'équation admet une unique solution : – 6.

40 $\Delta = 169 - 4a$, donc l'équation a deux solutions distinctes si $a < \dfrac{169}{4}$.

41 $\Delta = b^2 - 20$, donc l'équation n'a pas de solution si $-2\sqrt{5} < b < 2\sqrt{5}$.

42 $\Delta = b^2 + 24$ toujours strictement positif, donc il y a toujours deux solutions.

43 $\Delta = 1 + 4c$, donc $\Delta < 0$ si $c < -\dfrac{1}{4}$.

44 Algorithme :

Saisir a, b ,c
d prend la valeur $b^2 - 4ac$
si $d < 0$
alors afficher « pas de solution »
si $d = 0$
alors afficher « une solution »
si $d > 0$
alors afficher « deux solutions »
Fin si

TI	CASIO
même programme avec « prompt » pour rentrer des valeurs et « disp » pour afficher	? $\mapsto A$? $\mapsto B$? $\mapsto C$ B^2 – 4 × A × C $\mapsto D$ If D < 0 Then « pas de solution » Else If D = 0 Then « une solution » Else If D > 0 Then « deux solutions » If end

45 **a.** L'énoncé est faux, on le prouve à l'aide d'un contre-exemple : $x^2 + 2x - 3$ et $2x^2 + 4x - 6$ ont les mêmes racines mais sont deux polynômes distincts.
L'énoncé réciproque est « si deux polynômes sont égaux, ils ont les mêmes racines », vrai.
b. L'énoncé est vrai, l'énoncé réciproque également.

46 **a.** $\Delta = b^2 - 4ac$, donc si a et c sont de signes contraires, alors $ac > 0$ et Δ est positif. Donc la proposition est vraie.

b. La proposition réciproque est fausse, contre exemple : l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$ admet deux solutions ; pourtant a et c sont de même signe.

c. Énoncé de la contraposée : « si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution, alors a et c sont de même signe ». Vrai car si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors $4ac > b^2$ et donc nécessairement le produit ac est strictement positif, ce qui signifie que a et c sont de même signe.

47 Faux, la forme canonique est $4\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + 9$.

48 Vrai, $\Delta = -456$.

49 Vrai car $\Delta > 0$ puisque a et c sont de signes contraires.

50 Faux. Par exemple : $x^2 + 2x - 3$ et $2x^2 + 4x - 6$ ont les mêmes racines.

51 On détermine les réels positifs x et y tels que : $x + y = 24$ et $xy = 135$.
On résout l'équation : $x(24 - x) = 135$
soit : $-x^2 + 24x - 135 = 0$. On obtient : $x = 15$ et $y = 9$.

52 $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{58}{21}$ soit $21x^2 - 58x + 21 = 0$.
Les réels sont : $\dfrac{3}{7}$ et $\dfrac{7}{3}$.

53 $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{89}{40}$ soit $40x^2 - 89x + 40 = 0$.
Les fractions sont $\dfrac{5}{8}$ et $\dfrac{8}{5}$.

54 $(a - 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2 = 1\,877$ soit $a^2 = 625$.
Les entiers sont 24, 25 et 26.

55 $(a - 2)^2 + (a - 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2 = 42(a + 2)$
soit $4a^2 - 46^2 - 78 = 0$. $\Delta = 841$. La solution entière de cette équation est $a = 13$ (l'autre solution est $-\dfrac{3}{2}$).
Les entiers cherchés sont donc : 11, 12, 13, 14 et 15.

56 On cherche les nombres positifs a et b tels que : $a + b = 46$ et $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 80$. On est conduit à résoudre le système : $a + b = 46$ et $a^2 + b^2 = (80 - 46)^2 = 1\,156$. On pose $b = 46 - a$, on obtient : $a^2 - 46a + 480 = 0$. Soit $a = 16$ ou $a = 30$.
Les côtés de ce triangle mesurent : 16, 30 et 34.

57 On cherche a et b tels que : $a + b = 58$, on suppose $a > b$ alors $ab + a = 814$.
On obtient : $a(58 - a) + a = 814$ soit $a^2 - 59a + 814 = 0$.
Les solutions de cette équation sont 36 et 22. Si $a = 22$, $b = 36$ ce qui convient. Si $a = 22$ alors $b = 37$, ce qui ne convient pas.

58 Il faut résoudre l'équation : $10\,l^2 - 220\,l + 100 = 0$.
$\Delta = 444$. On obtient $l = 11 - \sqrt{111}$ ou $l = 11 + \sqrt{111}$.

59 Le nombre n de participants est la solution positive de l'équation $\dfrac{n(n-1)}{2} = 325$.
Soit $n^2 - n - 650 = 0$. $\Delta = 2\,601$ et $n = 26$.

60 **2. a.** Il faut résoudre l'équation $\dfrac{n(n-3)}{2} = n$ soit $n^2 - 5n = 0$. La solution qui convient est $n = 5$.

2. b. Il faut résoudre l'équation $\dfrac{n(n-3)}{2} = 9$, soit $n^2 - 3n - 18 = 0$. La solution qui convient est $n = 6$.

2. c. Il faut résoudre l'équation $\dfrac{n(n-3)}{2} = 434$, soit $n^2 - 3n - 868 = 0$. La solution qui convient est $n = 31$.

61 Il s'agit de trouver deux réels a et b tels que :
$$\frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} \text{ et } \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} = \frac{3}{2}$$
soit $a + b = 5$ et $a + b = 3ab$. En remplaçant b par $5 - a$, on obtient $5 = 3a(5 - a)$ soit l'équation :
$3a^2 - 15a + 5 = 0$. D'où $a = \dfrac{15 + \sqrt{165}}{6}$ et $b = \dfrac{15 - \sqrt{165}}{6}$.

62 Si n désigne le nombre de bancs et p le nombre de personnes par banc , on a :
$$np = 800 \text{ et } (n - 20)(p + 2) = 800.$$
En exprimant p en fonction de n, on obtient l'équation :
$$2n^2 - 40n - 16\,000 = 0.$$
La solution qui convient est $n = 100$. Il y a 8 personnes par banc.

63 Soit n le nombre de personnes devant se présenter et p la part de chacun. L'énoncé se traduit par : $np = 380$ et $(n - 6)(p + 4{,}80) = 480$. En exprimant p en fonction de n, on obtient l'équation : $4{,}80n^2 - 28{,}8n - 2\,280 = 0$ soit $n^2 - 6n - 475 = 0$. La solution positive de cette équation est $n = 25$. 25 personnes devaient se présenter et chacun devait recevoir 15,20 €.

64 Il s'agit de résoudre l'équation :
$1\,075 = n(n - 5) + (n - 10)$ soit $n^2 - 4n - 1\,085 = 0$.
On obtient $n = 35$.

65 L'équation se ramène à : $x^2 + 9x - 27 = 0$, solutions $\dfrac{-9 - 3\sqrt{21}}{2}$ et $\dfrac{-9 + 3\sqrt{21}}{2}$.

66 On obtient : $\dfrac{x^2 - 8x + 16}{x - 3} = 0$ soit $(x - 4)^2 = 0$, $x = 4$.

67 Après réduction, on obtient : $\dfrac{x^2 - 42x - 88}{7x + 35} = 0$, les solutions sont $x = -2$ et $x = 44$.

68 Après réduction, on obtient $\dfrac{9x^2 - 50x - 176}{24x - 48} = 0$, d'où $x = 8$ ou $x = -\dfrac{22}{9}$.

69 On factorise par x. Solutions $x = 0$ ou $x = -2$ ou $x = 3$.

70 Les quatre solutions sont : -2, $-\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{2}{3}$ et 7.

71 En exprimant y en fonction de x, on obtient : $x^2 + (5 - x)^2 = 13$, soit $x = 2$ ou $x = 3$. Les couples solutions sont : (2 ; 3) et (3 ; 2).

72 **a.** $(x + 2)(5x - 4)$; **b.** Pas de factorisation ;
c. Pas de factorisation ; **d.** $(2x + 9)^2$; **e.** $(x + 3)(5x - 4)$.

73 **a.** $-(x - 1)(3x - 4)$; **b.** $(-x + 1)(2x - 9)$;
c. $\Delta = 3\,159$, les racines sont $-3 - \sqrt{789}$ et $-3 + \sqrt{789}$ d'où la factorisation $\frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2)$;
d. $-(x - 1)(x - 6)$; **e.** $(x - 6)(x - 8)$.

74 **a.** Pas de factorisation ; **b.** $(x - 5)^2$;
c. Pas de factorisation ; **d.** $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$; **e.** $(7x - 5)(-3x + 9)$.

75 $(x - 1)(x - 4)$.

76 $(x - 6)^2$.

77 $x^2 - 3x - 10$ ou $2x^2 - 6x - 20$.

78 $\frac{1}{2}(x - 1)(x - 2) = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$.

79 **1.** $f(x) = (x - 1)(x + 3)$.
2. $(x - 1)(x + 3) = 3(x - 1)(x + 9)$, soit $(x - 1)(-2x - 24) = 0$. Les solutions sont $x = 1$ et $x = -12$.
3. et **4.** La calculatrice montre que l'équation $f(x) = 3(x - 1)(x + 9)$ a deux solutions car les courbes représentatives des deux fonctions se coupent deux fois. Cela peut aider les élèves à comprendre que si l'on simplifie par $(x - 1)$ l'équation $(x - 1)(x + 3) = 3(x - 1)(x + 9)$ on oublie une solution.
Cet exercice a pour but de les aider à remettre en cause cette procédure qui conduit à une erreur.

80 L'exercice repose sur la même idée.
$7x^2 - 6x - 16 = (x - 2)(7x + 8)$. La calculatrice montre que l'équation $7x^2 - 6x - 16 = -2x + 4$ admet deux solutions. La résolution algébrique le confirme :
$(x - 2)(7x + 8) = -2(x - 2)$ équivaut à :
$(x - 2)(7x + 10) = 0$. Les solutions sont 2 et $-\frac{10}{7}$.

81 Vrai. Le polynôme se factorise car il admet deux racines ($\Delta = 25 + 24 = 49$).

82 Faux. $(3x - 6)(3x + 3) = 9(x - 2)(x + 1)$.

83 Faux, démonstration par l'absurde. Si le polynôme admet trois racines distinctes, il peut s'écrire sous forme factorisée : $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Quand on développe ce produit, on obtient un polynôme de degré 3.

84 **a.** $f(x)$ positif ou nul sur $]-\infty\,;-13] \cup [1\,;+\infty[$, strictement négatif sur $]-13\,;1[$.
b. $g(x)$ positif ou nul sur $]-\infty\,;-8] \cup [0\,;+\infty[$, strictement négatif sur $]-8\,;0[$.
c. $h(x)$ est positif pour tout réel x, nul si $x = 3$.
d. $j(x)$ est strictement positif pour tout réel x.

85 **a.** $-2(x + 3)^2$ donc toujours négatif ou nul ;
b. $g(x) = (x - 1)(4x - 5)$ donc $g(x)$ est positif ou nul sur $]-\infty\,;-1] \cup \left[\frac{5}{4}\,;\,+\infty\right[$, strictement négatif sur $\left]1\,;\,\frac{5}{4}\right[$.
c. $h(x) = -(x - 5)(2x + 1)$ donc $h(x)$ strictement positif sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,5\right[$, négatif sinon.
d. $j(x) = -x(4x + 9)$ donc $j(x)$ strictement positif sur $\left]-\frac{9}{4}\,;\,0\right[$, négatif sinon.

86 **a.** $f(x) = -(6x - 1)^2$ donc négatif pour tout x distinct de 6, nul si $x = 6$.
b. $g(x)$ ($\Delta = -11$) donc $g(x)$ est strictement négatif pour tout réel x.
c. $h(x) = x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$ donc positif, nul pour $x = 4$.
d. $j(x) = 48x^2 + 10x + 13$, le discriminant est négatif donc $g(x)$ est strictement positif pour tout réel x.

87 **a.** $]-\infty\,;3[\cup]4\,;+\infty[$; **b.** $\left[\frac{3}{2}\,;\,4\right]$;
c. $]-\infty\,;-8] \cup [0\,;+\infty[$; **d.** $4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 > 0$;
e. $(2x - 3)^2 \leqslant 0$. Le réel $x = \frac{3}{2}$ est la seule solution.

88 **a.** $\left[-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\right]$; **b.** Pas de solution ; **c.** $]-1\,;7[$;
d. $2x^2 + 8x - 10 \geqslant 0$ d'où $S =]-\infty\,;-5] \cup [1\,;+\infty[$;
e. $]-\infty\,;-3] \cup \left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

89 **a.** $9x^2 - x + 4 > 0$ tout réel x est solution ;
b. $]-13\,;1[$;
c. $(-14x - 2)(-4x + 4) > 0$ soit $S = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{7}\right] \cup [1\,;+\infty[$;
d. $11x^2 + 6x - 17 \leqslant 0$ soit $S = \left[-\frac{17}{11}\,;\,1\right]$;
e. $(2x + 9)(2x - 9) > 0$ soit $S = \left]-\infty\,;\,-\frac{9}{2}\right[\cup \left]\frac{9}{2}\,;\,+\infty\right[$.

91 **a.** $5x^2 - x + 14 > 0$, pas de solution (discriminant négatif).
b. $11x(11x - 6) \leqslant 0$ d'où $S = \left[0\,;\,\frac{6}{11}\right]$.
c. $14x^2 - 12\sqrt{3}x - 6 \leqslant 0$ d'où $S = \left[-\frac{\sqrt{3}}{7}\,;\,\sqrt{3}\right]$.

92 $x^2 + 9 < 0$; $-x^2 - 1 > 0$.

93 $-(x - 4)(x + 2) > 0$ soit $-x^2 + 2x + 8 > 0$.

94 $2(x - 3)(x - 5) = 2x^2 - 16x + 30 \geqslant 0$.

95 Pour que cette inéquation n'ait pas de solution, il faut que le discriminant soit strictement négatif ; c'est-à-dire que $a^2 - 16$ doit être négatif. Il faut donc que a soit strictement compris entre -4 et 4.

97 **1.** La proposition contraposée est : « si $\Delta \geqslant 0$ alors il existe un réel x tel que $f(x)$ positif ou nul. »
2. La proposition $\mathcal{P}$ est vraie car si $f(x) < 0$ pour tout réel x cela signifie que $f(x)$ n'admet pas de racine (donc $\Delta < 0$) et que le coefficient de x^2 est négatif. Ce qui signifie d'ailleurs que la proposition contraposée est vraie.
3. La proposition réciproque est « si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x, $f(x)$ est strictement négatif ». Cette proposition est fausse, un contre exemple le prouve. Le polynôme $f(x) = x^2 + x + 9$ a un discriminant négatif mais $f(x)$ est positif pour tout réel x.

98 Faux, $1\,000x^2 - 1$ est négatif si x est compris entre $\dfrac{-1}{10\sqrt{10}}$ et $\dfrac{+1}{10\sqrt{10}}$.

99 Vrai car si $f(x) = 10x^2 - 3x + 5$, $f(x)$ est strictement positif pour tout réel x ($\Delta < 0$) donc $10x^2 - 3x > -5$ pour tout x.

100 $6x^2 - 11x > 2$ si $6x^2 - 11x - 2$ positif c'est-à-dire si $(6x+1)(x-2)$ positif. Or $(6x+1)(x-2)$ positif pour $x < -\dfrac{1}{6}$ ou pour $x > 2$. Donc, si on prend par exemple $x = -\dfrac{1}{7}$ alors $6x^2 - 11x < 2$. Ce qui prouve que l'affirmation est fausse.

101 $5x^2 > 3x + 14$ si $5x^2 - 3x - 14 > 0$
or $5x^2 - 3x - 14 = (x-2)(5x+7)$ donc ce polynôme est positif si $x > 2$ ou $x < -\dfrac{5}{7}$. Donc l'affirmation est vraie.

102 **a.** Axe de symétrie : $x = 3$, sommet $(3\,;-8)$.
b. Axe de symétrie : $x = -\dfrac{5}{2}$, sommet $\left(-\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{25}{2}\right)$.
c. Axe de symétrie : $x = \dfrac{5}{2}$, sommet $\left(\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{41}{4}\right)$.
d. Axe de symétrie : $x = 1$, sommet $(1\,;1)$.

103 Le sommet de $\mathcal{P}$ est le point $(-1\,;2)$ donc $\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses car elle est tournée vers le haut ($a = 1$).

104 La parabole $\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses car $\Delta < 0$. Comme elle est tournée vers le haut, elle est toujours située au-dessus de l'axe des abscisses.

105 $25x^2 - 10x + 1 = (5x-1)^2$ donc la parabole $\mathcal{P}$ est située au-dessus de l'axe des abscisses et elle est tangente à l'axe des abscisses au point $x = \dfrac{1}{5}$.

106 Le polynôme $-6x^2 + 11x + 2$ a deux racines $-\dfrac{1}{6}$ et 2. Donc la parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $-\dfrac{1}{6}$ et 2. Elle est située au-dessus de l'axe des abscisses pour x compris entre $-\dfrac{1}{6}$ et 2, au-dessous sinon.

107 La parabole a un seul point d'intersection avec (Ox) si $\Delta = 0$ c'est-à-dire si $36 - 4a = 0$. Ce qui donne $a = 9$.

109 Les coordonnées des points d'intersection sont $(-2\,;0)$ et $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{7}{9}\right)$. Pour déterminer la position relative des deux paraboles, on étudie le signe de la différence : $(x^2 + 2x) - (-2x^2 - 3x + 2) = 3x^2 + 5x - 2$. La parabole $\mathcal{P}$ est au-dessus de la parabole $\mathcal{P}'$ si $x < -2$ ou $x > \dfrac{1}{3}$.

110 **1.** a est positif, le discriminant également.
2. a est négatif, le discriminant également.

111 A correspond à $\mathcal{P}_4$ B : $\mathcal{P}_1$ C : $\mathcal{P}_2$ D : $\mathcal{P}_3$

112 La parabole située sur la gauche a pour équation : $y = 2(x+1)^2 + 1$. La parabole de droite a pour équation $y = -(x-2)^2 + 3$.

113 L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions -15 et 20. La fenêtre étant mal choisie, ces solutions n'apparaissent pas à l'écran. Exemple de fenêtre adaptée :
Xmin = –20, Xmax = 25, Ymin = –20, Ymax = 30.

114 $y = -\dfrac{3}{16}(x+1)^2 + 5$.

115 $y = -2\,(x+2)(x-6)$.

116 $y = ax^2 + bx + c$ avec $c = 1$, $4a + 2b = -10$ et $4a - 2b = -14$. On obtient $a = -3$ et $b = 1$
d'où $y = -3x^2 + x + 1$.

117 $f(x) = a(x-7)^2 + 11$ avec a négatif.

118 $f(x) = a(x+5)^2 - 9$ avec a positif.

119 $f(x) = -(x-1)^2 - 9$ donc f admet un maximum -9 pour $x = 1$.

120 $f(x) = 3\left(x + \dfrac{7}{3}\right)^2 - \dfrac{100}{3}$ donc f admet un minimum $-\dfrac{100}{3}$.

122 Le javelot part à 2 mètres de haut. La hauteur maximale atteinte est 17 m (au bout $t = \sqrt{3}$ secondes) et le vol dure $\dfrac{5\sqrt{3} + \sqrt{85}}{5}$ secondes soit environ 3,58 secondes.

123 **1.** L'énoncé direct et sa réciproque sont vrais.
2. L'énoncé est faux ; on le montre à l'aide d'un contre-exemple. Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $c > 0$ et la parabole qui représente f est au-dessous de l'axe des abscisses pour x compris entre 1 et 2. Par contre, l'énoncé réciproque est vrai : si la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est au-dessus de l'axe des abscisses alors $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$ soit $c > \dfrac{b^2}{4a}$ ce qui entraîne que c est positif.

124 ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 01S_exercice124.ggb (Geogebra) et 01S_exercice124.g2w (Geoplan).***
1. On trace la parabole d'équation $y = 2x + 5x + 4$, on définit un curseur a variant de –5 à 10 et on trace la

droite d'équation $y = ax + 2$. En faisant varier a, on constate qu'il y a trois cas possibles.

2. Soit l'équation $2x^2 + (5 - a)x + 2 = 0$, on calcule Δ, on obtient $\Delta = a^2 - 10a + 9$.

Par conséquent, si $a < 1$ ou $a > 9$, Δ est positif : la parabole et la droite ont deux points d'intersection. Si $a = 1$ ou $a = 9$, il n'y a qu'un point d'intersection. Si $1 < a < 9$, la droite et la parabole n'ont pas de point d'intersection.

125 Faux, le sommet est $\left(-\dfrac{3}{2}\ ;\ -\dfrac{9}{2}\right)$.

126 Vrai car -9 et 1 sont les racines de $-2x^2 - 16x + 18$ et $a < 0$.

127 Faux, g admet un minimum car la parabole est tournée vers la haut ($a > 0$).

128 Vrai, le sommet a pour coordonnées $(-2\ ;\ -4)$ et $a > 0$.

129 $f(x) = 0$ si $x = 5$ ou $x = -\dfrac{7}{3}$ donc si $x < -\dfrac{7}{3}$ ou $x > 5$, $f(x) < 0$.

130 Les racines sont 1 et $-\dfrac{24}{11}$ donc si $x < -\dfrac{24}{11}$ ou $x > 1$, $f(x) > 0$.

131 La fonction est croissante sur $]-\infty\,;2]$, décroissante sur $[2\,;+\infty[$. Son maximum est $f(2) = -1$.

132 $y = 2(x + 5)(x - 3)$.

133 $y = -7(x + 1)^2 + 4$.

134 Il s'agit de résoudre l'équation $-3x^2 + 10x + 17 = 0$.

Les solutions $\dfrac{5 - 2\sqrt{19}}{3}$ et $\dfrac{5 + 2\sqrt{19}}{3}$. Les points d'intersection ont pour coordonnées $\left(\dfrac{5 - 2\sqrt{19}}{3}\ ;\ \dfrac{-41 + 8\sqrt{19}}{3}\right)$ et $\left(\dfrac{5 + 2\sqrt{19}}{3}\ ;\ \dfrac{-41 - 8\sqrt{19}}{3}\right)$.

La parabole est au-dessus de la droite si :

$$-3x^2 + 10x + 17 > 0$$

soit x compris entre $\dfrac{5 - 2\sqrt{19}}{3}$ et $\dfrac{5 + 2\sqrt{19}}{3}$.

POUR FAIRE LE POINT

1 A ; 2 D ; 3 D ; 4 B, C et D ; 5 B ; 6 A et D ; 7 B ; 8 A ; 9 C.

POUR APPROFONDIR

135 **a.** Après réduction au même dénominateur, on obtient : $\dfrac{-x^2 - x + 6}{6x(x + 1)} = 0$. Les solutions sont -3 et 2.

b. L'équation est équivalente à : $\dfrac{-8x^2 - 8x + 13}{(x - 1)(x + 2)} = 0$.

Les solutions sont : $\dfrac{-2 - \sqrt{30}}{4}$ et $\dfrac{-2 + \sqrt{30}}{4}$.

c. L'équation est équivalente à : $\dfrac{2x^2 - x - 27}{x^2 - 9} = 0$.

Les solutions sont : $\dfrac{1 - \sqrt{217}}{4}$ et $\dfrac{1 + \sqrt{217}}{4}$.

136 En posant $y = 30 - x$, on se ramène à l'équation : $x^2 + 42x - 1\,080 = 0$. Les solutions sont $x = 18$ ou $x = -60$. On obtient deux couples solutions : $(18\,;12)$ et $(-60\,;90)$.

137 Les abscisses des points d'intersection des deux courbes vérifient l'équation $2x^2 - x - 2 = 0$, soit $x = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{4}$ et $x = \dfrac{1 + \sqrt{17}}{4}$.

138 Les abscisses des points d'intersection des deux courbes vérifient l'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$, soit $x = 1$ ou $x = 4$. Les points d'intersection ont pour coordonnées : $\left(1\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$ et $(4\,;1)$.

139 **1.** $2u^2 + u - 6 = 0$, $u = -2$ ou $u = \dfrac{3}{2}$ d'où les solutions de l'équation (E) sont : $x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

2. Si $u = x^2$, alors $u^2 + 4u - 5 = 0$, soit $u = 1$ ou -5. Les solutions de l'équation bicarrée sont $x = 1$ et $x = -1$.

140 **a.** Si $u = x^2$, alors $u = 2$ ou $u = 6$, ce qui donne deux solutions pour x : $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{2}$.

b. $u = -4 - 2\sqrt{7}$ ou $u = -4 + 2\sqrt{7}$ soit $x = \sqrt{-4 + 2\sqrt{7}}$ ou $-\sqrt{-4 + 2\sqrt{7}}$.

c. $u = -2$ ou $u = -6$, l'équation n'a pas de solution.

141 **a.** Si $u = \sqrt{x}$, on obtient : $u = 1$ ou $u = -5$. Soit une solution $x = 1$.

b. De même, on obtient $u = 1$ ou $u = \dfrac{2}{7}$ soit $x = 1$ ou $x = \sqrt{\dfrac{2}{7}}$.

c. En posant $u = \dfrac{1}{x}$, on obtient $u = 2$ ou $u = -3$ soit $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{3}$.

142 Si $u = x + \dfrac{1}{x}$. L'équation E est équivalente à $10u^2 - 77u + 130 = 0$; on obtient $u = \dfrac{5}{2}$ ou $u = \dfrac{52}{10}$.

On en déduit les valeurs possibles pour x : 0,5, 2, 0,2 et 5.

143 On se ramène à l'équation : $36x^4 - 97x^2 + 36 = 0$ soit $x^2 = \dfrac{4}{9}$ ou $x^2 = \dfrac{9}{4}$. Le nombre cherché est donc égal à $\dfrac{2}{3}$ ou bien $-\dfrac{2}{3}$.

144 Soit n le nombre de jours de travail du père et s son salaire quotidien. Le problème se traduit par les deux équations : $ns = 500$ et $(n - 5)(s - 8) = 240$. On trouve que s est une solution de l'équation : $s^2 - 60s + 800 = 0$. On obtient $s = 20$ ou $s = 40$. Si $s = 20$, alors $n = 25$; si $s = 40$ alors $n = 12{,}5$ ce qui est exclu.

Conclusion : le père travaille 25 jours pour un salaire

quotidien de 20 € (!) ; le fils 20 jours pour 12 € par jour(!). NB : l'énoncé conduit à des résultats peu crédibles…

145 $ab = 858$ et $\sqrt{a^2 + b^2} = 72{,}5$. On trouve que a est une solution de l'équation : $a^4 - 5\,256{,}25a^2 + 736\,164 = 0$. On obtient $a = 12$, $b = 71{,}5$ et l'hypoténuse de ce triangle rectangle mesure 72,5. Le périmètre est 156.

146 $\left]-\infty\,;\ \dfrac{-13}{5}\right] \cup [-1\,;7]$.

147 **a.** $\dfrac{-3x^2 + 20x - 7}{x - 6} \leqslant 0$

soit $\left[\dfrac{10 - \sqrt{79}}{3}\ ;\ 6\right[\cup \left[\dfrac{10 + \sqrt{79}}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

b. $]0\,;1] \cup]2\,;+\infty[$.

c. $\dfrac{-2x - 4}{x^2 + 4} > 0$ soit $S =]-\infty\,;-2[$.

d. $\dfrac{-x^2 + 10}{x^2 - 9} \leqslant 0$

soit $S =]-\infty\,;-\sqrt{10}] \cup]-3\,;3[\cup [\sqrt{10}\,;+\infty[$.

148 Dans cet exercice, la calculatrice sert à conjecturer, vérifier ou corriger des résolutions algébriques d'inéquations.

2. $\dfrac{2x - 1}{x - 3} > 0$ si $x < \dfrac{1}{2}$ ou $x > 3$.

4. $\dfrac{2x - 1}{x - 3} > -5x + 7$ équivaut à : $\dfrac{5x^2 - 20x + 20}{x - 3} > 0$

soit $\dfrac{5(x - 2)^2}{x - 3} > 0$. D'où $x > 3$.

149 Il s'agit d'étudier le signe de l'expression :

$\dfrac{x - 2}{x + 2} - (-x - 1)$ soit le signe de $\dfrac{x^2 + 4x}{x + 2}$.

Ainsi, la courbe $\mathscr{H}$ est située au-dessus de la droite $\mathscr{D}$ si $x \in [-4\,;-2[\cup [0\,;+\infty[$.

150 $x^2 - 8x + 7 \geqslant 0$ si $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 7$.

$(x + 2)(x - 3) \geqslant 0$ si $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 3$.

Donc $x^2 - 8x + 7 \geqslant 0$ et $(x + 2)(x - 3) \geqslant 0$

si $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 7$.

151 **3. a.** L'équation $5x^2 + 13x - 18 = 0$ admet une solution évidente : 1. Comme le produit des racines est égal à $\dfrac{-18}{5}$, l'autre solution est $\dfrac{-18}{5}$.

3. b. L'équation $7x^2 + 20x + 13 = 0$ admet une solution évidente : –1. Avec le même raisonnement, on trouve que l'autre solution est $-\dfrac{13}{7}$.

c. Pour qu'une équation du second degré admette deux racines de signes contraires, il faut que leur produit $\dfrac{c}{a}$ soit négatif donc que a et c soient de signes contraires.

d. Pour que les deux racines soient négatives, il faut que leur produit $\dfrac{c}{a}$ soit positif et que leur somme $\dfrac{-b}{a}$ soit négative. Donc les réels a, b et c doivent être de même signe.

152 **1.** S'il existe deux réels a et b dont la somme est S et le produit P alors $a(S - a) = P$ soit $a^2 - aS + P = 0$. a et b sont donc solutions de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$. Cette équation admet deux solutions si $S^2 - 4P$ est positif, si $S^2 - 4P$ est nul, il y a une racine double.

2. Il s'agit de trouver deux réels positifs tels que $S = 28$ et $P = 195$. Si ces réels existent, ils sont solutions de l'équation : $X^2 - 28X + 195 = 0$. Les dimensions du rectangle sont 15 et 13.

3. Algorithme :

```
Saisir S et P
d prend la valeur S2 – 4P
Si d ⩾ 0
alors afficher « (s – √d)/2 , (s + √d)/2 »
sinon afficher « il n'y a pas de solution »
Fin si
```

TI	CASIO
Prompt S, P $S^2 - 4P \mapsto d$ If $d \geqslant 0$ Then Disp $\dfrac{s - \sqrt{d}}{2}$, $\dfrac{s + \sqrt{d}}{2}$ Else « PAS DE SOLUTION » End	? $\mapsto$ S :? $\mapsto$ P $S^2 - 4P \mapsto d$ If $d \geqslant 0$ Then $\dfrac{s - \sqrt{d}}{2}$ ◢ $\dfrac{s + \sqrt{d}}{2}$ ◢… Else « PAS DE SOLUTION » If End 

153 **1.** $x + \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{(x - 1)^2}{x}$ donc l'expression est positive puisque x est un réel > 0.

2. $\dfrac{a}{d} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{d}{a} - 4 = \left(\dfrac{a}{d} + \dfrac{d}{a} - 2\right) + \left(\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} - 2\right)$ positif car on retrouve la somme de deux expressions positives de la forme $\left(x + \dfrac{1}{x} - 2\right)$ (cf. question **1**).

3. De même $\dfrac{a}{f} + \dfrac{b}{e} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{c} + \dfrac{e}{b} + \dfrac{f}{a} - 6$ est la somme de trois expressions positives de la forme $\left(x + \dfrac{1}{x} - 2\right)$ (avec $x = \dfrac{a}{f}$, puis $x = \dfrac{b}{e}$ et enfin $x = \dfrac{c}{d}$), ce qui prouve que $\dfrac{a}{f} + \dfrac{b}{e} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{c} + \dfrac{e}{b} + \dfrac{f}{a} \geqslant 6$.

154 **1.** Il s'agit de démontrer que pour tout réel x, $2x^2 > 3x - 4$ soit $2x^2 - 3x + 4 > 0$.

Le polynôme $2x^2 - 3x + 4$ est strictement positif pour tout x puisque son discriminant est négatif et que le coefficient de x^2 est positif. Donc la parabole est toujours au-dessus de la droite.

2. D'après ce qui précède, on peut dire que la longueur MN est égale à : $2a^2 - 3a + 4$. La fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ est représentée par une parabole, tournée vers le haut ; l'abscisse de son sommet est $\frac{3}{4}$.
Conclusion : si $a = \frac{3}{4}$, la distance MN est minimale.

155 La fonction f définie par $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$ est représentée par une parabole, tournée vers le bas ; l'abscisse de son sommet est $\frac{7}{4}$. $f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{25}{8}$.
Par conséquent :
si $m > \frac{25}{8}$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution
Si $m = \frac{25}{8}$, l'équation $f(x) = m$ a une solution.
Si $m < \frac{25}{8}$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions.

156 Les sommets de paraboles d'équations $y = ax^2 + 2x + 1$ ont pour coordonnées : $\left(-\frac{1}{a}\ ;\ -\frac{1}{a}+1\right)$ (ce qui prouve que ces points appartiennent à la droite d'équation $y = x + 1$).

157 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 01S_exercice157.gbb (Geogebra) et 01S_exercice157.g2w (Geoplan).***
On trace la parabole d'équation $y = 2x^2 + 5x + 4$. On crée un curseur b et on trace les droites d'équation $y = -3x + b$. Suivant les valeurs de b, on constate qu'il y a deux, un ou aucun points d'intersection entre la droite et la parabole. On valide cette observation en cherchant le nombre de solutions de l'équation $2x^2 + 5x + 4 = -3x + b$ suivant les valeurs de b.
$2x^2 + 8x + 4 - b = 0$, $\Delta = 32 + 8b$.
Si $b > -4$, pas de point d'intersection ; si $b = -4$, la droite est tangente à la parabole ; si $b < -4$, la droite coupe la parabole en deux points.

158 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 01S_exercice158.ggb (Geogebra) et 01S_exercice158.g2w (Geoplan).***
On crée de même la parabole $y = 2x^2 - 5x + 3$, un curseur m, la droite d'équation $y = -2x + m$. On fait varier m pour faire apparaître les différents cas.
On crée les points d'intersection entre la parabole et la droite (intersection entre deux objets), on place le milieu I du segment ainsi créé. En faisant varier m et en sélectionnant trace activée, on constate que les points I se déplacent sur une demi-droite verticale.
Démonstration :
1. Pour déterminer le nombre de points d'intersection entre la parabole et la droite, on déterminer suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation : $2x^2 - 5x + 3 = -2x + m$ soit $2x^2 - 3x + 3 - m = 0$.
$\Delta = 8m - 15$. Donc si $m > \frac{15}{8}$, il y a deux points d'intersection, si $m = \frac{15}{8}$, la droite est tangente à la parabole.
2. Si I_m milieu de $[A_mB_m]$, alors son abscisse est la semi somme des solutions de l'équation :
$2x^2 - 3x + 3 - m = 0$ soit $x_I = \frac{3}{4}$. Les points I_m décrivent donc la demi droite d'équation $x = \frac{3}{4}$, issue du point $\left(\frac{3}{4}\ ;\ \frac{3}{8}\right)$, avec $x \geqslant \frac{3}{4}$.

159 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 01S_exercice159.ggb (Geogebra) et 01S_exercice159.g2w (Geoplan).***
On définit un curseur m et on trace la droite d'équation $y = mx + 1 - m$, droite de coefficient directeur m passant par A. En faisant varier m, on conjecture pour quelle valeur de m, la droite est située entièrement « en dessous » de la parabole.
1. La droite de coefficient directeur 3 passant par A coupe la parabole aux points de coordonnées (1 ; 1) et (2 ; 4).
2. La droite est au dessus de la parabole pour x compris entre 1 et 2 ($x^2 - 3x + 2 > 0$).
3. On cherche m tel que, pour tout réel x :
$$x^2 - mx - 1 + m \geqslant 0.$$
$\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$. Donc $x^2 - mx - 1 + m \geqslant 0$ pour tout réel x si $m = 2$.

160 Un point M est à égale distance de F et de la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si :
$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(y - \frac{1}{4}\right)^2} \text{ soit } y = x^2.$$
La parabole d'équation $y = x^2$ a pour foyer le point $F\left(0\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ et pour directrice la droite d'équation $\mathscr{D}$, $y = -\frac{1}{4}$.

161 Si $x = v_4 + v_1$ alors $x = \frac{c}{2} + \sqrt{1 + \frac{c^2}{4}}$. Une des solutions de l'équation $x - \frac{1}{x} = c$ (soit $x^2 - cx - 1 = 0$) est $\frac{c + \sqrt{c^2+4}}{2}$, soit $v_4 + v_1$.

162 Soit a la longueur du segment que l'on partage et x la longueur du « partage » (x est donc un réel inférieur à a). Le rectangle « compris sous la droite entière et l'un de ses segments » a pour dimensions a et x, le carré de « l'autre segment » est $(a - x)^2$. Soit $(a - x)^2 = ax$, qui équivaut à : $x^2 - 3ax + a^2 = 0$.
Cette équation admet deux solutions : $\frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3a + a\sqrt{5}}{2}$. On retient la première solution, puisque, par hypothèse (« partage ») $x < a$.

163 Soit O l'objet, m_O sa masse, x la distance entre cet objet et la terre. Il s'agit de déterminer le nombre de solutions de l'équation : $\dfrac{M_T - M_o}{x^2} = \dfrac{M_L - M_o}{(d-x)^2}$.
Tous calculs faits, on obtient : $\Delta = 4d^2(M_T - M_o)(M_L - M_o)$.
Comme on peut supposer que l'objet est plus léger que la terre et la lune, le discriminant est positif et donc il y a deux points situés sur la droite « terre-lune » qui subissent des attractions égales de la part de la terre et de la lune.

164 On utilise le théorème de Thalès pour démontrer que $MN = \dfrac{6x}{8}$ et $BQ = \dfrac{x}{2}$.
On en déduit que $MQ = 12 - \dfrac{3x}{2}$, et ainsi que l'aire du rectangle MNPQ est $\dfrac{3x}{4}\left(12 - \dfrac{3x}{2}\right)$ soit : $-\dfrac{9}{8}x^2 + 9x$.
On en déduit que l'aire du rectangle est maximale pour $x = 4$.

165 **1. a.** L'angle $\widehat{PMQ}$ est égal à 90° car :
$$\widehat{AMP} = \widehat{QMB} = 45°.$$
b. On exprime les longueurs PM et MQ en fonction de x à l'aide du théorème de Pythagore. Puis, à l'aide de ce même théorème, on a : $PQ^2 = PM^2 + MQ^2$, soit $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(10-x)^2}{2}$. Ainsi : $PQ^2 = x^2 - 10x + 50$.
2. Pour placer M tel que $PQ = 6$, il faut déterminer les valeurs de x pour lesquelles : $x^2 - 10x + 50 = 36$. On obtient $x = 5 + \sqrt{11}$ et $x = 5 - \sqrt{11}$.
3. La fonction f est décroissante sur [0 ; 5] et croissante sur [5 ; 10]. $f(0) = f(10) = 50$ et $f(5) = 25$.
On en déduit que PQ est compris entre 5 et $5\sqrt{2}$.
Donc $L \in [5 ; 5\sqrt{2}]$.
4. a. Le triangle AIB est rectangle isocèle en I car les angles $\widehat{IAB}$ et $\widehat{IBA}$ valent 45°.
b. PIQM est un rectangle donc IM = PQ (diagonales du rectangle).
c. La valeur minimale de IM est 5 : c'est la longueur de la hauteur issue de I dans le triangle IAB. La valeur maximale de IM est IA (IA = IB), c'est-à-dire $5\sqrt{2}$.
On retrouve ainsi géométriquement les résultats précédents.

166 Si on note x et y les dimensions du rectangle, H le projeté orthogonal de O sur la corde parallèle à T, on a :
$$x^2 + y^2 = 36,\ y + OH = 3 \text{ et } OH^2 + \frac{x^2}{4} = 9.$$
Ainsi : $y^2 + (36 - 4OH^2) = 36$ soit $y = 2$ OH.
D'où 2OH + OH = 3 et ainsi OH = 1.
Si on suppose que la corde est tracée de telle sorte que O appartienne au segment [AH], c'est-à-dire que $y = OH + 3$, $OH^2 + \dfrac{x^2}{4}$ et $x^2 + y^2 = 36$, on obtient de même $y = 2$ OH et donc OH = 3. C'est-à-dire que H et A sont symétriques par rapport à O, dans ce cas, on ne peut pas construire le rectangle.

167 **1.** Si on roule à 130 km/h, la distance de freinage est environ 145 m ; 110 km/h, distance = 108 m ; 50 km/h, distance = 30 m.
2. On résout l'inéquation : $v + \dfrac{v^2}{12} < 20$ et on trouve $v < 10{,}61$ soit environ moins de 38 km/h.

Prises d'initiatives

168 Si on pose $x = AM$, on trouve que l'aire du parallélogramme MNPQ est égale à : $2x^2 - 16x + 60$.
Cette aire est minimale pour $x = 4$. L'aire minimale est 28 cm².

169 Si on pose $x = AP$, avec le théorème de Thalès on montre que $PM = \dfrac{2-x}{2}$; donc l'aire du rectangle APMQ est $x \times \dfrac{2-x}{2} = \dfrac{-x^2}{2} + x$. Elle est maximale pour $x = 1$.

170 On démontre que les sommets de ces paraboles ont pour coordonnées $\left(\dfrac{-1}{2a} ; 1 - \dfrac{1}{4a}\right)$.
Donc ces points décrivent la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 1$.

171 Soit v la vitesse de la colonne en cm/s, V la vitesse de la dernière fourmi, t_1 le temps aller et t_2 le temps retour.
La distance aller est $Vt_1 = vt_1 + 50$. La distance retour est $Vt_2 = 50 - vt_2$. D'où :
$t_1 = \dfrac{50}{V-v}$ et $t_2 = \dfrac{50}{V+v}$. Ainsi : $\dfrac{50v}{V-v} + \dfrac{50v}{V+v} = 50$.
Si on pose $X = \dfrac{V}{v}$, on obtient : $\dfrac{50}{X-1} + \dfrac{50}{X+1} = 50$
soit $2X = X^2 - 1$.
Si $X^2 - 2X - 1 = 0$ avec $X > 0$ alors $X = 1 + \sqrt{2}$
soit $V = (1 + \sqrt{2})v$.
La distance parcourue par cette fourmi est :
$$(1+\sqrt{2})v \times (t_1 + t_2) = (1+\sqrt{2})(vt_1 + vt_2)$$
soit $(1 + \sqrt{2}) \times 50$ cm.

F Activités TICE

TP 1 Programmation et calcul formel

A. Voici l'algorithme permettant de résoudre une équation du second degré en envisageant les trois cas possibles.

```
Saisir a, b, c
d prend la valeur b² – 4ac
Si d > 0
alors afficher (–b – √d)÷(2 × a), (–b + √d)÷(2 × a)
Sinon
Si d = 0
Alors afficher (–b):(2 × a)
Sinon
afficher « pas de solution »
```

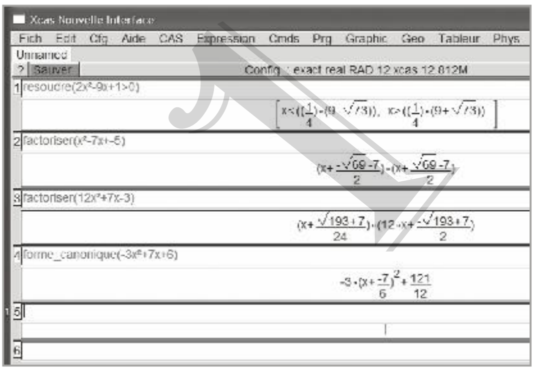
TI	CASIO
Prompt A, B, C B^2 – 4 × A × C ↦ D If D > 0 Then Disp (–B – √D):(2 × A), (–B + √D):(2 × A) Else If D = 0 Then Disp –B:(2 × A) Else Disp « pas de solution » End	? ↦ A ? ↦ B ? ↦ C B^2 – 4 × A × C↦D If D > 0 Then (–B – √D:(2 × A) ▶ (–B + √D): (2 × A) ▶ Else If D = 0 Then (–B:(2 × A)) ▶ Else « pas de solution » If End

B. Utilisation d'un logiciel de calcul formel

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 01S_TP1.xws (Xcas) et 01S_TP1.dfu (Derive).

Les aides figurant au bas de la page et à la fin du manuel doivent permettre aux élèves d'utiliser les logiciels proposés, Xcas et Derive. Les principales commandes y sont décrites.

Exemples avec le logiciel Xcas.



TP 2

A. Calcul des premières valeurs

1. Les solutions de l'équation : $x^2 - 2x - 1 = 0$ sont $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

$S = x_1 + x_2 = 2$

2. On se propose de calculer $x_1^5 + x_2^5$.

a. Si $T = x_1^2 + x_2^2$ alors $T = 2x_1 + 1 + 2x_2 + 1 = 2S + 2$ soit $T = 6$.

b. $U = x_1^3 + x_2^3 = x_1(2x_1 + 1) + x_2(2x_2 + 1) = 2T + S = 14$.

c. De même :

$V = x_1^4 + x_2^4 = x_1(x_1(2x_1 + 1)) + x_2(x_2(2x_2 + 1))$
$\quad = 2(x_1^3 + x_2^3) + x_1^2 + x_2^2$ donc $V = 2U + T = 34$

d. $A = x_1^5 + x_2^5 = x_1(x_1^4) + x_2(x_2^4)$
$\quad = x_1(2x_1^3 + x_1^2) + x_2(2x_2^3 + x_2^2)$
$\quad = 2(x_1^4 + x_2^4) + (x_1^3 + x_2^3)$

d'où $A = 2V + U$ soit $A = 82$.

B. Algorithme de calcul

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 01S_TP2.alg (Algobox).

Une erreur s'est glissée dans la vue d'écran : S prend la valeur 2 et T prend la valeur 6.

	CASIO
Saisir *n* S prend la valeur 2 T prend la valeur 6 Pour I variant de 3 à N U prend la valeur 2 x T + S S prend la valeur T T prend la valeur U Fin Pour Afficher T	? ↦ N 2 ↦ S 6 ↦ T For 3 ↦ I to N 2 × T + S ↦ U T ↦ S U ↦ T Next

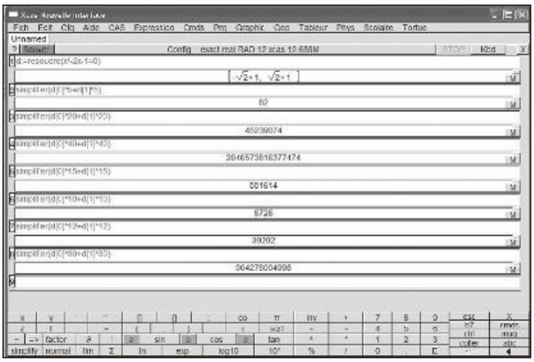
Ainsi $x_1^{20} + x_2^{20} = 45239074$…… $x_1^{15} + x_2^{15} = 551614$
$x_1^{25} + x_2^{25} = 3710155682$.

C. Utilisation d'un tableur

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 01S_TP2.xls (Excel 2003), 01S_TP2.xlsx (Excel 2007) et 01S_TP2.ods (Open Office).

D. Utilisation d'un logiciel de calcul formel

1. et **2.**



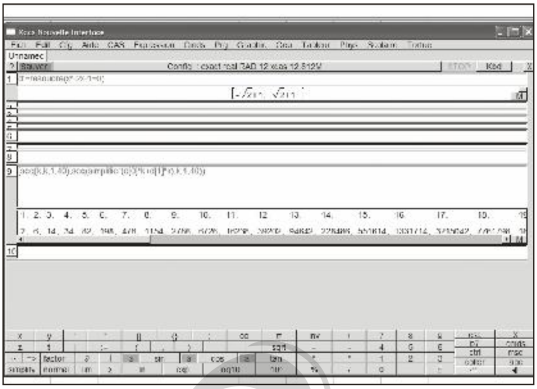
3. Avec le tableur : $x_1^{40} + x_2^{40} = 2046573816377470{,}00$
Avec Xcas : $x_1^{40} + x_2^{40} = 2046573816377474$.

On peut penser que le résultat donné par le tableur est plus fiable que celui donné par le logiciel de calcul formel.

4. On constate que tous les nombres $x_1^k + x_2^k$ sont entiers et pairs.

B23 =2*B22+B21

	A	B	C	D
1	n	somme		
2	1	2		
3	2	6		
4	3	14		
5	4	34		
6	5	82		
7	6	198		
8	7	478		
9	8	1154		
10	9	2786		
11	10	6726		
12	11	16238		
13	12	39202		
14	13	94642		
15	14	228486		
16	15	551614		
17	16	1331714		
18	17	3215042		
19	18	7761798		
20	19	18738638		
21	20	45239074		
22	21	109216786		
23	22	263672646		
24	23	636562078		
25	24	1536796802		
26	25	3710155682		
27	26	8957108166		
28	27	21624372014		
29	28	52205852194		
30	29	126036076402,00		



5. La commande permet d'afficher les sommes $x_1^k + x_2^k$ pour k variant de 1 à 40.

La commande seq(expr,k,1,n) définit en effet la liste des valeurs des expr lorsque k varie de 1 à n.

6. Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 01S_TP2 (Xcas) et 01S_TP2 (Derive).

CHAPITRE
2 Étude de fonctions

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Étude de fonctions Fonctions de référence $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \lvert x \rvert$.	• Connaître les variations de ces deux fonctions et leur représentation graphique. ⊡ Démontrer que la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$. ⊡ Justifier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.	Aucune technicité dans l'utilisation de la valeur absolue n'est attendue.
Sens de variation des fonctions $u+k$, λu, $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$, la fonction u étant connue, k étant une fonction constante et λ un réel.	• Exploiter ces propriétés pour déterminer le sens de variation de fonctions simples.	On nourrit la diversité des raisonnements travaillés dans les classes précédentes en montrant à l'aide de contre-exemples qu'on ne peut pas énoncer de règle générale donnant le sens de variation de la somme ou du produit de deux fonctions. L'étude générale de la composée de deux fonctions est hors programme.

Remarque : Le symbole ⊡ signale des « *démonstrations, ayant valeur de modèle. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues* ».

B Notre point de vue

L'objectif de ce chapitre est d'introduire deux nouvelles fonctions de référence : la fonction racine carrée et la fonction valeur absolue (la fonction cube n'est pas étudiée). Conformément aux commentaires, nous n'avons pas développé de technicité dans l'utilisation de la valeur absolue ; cependant, il nous semblait important de signaler certaines propriétés algébriques et l'inégalité triangulaire. C'est par le biais d'exercices que nous avons abordé ces points.

Nous avons mis la démonstration de la croissance de la fonction racine carrée dans le cours. Elle s'appuie sur l'expression conjuguée.

La position relative des courbes des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sera prétexte à introduire un savoir-faire à propos de l'étude plus générale de la position relative de deux courbes.

L'étude générale de la composée de deux fonctions est hors programme. Aussi, les résolutions des exercices proposés s'appuieront sur les types de fonction vus dans le programme : $u+k$, λu, $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$.

Nous n'avons donc pas introduit la composition de fonctions.

Enfin, nous avons évoqué (car cela apparaît dans les commentaires) la somme et le produit de deux fonctions. C'est l'occasion dans les savoir-faire de montrer « *à l'aide de contre-exemples qu'on ne peut pas énoncer de règle générale donnant le sens de variation de la somme ou du produit de deux fonctions* ».
Au cours de ce chapitre, nous utiliserons les résultats du chapitre précédent concernant le second degré. Dans les savoir-faire, nous avons insisté sur des méthodes algébriques, graphiques et sur l'utilisation de la calculatrice. L'étude des variations des fonctions s'appuiera sur la définition et sur les propriétés des fonctions de référence. Des exercices simples permettront de travailler les savoir-faire développés dans le cours, d'autres viseront à donner du sens.
L'énoncé de la page « **Chercher avec méthode** » permet de mettre en œuvre une démarche d'analyse pour étudier le sens de variation d'une fonction et pour construire son raisonnement.
L'utilisation des TICE est développée aux cours de ce chapitre.

Les notions abordées dans le chapitre 2

1. Sens de variation. Fonction valeur absolue
2. Fonction racine carrée. Comparaison de fonctions de référence
3. Opérations sur les fonctions et sens de variation

C Avant de commencer

Se tester avec des QCM

1 B ; **2** C ; **3** C ; **4** A, C et D ;
5 A et B ; **6** B et C ; **7** B et C ; **8** B, C et D.

Se tester avec des exercices

9 **a.** $-\frac{19}{9}$ et $1-3\sqrt{2}$; **b.** Oui ; **c.** 0 et 3 ;

10 **a.** $f(1)=2$ et $g(1)=1$; **b.** $]-\infty\,;0]\cup[2\,;+\infty[$;

11 **a.** $f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{1}{3}\right)$; **b.** $f(-5)>f(-2)$.

D Activités

Activité 1 Minimum d'une aire

Cette activité permet de réactiver des réflexes, des techniques voire des définitions dans le cadre des fonctions.

1. $f_1(x)=3x$.

2. $DN=6-x$ et $f_2(x)=12-2x$.

3. Graphique.

4. La valeur est 2,4.

5. $\mathscr{A}_3=24-3x-(12-2x)-\dfrac{x\times(4-x)}{2}=f_3(x)$.

6. Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 02S_activite1.ggb (Geogebra).

a. Minimum pour $x=3$.

b. $a=1$ et $\dfrac{-b}{2a}=3$.

$f_3(x)=\dfrac{1}{2}[(x-3)^2+15]$. Le minimum est 7,5 pour $x=3$.

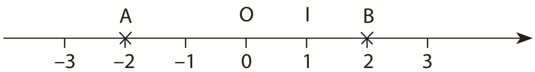
Activité 2 Une nouvelle fonction

Cette activité introduit la fonction valeur absolue à l'aide de la distance définie à l'aide d'un axe gradué.

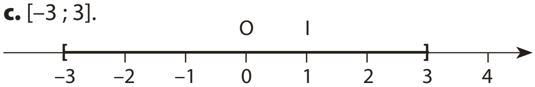
1. a. 3, 6, 2 et $\frac{5}{2}$.

b. Les deux réels sont −2 et 2.

Les deux points sont A et B.



c. $[-3\,;3]$.



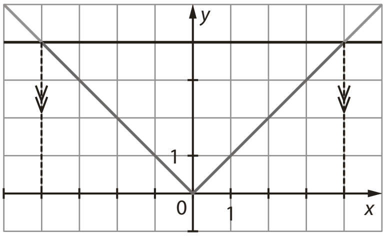
2. $|x|\geqslant 0$ car c'est une distance.

3. M et M' sont symétrique par rapport à O (O est le milieu du segment [MM']), donc OM = OM'.

Ainsi $|-x| = |x|$.

4. a. Si $x \leqslant 0$, alors $f(x) = |x| = x$ et si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = |x| = -x$.

b.



c. 4 et – 4 sont solutions.

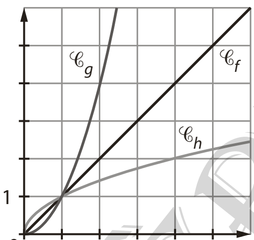
d. [– 4 ; 4].

Activité 3 Comparaison de x, x^2 et $\sqrt{x}$

Cette activité permet de comparer les images de trois fonctions de manière graphique et de manière algébrique.

1. Faux : si on prend un nombre x négatif, alors $x^2 > x$. Les élèves raisonnent souvent avec les entiers.

2. a.



b. Si $0 \leqslant a \leqslant 1$, alors $a^2 \leqslant a \leqslant \sqrt{a}$ et si $1 \leqslant a$, alors $\sqrt{a} \leqslant a \leqslant a^2$.

3. a. $x^2 - x = x(x + 1)(x - 1)$, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ le signe de $x^2 - x$ est le même que celui de $x - 1$ car $x \geqslant 0$ et $x + 1 \geqslant 1$.

Donc $x^2 \leqslant x$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $x^2 \geqslant x$ si $x \geqslant 1$.

b. Deux méthodes.

On a $\sqrt{0} = 0$.

Si $x > 0$, $x - \sqrt{x} = \dfrac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{x + \sqrt{x}} = \dfrac{x^2 - x}{x - \sqrt{x}}$.

Le signe de $x - \sqrt{x}$ est le même que celui de $x^2 - x$. On en déduit que $x \geqslant \sqrt{x}$ si $x \geqslant 1$ et que $x \leqslant \sqrt{x}$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$.

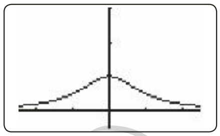
L'autre méthode est l'utilisation de la croissance de la fonction racine carrée et de l'égalité $\sqrt{x^2} = x$ si $x \geqslant 0$ et en utilisant la question **3. a**.

c. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$ et si $1 \leqslant x$, alors $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$. Ce qui confirme la lecture faite sur le graphique.

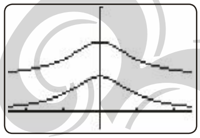
Activité 4 D'une fonction à l'autre, d'une variation à l'autre

Cette activité introduit à l'aide d'exemples les fonctions $f + k$ et λf et permet d'évoquer les variations.

1. Il faut définir la fenêtre avec la calculatrice.



2. a.

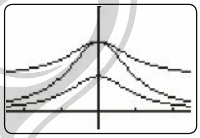


b. La courbe $\mathscr{C}_g$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ en ajoutant 1 à chaque ordonnée d'un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

c. Les fonctions f et g sont croissantes sur [–2,5 ; 0] et décroissantes sur [0 ; 2,5].

d. On vérifie que $g(x) = f(x) + 1$.

3. a.



b. La courbe $\mathscr{C}_h$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ en multipliant chaque ordonnée d'un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ par 2.

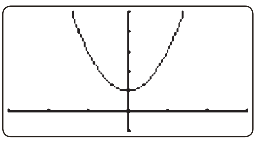
c. Les fonctions f et h sont croissantes sur [–2,5 ; 0] et décroissantes sur [0 ; 2,5].

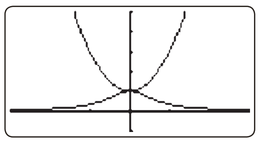
d. On vérifie que $h(x) = 2 \times f(x)$.

Activité 5 L'inverse d'une fonction

Cette activité introduit sur un exemple l'inverse d'une fonction qui ne s'annule pas et qui garde un signe constant.

1. Écran calculatrice





2. Les fonctions u et f ont des sens de variation contraires.

3. a. Si $0 \leqslant a < b$, alors $0 \leqslant a^2 \leqslant b^2$ car la fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$. En multipliant par 2 (positif) et en ajoutant 3, on obtient $3 \leqslant 2a^2 + 3 \leqslant 2b^2 + 3$, c'est-à-dire $3 \leqslant u(a) < u(b)$.

b. Comme $3 \leqslant u(a) < u(b)$, alors $0 < u(a) < u(b)$. La

fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, alors $\dfrac{1}{u(a)} > \dfrac{1}{u(b)}$, soit $f(a) > f(b)$. Ainsi, si $0 \leqslant a < b$, alors $f(a) > f(b)$. La fonction f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

4. De manière analogue, on démontre que f est croissante sur $]-\infty\,;0]$ en utilisant le fait que la fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$		↘	3	↗	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{3}$	↘	

Ceci confirme l'observation faite à la question **2**.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $-2 < 5$, donc $f(-2) > f(5)$.

2 f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors $f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$; $-4 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

3 **1.** La fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $f(0{,}998) < f(0{,}999)$.
2. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc $f(-0{,}998) < f(-0{,}999)$.

4 Si $-1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

5 **1.** La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $f(0{,}998) > f(0{,}999)$.
2. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $f(-0{,}998) < f(-0{,}999)$.

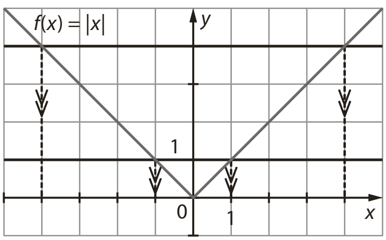
6 Faux, car -2 et 3 ne sont pas dans le même intervalle I : on ne peut pas appliquer la définition d'une fonction croissante.

7 **a.** La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $a^2 > b^2$; l'inégalité est fausse.
b. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$; l'inégalité est fausse.
c. Si $a < b < 0$, alors $a^2 > b^2 > 0$ et $\dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{b^2}$; l'inégalité est juste.

8 7, 3 et 2.

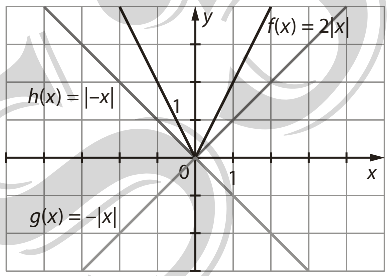
9 **1.** $0{,}5$; 8 ; $\dfrac{8}{9}$; 10^{-2} ; $10^{-3} - 10^{-4}$; $10^4 - 10^3$.
2. Antécédent 3 et -3.
3. Non, $|x| \geqslant 0$.

10 **1.**



2. Solutions -5 et 5.
3. $[-1\,;1]$.

11



12 $\sqrt{5} - 3 > \sqrt{5} - 4$, car $-3 > -4$. Les réels $\sqrt{5} - 3$ et $\sqrt{5} - 4$ sont négatifs et la fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
Donc $|\sqrt{5} - 3| < |\sqrt{5} - 4|$.

13 4.

14 La fonction racine carrée est strictement croissante :
$$2 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3.$$

15 $0{,}998 < 0{,}999$ donc $f(0{,}998) < f(0{,}999)$, car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

16 $f(8) + f(32) = \sqrt{8} + \sqrt{32} = 6\sqrt{2} = \sqrt{72} = f(72)$.

17 u est décroissante sur I, donc $2u$ est décroissante sur I, et $-5u$ est croissante sur I.

18

x	-1		4
$f(x)$	5	↗	8

On ajoute 3, on ne change pas le sens de variation.

x	-1		4
$g(x)$	-4	↘	-10

On multiplie par -2, on change le sens de variation.

x	-1		4
$f(x)$	$0{,}5$	↘	$0{,}2$

$u(x) > 0$, donc elle ne change pas de signe. u et f ont des sens contraires de variations.

19 **1.** La fonction f est définie sur $[-2 ; 4]$.

x	-2		0		2		4
$u(x)$	4	↘	0	↗	2	↘	1

Les fonctions $u + 1$, $u - 2$ et $2u$ ont le même sens de variation que u, et $-u$ a le sens contraire.

x	-2		0		2		4
$u(x) + 1$	5	↘	1	↗	3	↘	2

x	-2		0		2		4
$u(x) - 2$	2	↘	-2	↗	0	↘	-1

x	-2		0		2		4
$2u(x)$	8	↘	0	↗	4	↘	2

x	-2		0		2		4
$-u(x)$	-4	↗	0	↘	-2	↗	-1

20 **1.** La fonction f est définie sur $[-1 ; 4]$.

x	-1		0		1		4
$u(x)$	1	↗	2	↘	1	↗	2

2. La fonction u ne s'annule pas et garde toujours le même signe (ici positif).

x	-1		0		1		4
$\sqrt{u(x)}$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	↗	$\sqrt{2}$

x	-1		0		1		4
$\dfrac{1}{u(x)}$	1	↘	$\dfrac{1}{2}$	↗	1	↘	$\dfrac{1}{2}$

POUR S'ENTRAÎNER

21 **1.** La fonction f est une fonction affine, elle est soit croissante, soit décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme on a $0 > -2$ et $f(0) < f(5)$, alors f est décroissante (on peut bien sûr calculer $\dfrac{f(-2) - f(0)}{-2 - 0} = \dfrac{-1}{2}$).

2. Si $-5 \leqslant x \leqslant 5$, alors $f(-5) \geqslant f(x) \geqslant f(5)$ (on peut faire remarquer aux élèves que l'on a la réponse sans calculer les images $\dfrac{-13}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$).

22 **1.** 4 et $3\sqrt{3} + 1$.

2. On résout l'équation $f(x) = 4$, soit $-x^2 - 3x = 0$. Solutions : 0 et -3.

23 $]-\infty ; -3[\cup]-3 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$. Ce sont tous les nombres réels sauf ceux qui sont solutions de l'équation $x^2 - 9 = 0$.

24 Il faut que $x^2 - 6x > 0$. On a $x^2 - 6x = x(x - 6)$ et $a > 0$. La fonction f est définie sur $]-\infty ; 0] \cup [6 ; +\infty[$.

25 C'est oui, car c'est la même expression après réduction au même dénominateur et le même ensemble de définition.

26 Il suffit de réduire au même dénominateur dans l'expression $f(x)$.

27 Elles sont égales : il suffit de réduire au même dénominateur dans l'expression de $g(x)$.

28 **1.** On sera amené théoriquement à résoudre un système. Les élèves analyseront l'énoncé pour se simplifier le travail… Notons $g(x) = ax^2 + bx + c$.
Comme $g(0) = 0$, alors $c = 0$.
$g(-2) = 0$, alors $4a - 2b = 0$, soit $2a = b$.
$g(-1) = -1$, alors $a - b = -1$, d'où par exemple $a + 1 = b$.
On déduit $2a = a + 1$, c'est-à-dire $a = 1$, d'où $b = 2$.
Conclusion : $g(x) = x^2 + 2x$.

2. On vérifie que $g(2) = 8$, donc par définition, le point $(2 ; 8)$ est sur la courbe représentative.

29 Vrai. Il ne faut pas se fier aux apparences. On peut soit calculer, soit observer simplement que les x^2 disparaissent, ce qui suffit pour répondre à la question (on a $f(x) = -28x + 35$).

30 Vrai. On veut savoir s'il existe au moins un nombre x tel que $f(x) = x$. Il en existe au moins un car $f(1) = 1$. On peut aussi vérifier avec $f(-2) = -2$. L'équation sous-jacente est $x^2 + x = 2$, mais c'est inutile de la résoudre ou de la trouver pour répondre à la question.

31 Faux. Par exemple si $x = -1$, alors $x^2 + 2x = -1$. Or il faut que $x^2 + 2x > 0$.

32 **1.** $(x + 1)^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 + 2x - 3$.

2. Le coefficient de x^2 est positif, le minimum de f est -4, il est atteint pour -1, la fonction f est décroissante sur $]-\infty ; -1]$ et elle est croissante sur $[-1 ; +\infty[$. On a $f(-3) = 0$ et $f(4) = 21$, donc si $-3 \leqslant x \leqslant 4$, alors $-4 \leqslant f(x) \leqslant 21$.

34 **1.** $f(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}$.

x	$-\infty$	-3	-1	4	$+\infty$
$f(x)$	↘		-4		↗

2. Le coefficient de x^2 est positif, le minimum de f est $-\frac{9}{4} = -2{,}25$, il est atteint pour $-\frac{3}{2}$. La fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ -\frac{3}{2}\right]$ et elle est croissante sur $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$. On a $f(0) = 0$ et $f(2) = -2$, donc si $0 \leqslant x \leqslant 2$, alors $-2{,}25 \leqslant f(x) \leqslant 0$.

35 **1.** $f(x) = 2(x + 2)^2 - 3$.

2. Le coefficient de x^2 est positif, le minimum de f est -3, il est atteint pour -2, la fonction f est décroissante sur $]-\infty\ ; -2]$ et elle est croissante sur $[-2\ ; +\infty[$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-3	↗

3. Si $2 \leqslant x \leqslant 5$, alors $f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(5)$, soit $29 \leqslant f(x) \leqslant 95$.

4. $f(-4) = 5 \leqslant f(5)$. Si $-4 \leqslant x \leqslant 5$, alors $-3 \leqslant f(x) \leqslant f(5)$, soit $-3 \leqslant f(x) \leqslant 95$.

36 **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Faux.

38 **1.** $4 \leqslant f(a) \leqslant 6$.

2. $4 \leqslant f(a) \leqslant 10$.

3. $-6 \leqslant -f(a) \leqslant -4$.

4. $4 \leqslant f(-a) \leqslant 6$.

39 **1.** $1 \geqslant -a \geqslant -b \geqslant 0$, donc $f(-a) \leqslant f(-b)$.

2. $-1 \leqslant a - 1 \leqslant b - 1 \leqslant 0$, donc $f(a - 1) \leqslant f(b - 1)$.

3. $0 \leqslant a^2 \leqslant 1$, donc $0 \leqslant f(a^2) \leqslant 1$.

40 Faux.

$a = -1$ et $b = 2$, on a $a < b$, d'où $-1 < 2$.

$a^2 - 2a = (-1)^2 - 2 \times (-1) = 3$ et $b^2 - 2b = 2^2 - 2 \times 2 = 0$, donc $a^2 - 2a > b^2 - 2b$.

41 Faux. Contre-exemple : $-2 < -1$, et $f(-2) = 2$, $f(-1) = 0$, c'est-à-dire $f(-2) > f(-1)$. La forme canonique est $x^2 + 2x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

42 **a.** $1 + \sqrt{3}$; **b.** $\pi - 3$; **c.** $\sqrt{2} - 1$.

43 **a.** -2 et 2. **b.** Pas de solution. **c.** 1 et -1.

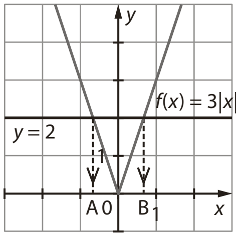
44 **1.**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	↘	0	↗

2. Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $1 \leqslant |x| \leqslant 2$.

3. Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $-1 \leqslant 1 - x \leqslant 0$, d'où $0 \leqslant |1 - x| \leqslant 1$.

45 **1.** Si $x \geq 0$, $f(x) = 3x$; si $x \leqslant 0$, $f(x) = -3x$.

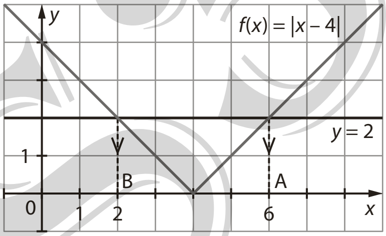


2. Les abscisses de A et B environ $-0{,}7$ et $0{,}7$.

3. Si $x \geqslant 0$, $f(x) = 2$ revient à $2 = 3x$, soit $x = \frac{2}{3}$ qui est positif.
Si $x \leqslant 0$, $f(x) = 2$ revient à $2 = -3x$, soit $x = -\frac{2}{3}$ qui est négatif.

46 **1.** $g(\sqrt{5}) = |\sqrt{5} - 4| = 4 - \sqrt{5}$ car $\sqrt{5} < 4$.

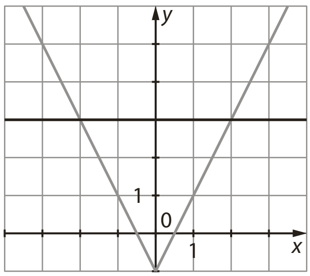
2. Si $x \geqslant 4$, $g(x) = x - 4$; si $x \leqslant 4$, $g(x) = -x + 4$.



3. Les abscisses de A et B sont 2 et 6.

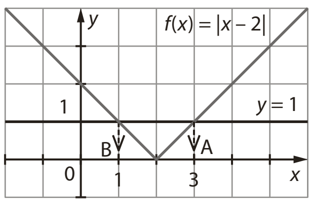
47 **1.** Si $x > 0$, alors $f(x) = 2x - 1$. Si $x < 0$, alors $f(x) = -2x - 1$. La représentation graphique est formée de deux demi-droites.

2. Si $x > 0$: $f(x) = 3$ équivaut à $2x - 1 = 3$, soit $x = 2$, et $2 \in [0\ ; +\infty[$. Si $x < 0$: $f(x) = 3$ équivaut à $-2x - 1 = 3$, soit $x = -2$, et $-2 \in\ ]-\infty\ ; 0]$. Les solutions sont -2 et 2. Vérification graphique : les abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $y = 3$ avec la représentation graphique de la fonction f sont -2 et 2.



48 **1.** Si $x \geqslant 2$, $f(x) = x - 2$; si $x \leqslant 2$, $f(x) = -x + 2$. D'où les deux équations des deux demi-droites.

2.



3. Les abscisses de A et B sont 1 et 3.

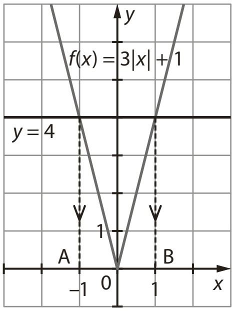
49 **1.** 10 ; 0,56 ; 7 et 100.

2. Le résultat est la valeur absolue.

3. Il faut modifier le Traitement :

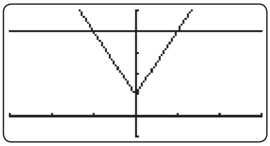
```
Si x > 5
  | Alors Afficher x – 5
  | Sinon Afficher –x + 5
Fin Si
```

50 **1.**

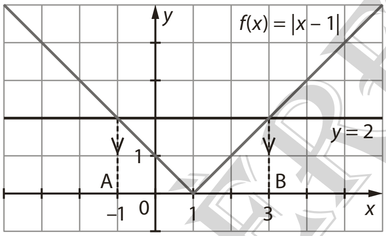


2. $|x| \geqslant 0$, d'où $f(x) \geqslant 1$.

4.



51

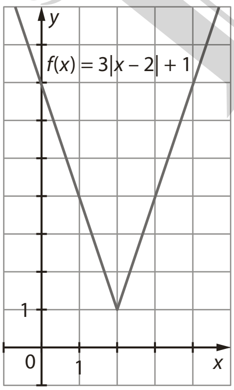


52 **a.** 4. **b.** $[0 ; +\infty[$.

53 **1.** L'expression $|2x|$ est associée à $\mathscr{C}_3 : f_3(x) = |2x|$ et l'expression $|x + 2|$ est associée à $\mathscr{C}_4 : f_4(x) = |x + 2|$.

2. La courbe $\mathscr{C}_1$ correspond à la fonction $f_1(x) = |x - 4|$.
La courbe $\mathscr{C}_2$ correspond à la fonction $f_2(x) = -|x - 1|$.

54

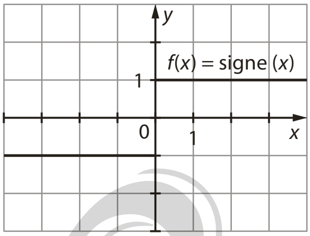


1. $|x - 2|$ vaut $x - 2$ ou $2 - x$ suivant les valeurs de x, ce qui donne dans les deux cas des fonctions affines.

2. Si $x \geqslant 2$, alors $f(x) = 3x - 5$ et si $x \leqslant 2$, $f(x) = -3x + 7$.

55 **1.** Tous les réels sauf 0.

2. Si $x > 0$, $s(x) = 1$ et si $x < 0$, $s(x) = -1$.

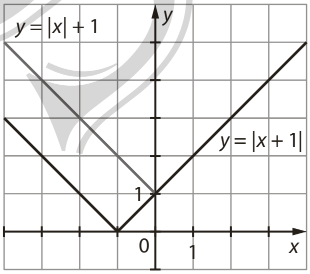


La représentation graphique est formée des deux demi-droites sans les points d'abscisse 0.

56 Si $x \leqslant 3$, alors $|x - 3| = x - 3$
et $f(x) = (x - 3) + 2x = 3x - 3$.
Si $x \geqslant 3$, alors $|x - 3| = -x + 3$ et $f(x) = (-x + 3) + 2x = x + 3$.

57 Si $x > -1$, alors $f(x) = x + 1$; si $x \leqslant -1$, alors $f(x) = -x - 1$.
Si $x \geqslant 0$, alors $g(x) = x + 1$; si $x \leqslant 0$, alors $g(x) = -x + 1$.

1. Les courbes sont superposées pour $x \geqslant 0$.

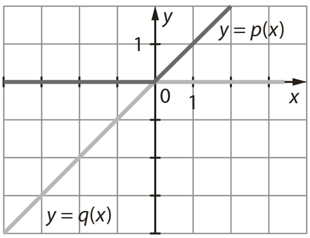


2. Les fonctions ne sont pas égales.

3. Si $x < 0$, on a $|x + 1| < |x| + 1$.
Si $x \geqslant 0$, on a $|x + 1| = |x| + 1$.
On peut résumer les deux cas par $|x + 1| \leqslant |x| + 1$.

58 **1.** Si $x \geqslant 0$, alors $p(x) = x$; si $x \leqslant 0$, alors $p(x) = 0$.
Si $x \geqslant 0$, alors $q(x) = 0$; si $x \leqslant 0$, alors $q(x) = x$.
C'est la fonction q qui est représentée.

2.



3. On a $p(x) = x$ si $x \geqslant 0$ et $p(x) = 0$ sinon, donc $p(x) \geqslant 0$.
On a $q(x) = x$ si $x \leqslant 0$ et $q(x) = 0$ sinon, donc $q(x) \leqslant 0$.
C'est ce qu'on observe sur les représentations graphiques.

4. Si $x \leqslant 0$, alors $p(x) \times q(x) = 0 \times x = 0$.
Si $x \geqslant 0$, alors $p(x) \times q(x) = x \times 0 = 0$.

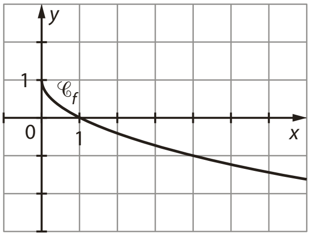
59 Faux, voir exercice 57 ou $|-2+1| = 1$ et $|1| + |-2| = 3$.

60 Faux, l'égalité est toujours vraie.

61 Vrai, voir graphique de l'exercice 50.

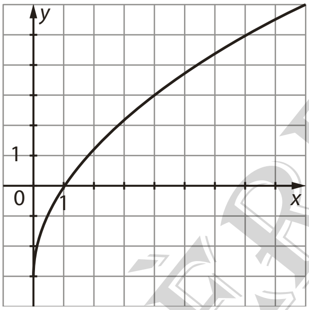
62 **1.** Si $0 \leqslant a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, d'où $1 - \sqrt{a} > 1 - \sqrt{b}$.
f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

2.



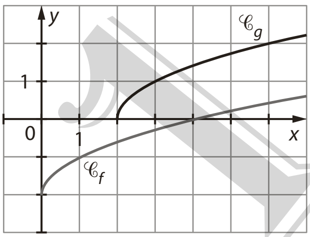
63 **1.** Soit a et b deux réels de $[0 ; +\infty[$ tels que $a < b$. La fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$. Ainsi, $3 \times \sqrt{a} \leqslant 3 \times \sqrt{b}$, d'où $3 \times \sqrt{a} - 3 \leqslant 3 \times \sqrt{b} - 3$, c'est-à-dire $f(a) \leqslant f(b)$. La fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2.



64 **1.** f est définie sur $[0 ; +\infty[$, g est définie sur $[2 ; +\infty[$.
C'est la fonction g qui est représentée.

2.



3. On a $f(x) < g(x)$ d'après le graphique.

65 **1.** f est définie sur $]0 ; +\infty[$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $]0 ; +\infty[$. La représentation de la fonction f est celle de la fonction racine carrée privé de l'origine.

66 **a.** Vrai.
b. Faux.
c. Vrai.

67 C'est vrai, il faut multiplier et diviser $f(x)$ par la quantité conjuguée de $1 - \sqrt{x}$.

68 Oui, elles sont égales ; il suffit de réduire les deux quotients de $f(x)$ au même dénominateur.

69 Vrai.

70 Faux, elle est définie sur $]-\infty ; 0]$.

71 Faux, elle est décroissante.

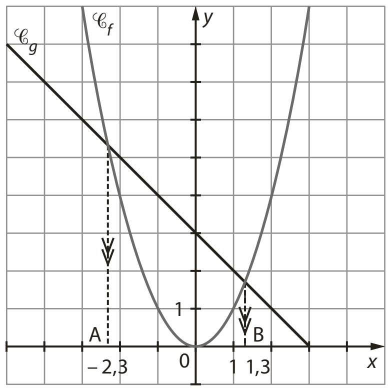
72 Vrai car $|x|$ est toujours un nombre positif.

73 **1.** On a $\dfrac{1}{x} - x = \dfrac{1-x^2}{x} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{x}$. Le signe de $\dfrac{1}{x} - x$ est le même que celui de $1 - x$ sur $]0 ; +\infty[$.
Si $0 < x \leqslant 1$, alors $\dfrac{1}{x} > x$ et si $x \leqslant 1$, alors $1x < x$.
2. $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ si $0 < x \leqslant 1$.
$\mathscr{C}_g$ est au-dessous de $\mathscr{C}_f$ si $1 < x$.

74 **1.** $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$. Le signe de $x^3 - x^2$ est celui de $x - 1$.
$x^2 - x = x(x-1)$. Le signe de $x^2 - x$ est celui de $x - 1$ sur $[0 ; +\infty[$. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$ et si $x \geqslant 1$, alors $x < x^2 < x^3$.
2. $\mathscr{C}_h$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ qui est en dessous de $\mathscr{C}_f$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$.
$\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ qui est en dessous de $\mathscr{C}_h$ si $x \geqslant 1$.

75 $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$; sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ le signe de $x^3 - x$ est le même que celui de $x + 1$ car $x \leqslant 0$ et $x - 1 < 0$ sur l'intervalle d'étude.
$x^3 - x < 0$ si $x \leqslant -1$ et $x^3 - x \geqslant 0$ si $-1 \leqslant x \leqslant 0$. Ainsi, $x^3 < x$ si $x < -1$ et $x^3 > x$ si x est dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.

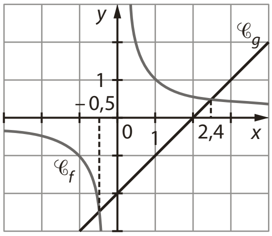
76 **1.**

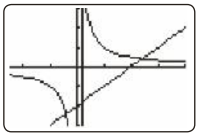


2. Les courbes se coupent aux points d'abscisses $-2{,}3$ et $1{,}3$ (environ).
$f(x) < g(x)$ si x est dans l'intervalle $[x_A ; x_B]$ et $f(x) > g(x)$ sinon.

77 **1.** $\mathscr{P}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ si x est dans $]-\infty ; -0{,}4[\cup]0 ; 2{,}4]$.

$\mathscr{P}$ est en dessous si x est dans $[-0{,}4\ ;0\ [\ \cup\ [\ 2{,}4\ ;+\infty[$.





2. $f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x} - (x-2) = -\dfrac{x^2-2x-1}{x}$. Le numérateur s'annule pour $x_1 = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = 1+\sqrt{2}$.

3.

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$-x$		+	|	+	0	−	|	−	
x^2-2x-1		+	0	−	|	−	0	+	
$f(x)-g(x)$		+	0	−	‖	+	0	−	

$f(x) > g(x)$ si x est dans $]-\infty\ ;x_1[\ \cup\ ]0\ ;x_2[$.

$f(x) < g(x)$ si x est dans $]x_1\ ;0[\ \cup\ ]x_2\ ;+\infty[$.

Ce résultat confirme l'observation car $x_1 \approx -0{,}4$ et $x_2 \approx 2{,}4$.

78 **1.** $f(x) < g(x)$ si $x < 0$ ou si x est dans l'intervalle $[1\ ;2]$.

$f(x) > g(x)$ si x est dans l'intervalle $]0\ ;1[$ ou $x > 2$.

2. Étude du signe de $\dfrac{2}{x} - (-x+3) = \dfrac{(x-2)\times(x-1)}{x}$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		−	0	+	|	+	|	+	
$(x-2)(x-1)$		+	|	+	0	−	0	+	
$f(x)-g(x)$		−	‖	+	0	−	0	+	

Le tableau confirme l'observation du graphique.

79 **1.** $f(x) - g(x) = x^2 - (-3x+4) = x^2 + 3x - 4$. $\Delta = 25$: ce trinôme a deux racines -4 et 1. Le coefficient de x^2 est positif, d'où le tableau de signes de $f(x) - g(x)$:

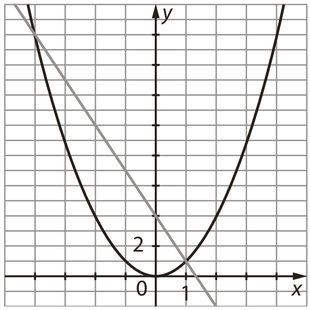
x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		+	0	−	0	+	

$f(x) - g(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant -4$ ou $x \geqslant 1$.

$f(x) - g(x) \leqslant 0$ si $-4 \leqslant x \leqslant 1$

2. Si $x \leqslant -4$ ou $x \geqslant 1$ $\mathscr{P}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$; si $-4 \leqslant x \leqslant 1$ $\mathscr{P}$ est au-dessous de $\mathscr{D}$.

3.



80 Vrai.

81 Faux. Un contre-exemple avec $x = 1{,}2$ par exemple : $\sqrt{x^2-1} \approx 0{,}67$, $x^2 - 1 \approx 0{,}44$ et $(x^2-1)^2 \approx 0{,}19$ donc $\sqrt{x^2-1} > x^2 - 1 > (x^2-1)^2$.

82 Vrai.

83 **a.**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↗	-4	↘

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	↘	2	↗

84 u est la fonction inverse, elle est décroissante sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

a. $f = -4 \times u$; f est croissante sur $]0\ ;+\infty[$ car -4 est négatif.

b. $g = 2 \times u + 1$; $2u$ est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$, donc $2u + 1$ est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$.

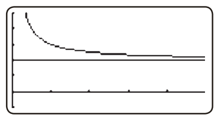
c. $g = -4 \times u + 1$; g est croissante sur $]0\ ;+\infty[$ car g est de la forme $\lambda u + k$, avec $\lambda = -4$ et $k = 1$, et $\lambda < 0$.

85 f est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

g est croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

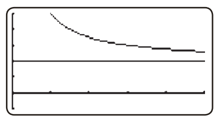
86 On ajoute 2.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	‖	↘



On multiplie par 3 et on ajoute 2.

x	0	$+\infty$
$g(x)$	‖	↘



87

x	-2		0		2
$u(x)$	13	↘	1	↗	13

$u(x) > 0$ sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

x	-2		0		2
$f(x)$	$\frac{1}{13}$	↗	1	↘	$\frac{1}{13}$

88 **1.** $x^2 + 1 > 0$, donc la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$.

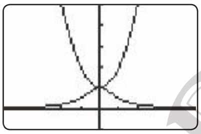
2. $g = u + 1$ avec $u(x) = x^2$: g a le même sens de variation que la fonction carré.

$g(x) > 0$ et $h = \frac{1}{g}$, les fonctions g et h ont des sens de variations contraires.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		↘	1	↗	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		↗	1	↘	

3.



89 **1.** Si $x > 2$, alors $3x - 6 > 0$ et si $x < 2$, alors $3x - 6 < 0$.

2. f est définie sur $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.

Sur $]-\infty\,;2[$ la fonction u garde le même signe. Comme u est une fonction croissante sur cet intervalle, alors la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;2[$. Même raisonnement sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$: la fonction f est décroissante sur $]2\,;+\infty[$.

90 **1.** Il faut que $3 - x \geqslant 0$, donc x dans l'intervalle $[3\,;+\infty[$.

2. La fonction u définie par $u(x) = 3 - x$ est décroissante. Comme $g(x) = \sqrt{u(x)}$, la fonction g est décroissante sur $[3\,;+\infty[$.

91 Sur $[2\,;+\infty[$ la fonction $u(x) = x^2 - 4$ est positive et elle est croissante, donc la fonction $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est croissante sur le même intervalle.

92 Sur $[-1\,;1]$ la fonction $u(x) = 1 - x^2$ est positive et elle est croissante sur $[-1\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+1]$, donc la fonction $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est croissante sur $[-1\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+1]$.

93 **1.** $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[\,\cup\,\left]\frac{-1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2. Soit u la fonction définie par $u(x) = 2x + 1$.

Sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$, $u(x) < 0$ et est croissante, donc $f = \frac{1}{u}$ est décroissante.

Sur $\left]\frac{-1}{2}\,;\,+\infty\right[$, $u(x) > 0$ et est croissante, donc $f = \frac{1}{u}$ est décroissante.

95 **1.** u est décroissante sur $]-\infty\,;6]$ et $u(x) \geqslant 0$ pour x de cet intervalle.

2. La fonction $3 \times \sqrt{u} + 4$ est décroissante sur $]-\infty\,;6]$ car on multiplie par 3 (positif) et on ajoute 4.

u est croissante et est strictement positive.

96 **a.** $2u + 1$ est croissante. **b.** $-u$.

c. $\frac{2}{u}$ est décroissante. **d.** $2\sqrt{u}$ est croissante.

97

x	0		6
$u(x)$	3	↘	-1

x	1		6
$f(x)$	1	↘	-3

x	1		6
$g(x)$	9	↘	-3

x	1		6
$h(x)$	-1	↗	5

98 **1.**

x	-5		-1		1
$-u(x)$	-10	↗	-3	↘	-4

x	-5		-1		1
$2u(x)$	20	↘	6	↗	8

x	-5		-1		1
$-0{,}5u(x) + 25$	20	↗	$23{,}5$	↘	23

2. Si $-5 \leqslant x \leqslant 1$, alors $-10 \leqslant -u(x) \leqslant -3$;

si $-5 \leqslant x \leqslant 1$, alors $6 \leqslant 2u(x) \leqslant 20$;

si $-5 \leqslant x \leqslant 1$, alors $20 \leqslant -0{,}5u(x) + 25 \leqslant 23{,}5$.

99 u ne s'annule pas ; sur chaque intervalle, u garde un signe constant. La fonction $\frac{1}{u}$ est définie sur $[3\,;+\infty[$.

x	-3		0		3		$+\infty$
$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{16}$	↗	1	↘	$\frac{1}{9}$	↗	$\frac{1}{4}$

100 La fonction u est positive, donc u est définie sur $[3\,;+\infty[$.

1. D'après le graphique :

x	-3		0		5
u	7	↗	10	↘	2

La fonction u ne s'annule pas sur $[-3\ ;5]$.
La fonction u est positive sur $[-3\ ;5]$

x	-3		0		5
$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{7}$	↘	$\frac{1}{10}$	↗	$\frac{1}{2}$

x	-3		0		5
$\sqrt{u}$	$\sqrt{7}$	↗	$\sqrt{10}$	↘	$\sqrt{2}$

2. $\frac{1}{10} \leqslant \frac{1}{u(x)} \leqslant \frac{1}{2}$ et $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{u(x)} \leqslant \sqrt{10}$.

101 On a $u(x) = (2x+1)^2 - 4$, $u(x)$ s'annule pour $\frac{1}{2}$ et $-\frac{3}{2}$ d'où :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
u		↘	0	↘	-4	↗	0	↗	

1. Sur chaque intervalle où elle n'est pas nulle, u garde le même signe. u et $\frac{1}{u}$ varient dans le sens contraire.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\frac{1}{u}$		↗	‖	↗	$\frac{1}{4}$	↘	‖	↘	

2. u est positive sur $\left]-\infty\ ;-\frac{3}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[$.

u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\sqrt{u}$		↘	0		pas définie		0	↗	

102 $u(x) = (x-3)^2 + 2$, donc la fonction u est toujours positive et ne s'annule pas.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
u		↘	2	↗	

1. La fonction $\frac{1}{u}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\frac{1}{u}$		↗	$\frac{1}{2}$	↘	

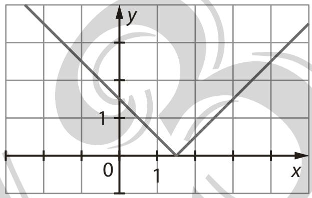
2. La fonction $\sqrt{u}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$\sqrt{u}$		↘	$\sqrt{2}$	↗	

103 **1.** On a $4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \sqrt{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}$.

x	-3		0		3		$+\infty$
$\sqrt{u}$	4	↘	1	↗	3	↘	2



Si $x \geqslant \frac{3}{2}$, alors $\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} = x - \frac{3}{2}$.

Si $x \leqslant \frac{3}{2}$, alors $\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} = -\left(x-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - x$.

Donc $f(x) = \sqrt{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} = \left|x - \frac{3}{2}\right|$.

3. Si $x \geqslant \frac{3}{2}$, alors $f(x) = x - \frac{3}{2}$.

Si $x \leqslant \frac{3}{2}$, alors $f(x) = \frac{3}{2} - x$.

105 Soit a et b deux réels de l'intervalle I tels que $a < b$ et u une fonction croissante sur cet intervalle I.

Alors $u(a) < u(b)$.

1. $u(a) + 3 < u(b) + 3$. Ce qui veut dire par définition que la fonction $u + 3$ est croissante sur I (puisqu'elle conserve le sens des inégalités).

2. $u(a) + k < u(b) + k$. Ce qui veut dire par définition que la fonction $u + k$ est croissante sur I.

106 **1.** $2 \times u(a) < 2 \times u(b)$ car 2 est un nombre positif. Ce qui veut dire par définition que la fonction $2 \times u$ est croissante sur I (puisqu'elle conserve le sens des inégalités).

2. Si $\lambda > 0$, alors $\lambda \times u(a) < \lambda \times u(b)$, ce qui veut dire par définition que la fonction $\lambda \times u$ est croissante sur I.

3. Si $\lambda < 0$, alors $\lambda \times u(a) > \lambda \times u(b)$, ce qui veut dire par définition que la fonction $\lambda \times u$ est décroissante sur I puisque si $a < b$, on a $\lambda \times u(a) > \lambda \times u(b)$.

107 Sur l'intervalle $[0\ ;5]$, la fonction $u(x) = x^2 + 3$ est croissante et $u(x) > 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\ ;5]$. Donc si $0 \leqslant x \leqslant 5$, alors $f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(5)$, c'est-à-dire $\frac{4}{3} \geqslant f(x) \geqslant 12$.

108 **1.** La fonction u est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]4 ; +\infty[$; elle est strictement positive sur ce même intervalle.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$ sur $]4 ; +\infty[$.
Cette fonction est décroissante. On a $f(x) = 2 + 5 \times g(x)$.
Ici $\lambda = 5$ et $k = 2$. La fonction f est croissante sur $]4 ; +\infty[$.

109 **1.** Sur l'intervalle [1 ; 4], la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, donc la fonction $u : x \mapsto 1 + \sqrt{x}$ l'est aussi. De plus, elle a toujours le même signe, donc la fonction $f = \dfrac{1}{u}$ est strictement décroissante sur l'intervalle [1 ; 4].
2. Si $1 \leqslant x \leqslant 4$, alors $f(1) \geqslant f(x) \geqslant f(4)$, donc $\dfrac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

110 Vrai car la fonction carré est décroissante, positive sur le même intervalle.

111 Vrai car $x \mapsto 1 - x$ décroissante sur le même intervalle et $\lambda = 2$ qui est positif.

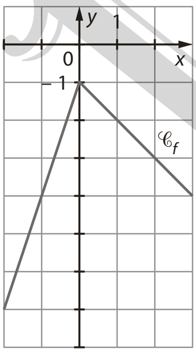
112 Vrai car $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et la fonction inverse est décroissante.

113 Faux. Le contre-exemple : $8 < -3$; $f(-8) = 3$ et $f(-3) = 2$, donc $f(-8) > f(-3)$. On pourrait démontrer que la fonction est décroissante car la fonction affine $x \mapsto 1 - x$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$.

x	2		3		2
u	0	↘	-4	↗	0

2. Sur l'intervalle $]-2 ; 2[$, la fonction u est toujours négative.
La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4}$ est croissante sur $]-2 ; 0]$, décroissante sur $[0 ; 2[$. On a $f(x) = 1 + 3 \times g(x)$ avec $k = 1$ et $\lambda + 3$. La fonction f a le même sens de variation que la fonction g.

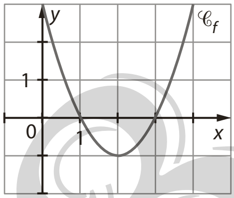
115 Si $x \leqslant 0$, alors $f(x) = -x - 1$.
Si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = 3x - 1$.



116 **1.** $f(x) = \dfrac{x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{x(x+1)}{x+1} - \dfrac{1}{x+1} = x - \dfrac{1}{x+1}$.
$a = 1$ et $b = -1$.

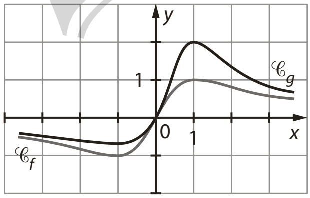
2. La fonction $g : x \mapsto (-1) \times \dfrac{1}{x+1}$ est croissante sur $]1 ; +\infty[$ car la fonction $x \mapsto x + 1$ est positive, croissante sur le même intervalle et on multiplie par $\lambda = -1$.
Donc si $1 < a < b$, alors $g(a) < g(b)$,
d'où $g(a) + a < g(b) + a < g(b) + b$, c'est-à-dire que $f(a) < f(b)$.

117 On a $u(x) = (x-2)^2 - 1$.



Sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$, u est positive et décroissante. La fonction f est donc décroissante sur le même intervalle.

118 **1.** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction g aussi car $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$.
On vérifie que $f(x) - g(x) = \dfrac{-x^2}{(x^2+1)(x^2-x+1)} \leqslant 0$.
2. $\mathscr{C}_f$ est toujours en dessous de $\mathscr{C}_g$ et elles n'ont qu'un seul point commun l'origine du repère. On peut vérifier en construisant les courbes.



POUR FAIRE LE POINT

1 A ; **2** B et D ; **3** D ; **4** C et D ; **5** A, B et D ; **6** C ; **7** A et C ; **8** C ; **9** B et D ; **10** B et D ; **11** C.

POUR APPROFONDIR

119 **1. a.** $C(x) = 20\,000 + 16x$ sur l'intervalle $[0 ; 10\,000]$.
b. C'est une fonction croissante sur cet intervalle.
2. a. Si M est la fonction coût moyen définie sur $]0 ; 10\,000]$:
$M(x) = 16 + \dfrac{20\,000}{x}$.
b. Si u est la fonction inverse définie sur $]0 ; 10\,000]$, on a $M(x) = 16 + 20\,000 \times u(x)$. La fonction M est décroissante sur l'intervalle.

c. *A priori* non car un objet fabriqué coûte 16 € auquel il faut ajouter la proportion du coût total qui diminue quand le nombre d'objets fabriqués augmente.

120 **1.** La fonction f est définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$, la fonction g sur $]-\infty\,;4[\,\cup\,]4\,;+\infty[$.

2. On a $f(x) = \dfrac{3x}{x} + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{3x-12}{x-4} + \dfrac{1}{x}$, d'où le résultat.

3.

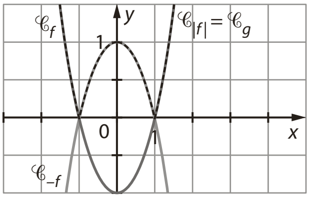
x	0	$+\infty$
f	$\|\|$	$\searrow$

x	4	$+\infty$
g	$\|\|$	$\searrow$

4. $f(t-2) = \dfrac{3(t-2)+1}{t-2} = \dfrac{3t-5}{t-2}$

et $g(t+2) = \dfrac{3(t+2)+11}{(t+2)-4} = \dfrac{3t-5}{t-2}$.

121 Si $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$, alors $g(x) = f(x)$. Si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, alors $g(x) = -f(x)$. $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de l'axe des abscisses.



122 **1.** Il faut tenir compte du signe de $f(x)$ selon les valeurs de x :

$f(x) \geqslant 0$ si x est dans l'intervalle $[-2\,;2]$

et $f(x) < 0$ si x appartient à $]-\infty\,;-2]\cup[2\,;+\infty[$.

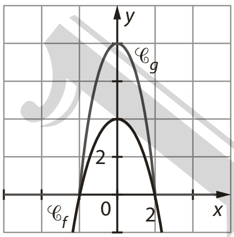
En utilisant la définition de la valeur absolue :

si x appartient à $]-\infty\,;-2]\cup[2\,;+\infty[$, alors $g(x) = 0$;

si x est dans l'intervalle $[-2\,;2]$,

alors $g(x) = 2 \times f(x) = 8 - 2x^2$.

2. L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;-2]\cup[2\,;+\infty[$.



123 **1.** On réduit au même dénominateur :

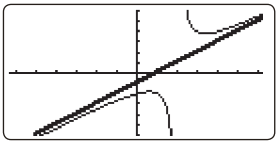
$$x - 1 + \frac{2}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} + \frac{2}{x-2} = f(x).$$

2. On a $f(x) = g(x) + \dfrac{2}{x-2}$, d'où $d(x) = \dfrac{2}{x-2}$.

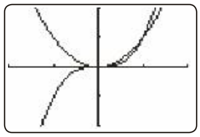
Si $x > 2$, alors $d(x) > 0$ et si $x < 2$, alors $d(x) \leqslant 0$.

3. Si $x > 2$, alors $f(x) - g(x) > 0$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ et si $x < 2$, alors $f(x) - g(x) \leqslant 0$, la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite Δ.

4.



124 **1. a.**



b. Si $x \leqslant 1$, alors $x^3 \leqslant x^2$ et si $x > 1$, alors $x^3 > x^2$.

2. On a $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$. Le signe de $x^3 - x^2$ est le même que celui de $x - 1$. Ce qui confirme le résultat de la question précédente.

3. $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$. Il faut considérer la parité de n.

n est pair : $x^{n+1} - x^n$ a le même signe que $x - 1$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^n		$+$	0	$+$		$+$	
$x^{n+1}-x^n$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Si $x > 1$, alors $x^{n+1} > x^n$ et si $x \leqslant 1$, alors $x^{n+1} \leqslant x^n$.

n est impair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^n		$-$	0	$+$		$+$	
$x^{n+1}-x^n$		$+$	0	$-$	0	$+$	

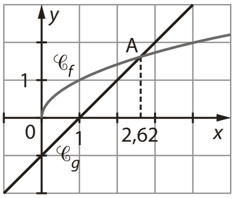
Si x est dans $]-\infty\,;0]\cup[1\,;+\infty[$, alors $x^{n+1} > x^n$ et si x est dans l'intervalle $[0\,;1]$, alors $x^{n+1} \leqslant x^n$.

125 **1.** L'inéquation (I) n'a de sens que si $x \geqslant 0$ et on a en élevant au carré : $x < \left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2$ car la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Réciproquement, si $x > 0$, alors $x + \dfrac{1}{3} > 0$ et comme la fonction racine carrée est croissante, on a l'inéquation (I).

2. L'inéquation $x < \left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2$ équivaut à $x < x^2 + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{9}$ et à $0 < x^2 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}$. Le discriminant vaut $-\dfrac{1}{3}$, donc l'expression $x^2 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}$ est strictement positive, l'ensemble des solution est $\mathbb{R}$. D'après la question **1.**, cela signifie que l'inégalité (I) est vraie.

3. Du point de vu graphique, la courbe représentative de la fonction racine carrée est en dessous de la droite qui représente la fonction affine définie par $g(x) = x + \dfrac{1}{3}$.

126 **1.**



2. Graphiquement, l'équation n'a qu'une solution qui est l'abscisse du point d'intersection A : environ 2,6.

3. a. Soit α une solution de l'équation $\sqrt{x} = x - 1$, alors $\sqrt{\alpha} = \alpha - 1$ et comme $\sqrt{\alpha} \geqslant 0$, on a $\alpha - 1 \geqslant 0$, d'où $\alpha \geqslant 1$.

b. On suppose $x \geqslant 1$, alors $\sqrt{x} = x - 1$ équivaut à $\left(\sqrt{x}\right)^2 = (x-1)^2$, c'est-à-dire $x = (x-1)^2$.

c. $x = (x-1)^2$ équivaut à $x^2 - 3x + 1 = 0$. Cette équation a deux solutions : $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Seule $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ est plus grande que 1. Conclusion, l'équation $\sqrt{x} = x - 1$ a une seule solution $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

127 **1.** Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$

et $f(x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.

x	$+\infty$		$\frac{1}{2}$		$-\infty$
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$		↘	$\frac{3}{4}$	↗	

La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

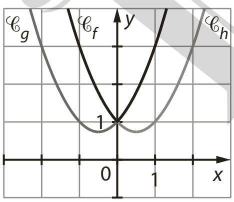
2. Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$ et $f(x) = x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.

x	$+\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\infty$
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$		↘	$\frac{3}{4}$	↗	

La fonction f est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	1	↗	

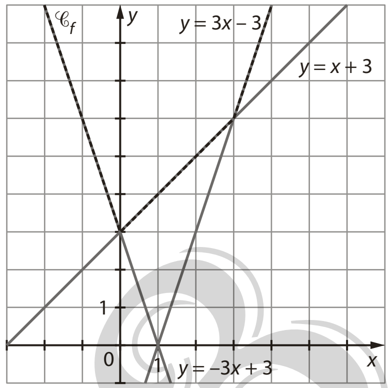


128 **1.** On peut faire un tableau.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$2\,|x|$		$-2x$	0	$2x$	6	$2x$	
$|x-3|$		$-x+3$	3	$-x+3$	0	$x-3$	
$f(x)$		$-3x+3$	3	$x+3$	6	$3x-3$	

Si $x \leqslant 0$, alors $f(x) = -3x + 3$;
si $0 \leqslant x \leqslant 3$, alors $f(x) = x + 3$;
si $x \geqslant 3$, alors $f(x) = 3x - 3$.

2.



129 **1.** ***Remarque :*** *cette propriété n'apparaît nulle part dans les programmes de mathématiques, c'est pour cela que nous demandons de la démontrer.*

Si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$ et si $c \leqslant d$, alors $b + c \leqslant b + d$.
D'où comme $b + c$ apparaît dans les deux inégalités, on déduit $a + c \leqslant b + d$.

2. Il faut examiner deux cas.
Si $x \geqslant 0$, on a $|x| = x$.
Si $x \leqslant 0$, alors il est clair que $x \leqslant 0 \leqslant |x|$ puisqu'une valeur absolue est toujours positive.

3. a. On a $x \leqslant |x|$ et $y \leqslant |y|$ (question **2.**) et d'après question **1.** on a $x + y \leqslant |x| + |y|$.

b. On a $-(x + y) = (-x) + (-y) \leqslant |-x| + |-y| = |x| + |y|$, d'où la réponse.

4. Si $x + y \geqslant 0$, alors $|x + y| = x + y \leqslant |x| + |y|$ (question **3.**)
Si $x + y \leqslant 0$, alors $|x + y| = -(x + y) \leqslant |x| + |y|$ (question **4.**).
On en déduit la propriété de l'inégalité triangulaire.

130 **1.** Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, l'égalité $|xy| = |x| \times |y|$ est évidente.
Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$, d'où $|xy| = xy$.
D'autre part $|x| = -x$ et $|y| = -y$, ce qui donne $|x| \times |y| = (-x) \times (-y) = xy$ d'après la règles des signes.
Ainsi, $-|xy| = |x| \times |y|$.
Si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, le produit xy est négatif, d'où $|xy| = -xy$.
D'autre part dans ce cas, $|x| = -x$ et $|y| = y$, ce qui conduit à $|x| \times |y| = -xy$.
On en déduit que $|xy| = |x| \times |y|$. On peut refaire la même chose en échangeant le rôle de x et de y.
Conclusion : dans tous les cas $|xy| = |x| \times |y|$.

2. On sait que, pour x non nul, on a $x \times \dfrac{1}{x} = 1$, donc, d'après la question précédente, on déduit que :

$$|x| \times \left|\frac{1}{x}\right| = 1, \text{ d'où } \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$

La deuxième égalité s'obtient clairement si on remarque que $\dfrac{x}{y} = x \times \dfrac{1}{y}$.

131 **1.** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Si $x \geqslant 0$, alors :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}.$$

b. Sur l'intervalle $[0\ ; +\infty[$, la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est croissante et positive. On déduit que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est décroissante sur le même intervalle.

Comme $f = -u + 1$, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ; +\infty[$.

Remarque : *on pourrait démontrer de manière analogue que la fonction f est croissante sur l'intervalle* $]-\infty\ ; 0]$.

3. a. Comme $(-x)^2 = x^2$ et que $|-x| = x$, l'égalité $f(-x) = f(x)$ est évidente.

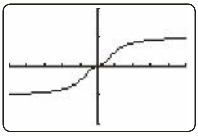
b. Calculons les coordonnées du milieu du segment $[MM']$: $\dfrac{x_M + x_{M'}}{2} = \dfrac{x + (-x)'}{2} = 0$

et $\dfrac{y_M + y_{M'}}{2} = \dfrac{f(x) + f(-x)'}{2} = \dfrac{f(x) - f(x)'}{2} = 0.$

Les coordonnées sont $(0\ ; 0)$: l'origine du repère.

c. La courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

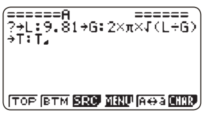
d.



132 **1.** Sur le graphique, on lit $f(-1) = 2$ et $h(-1) = -1$. On en déduit que $k = 3$. Ainsi $h = f + 3$.

2. Sur le graphique, on lit $f(-1) = 2$ et $g(-1) = -4$. On en déduit que $\lambda = -2$. Ainsi $g = (-2) \times f$.

133 **1.** Programme de calcul

Début **Variable** *L, T, g* **Entrée** Saisir *L* **Traitement** G := 9,81 $T=2*\pi*\sqrt{\frac{L}{G}}$ **Sortie** Afficher *T* **Fin**	**Algobox** VARIABLES L EST_DU_TYPE NOMBRE T EST_DU_TYPE NOMBRE G EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE L G PREND_LA_VALEUR 9.81 T PREND_LA_VALEUR 2*Math.PI*sqrt(L/G) AFFICHER T FIN_ALGORITHME
	TI
	
	CASIO
	

2. On suppose que ℓ est fixée. Soit $f : x \mapsto 2\pi \times \sqrt{\dfrac{\ell}{x}}$, alors $f(x) = 2\pi\sqrt{\ell}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. La fonction racine carrée est croissante et positive sur $]0\ ; +\infty[$. Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur le même intervalle et comme $f = k \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ avec $k = 2\pi\sqrt{\ell} > 0$, on en déduit que f est aussi décroissante sur $]0\ ; +\infty[$. Ceci veut dire que si x augmente, $f(x)$ diminue, d'où si g augmente, la période $T = f(g)$ diminue.

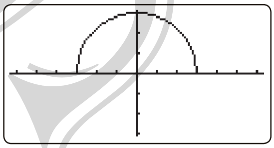
134 **1. a.** Sur l'intervalle $[-3\ ; 3]$, $9 - x^2 \geqslant 0$. On a le tableau de variation suivant pour la fonction u :

x	-3		0		$+3$
f	0	↗	3	↘	0

b. La fonction $f = \sqrt{u}$ est croissante sur $[-3\ ; 0]$ et décroissante sur $[0\ ; 3]$.

x	-3		0		$+3$
u	0	↗	9	↘	0

c.



2. a. $OM^2 = x^2 + (f(x))^2 = x^2 + 9 - x^2 = 9$, d'où $OM = 3$. Ainsi si M est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$, alors M est un point du cercle de centre O et de rayon 3.

b. Énoncé de la réciproque : si M est un point du cercle de centre O et de rayon 3, alors M est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$. La réciproque est fausse.

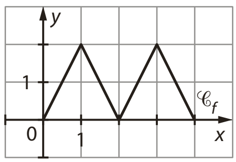
Soit A $(0\ ; -3)$, on a $OA = 3$ mais $f(0) = 3 \neq -3$.

c. Soit g la fonction définie sur $[-3\ ; 3]$ par $g(x) = -f(x)$.

Si $OM = 3$, alors $x^2 + y^2 = 9$, d'où $y^2 = 9 - x^2$, c'est-à-dire $y = \sqrt{9 - x^2}$ ou $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

Ainsi, M est un point de $\mathscr{C}_f$ ou un point de $\mathscr{C}_g$.

136 **1.** *Une erreur s'est glissée dans le manuel : il n'y a pas d'exercice 135.*



2. On a $f(0) = f(2) = f(4) = 0$ et $f(1) = f(3) = 2$.

Sur $[0\ ; 2]$, alors $f(x) = ax$.

Soit x de l'intervalle $[2\ ; 3]$, alors $f(x) = ax + b'$ (les segments sont parallèles) avec $f(2) = 2a + b' = 0$.

D'où $b' = -2a$. Ainsi $f(x) = a(x-2) = f(x-2)$.

Sur [1 ; 2], alors $f(x) = a'x + b$ avec $f(1) = a' + b' = 2$.

Soit x de l'intervalle [3 ; 4], alors $f(x) = a'x + b''$ (les segments sont parallèles) avec $f(3) = 3a' + b'' = 2 = a' + b'$, d'où $b'' = b' - 2a$.

Ainsi $f(x) = a'x + b' - 2a = a'(x - 2) + b' = f(x - 2)$.

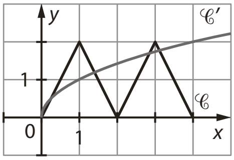
Conclusion : pour x de l'intervalle [2 ; 4], on a $f(x) = f(x - 2)$.

3. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $f(x) = 2x$; si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $f(x) = 4 - 2x$.

4. Si $2 \leqslant x \leqslant 3$, alors $x - 2$ est dans l'intervalle [0 ; 1] et $f(x) = f(x - 2) = 2(x - 2) = 2x - 4$.

Si $3 \leqslant x \leqslant 4$, alors $x - 2$ est dans l'intervalle [1 ; 2] et $f(x) = f(x - 2) = 4 - 2(x - 2) = -2x + 8$.

5. a.



b. Il y a quatre parties pour résoudre l'équation $f(x) = \sqrt{x}$.

• Dans l'intervalle [0 ; 1], on résout $2x = \sqrt{x}$, soit $4x^2 - x = 0 \times (4x - 1) = 0$. Deux solutions : 0 et $\frac{1}{4}$ qui sont dans [0 ; 1].

• Dans l'intervalle [1 ; 2], on résout $4 - 2x = \sqrt{x}$, soit $4x^2 - 17x + 16 = 0$. Cette équation a deux solutions : $\frac{17 - \sqrt{33}}{8}$ et $\frac{17 + \sqrt{33}}{8}$; une seule est dans l'intervalle [1 ; 2] : $\frac{17 - \sqrt{33}}{8} \approx 1{,}407$.

• Dans l'intervalle [2 ; 3], on résout $2x - 4 = \sqrt{x}$, soit $4x^2 - 17x + 16 = 0$.

Cette équation a deux solutions :

$\frac{17 - \sqrt{33}}{8}$ et $\frac{17 + \sqrt{33}}{8}$; une seule est dans l'intervalle [2 ; 3] : $\frac{17 + \sqrt{33}}{8} \approx 2{,}843$.

• Dans l'intervalle [2 ; 3], on résout $-2x + 8 = \sqrt{x}$, soit $4x^2 - 33x + 64 = 0$. Cette équation a deux solutions : $\frac{33 - \sqrt{65}}{8}$ et $\frac{33 + \sqrt{65}}{8}$; une seule est dans l'intervalle [3 ; 4] : $\frac{33 - \sqrt{65}}{8} \approx 3{,}117$.

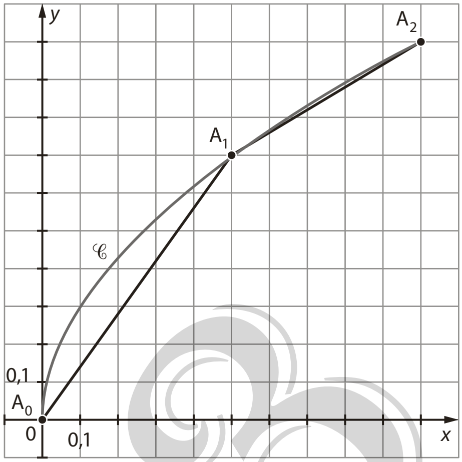
6. a. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $|x - 1| = -x + 1$ et $f(x) = 2 - 2 \times (-x + 1) = 2x$.

Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $|x - 1| = x - 1$ et $f(x) = 2 - 2 \times (x - 1) = 4 - 2x$. On retrouve l'expression de f dans l'intervalle [0 ; 2].

b. On a, pour x dans l'intervalle [2 ; 4] :

$$f(x) = f(x - 2) = 2 - 2|x - 3|.$$

137 **1. a.**



b. $A_0A_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$A_1A_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3 - \sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{7 - 4\sqrt{2}}}{2}$.

$L = A_0A_1 + A_1A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{2}}{4}}$.

2. $A_k = \left(\frac{k}{n} ; \sqrt{\frac{k}{n}}\right)$ et $A_{k+1} = \left(\frac{k+1}{n} ; \sqrt{\frac{k+1}{n}}\right)$.

$A_kA_{k+1} = \sqrt{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{k+1}{n}} - \sqrt{\frac{k}{n}}\right)^2}$

$A_kA_{k+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)^2}{n}}$.

D'où $L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)^2}{n}}$.

3.

Début **Variables** *N, L, k* **Entrée** Saisir *N* *L* prend la valeur 0 **Traitement** Pour *k* allant de 0 à *N* – 1 *L* prend la valeur $L + \sqrt{\frac{1}{N^2} + \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)^2}{N}}$ **Sortie** Afficher *L* **Fin**	**VARIABLES** N EST_DU_TYPE NOMBRE L EST_DU_TYPE NOMBRE K EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME L PREND_LA_VALEUR 0 LIRE N POUR K ALLANT_DE 0 A N–1 DEBUT_POUR L PREND_LA_ VALEUR L+sqrt(1/ pow(N,2)+pow(sqrt(K+1)– sqrt(K),2)/N) FIN_POUR AFFICHER L FIN_ALGORITHME
	TI
	

	CASIO
	

Pour $N = 10$, on a $L \approx 1{,}474\,093\,8$.
Pour $N = 100$, on a $L \approx 1{,}478\,752$.
Pour $N = 1\,000$, on a $L \approx 1{,}478\,936\,5$.
Il semble que $1{,}47 \leqslant L$. On peut émettre la conjecture que $L \leqslant 1{,}479$, mais on ajoute de plus en plus de nombres positifs…

138 ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 02S_exercice138.ggb (Geogebra).***

1. La construction avec le logiciel ne présente aucune difficulté particulière.

2. a. Comme les droites (d) et (Δ) sont parallèles, l'égalité provient du théorème de Thalès : $\dfrac{OI}{ON} = \dfrac{OM'}{OP} = \dfrac{IM'}{NP}$.

On en déduit que en particulier que $NP = \dfrac{IM' \times ON}{OI}$.

b. Si le point M appartient à $\mathscr{C}_f$, alors les coordonnées de M sont $(x\,;\,f(x))$ avec x dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et $f(x) = x^2$. Par construction, on a $OI = 1$, $ON = x$ et $IM' = f(x)$. On en déduit que les coordonnées du point P sont par construction (ON ; NP), c'est-à-dire $(x\,;\,x \times f(x))$. Soit g la fonction définie par $g(x) = x \times f(x) = x^3$. Le point P est donc un point de la courbe représentative de la fonction g.

139 **1.** Les triangles rectangles AMQ, rectangle en A, et NCT, rectangle en C, ont des côtés de l'angle droit de mêmes dimensions. Donc les hypoténuses [MQ] et [NT] sont isométriques. De manière analogue, les triangles MBN, rectangle en B, et PDQ, rectangle en D, ont des côtés de l'angle droit de mêmes dimensions. Ainsi, les hypoténuses [MN] et [TQ] sont isométriques. Le quadrilatère MNPQ a ses côtés opposées de même longueur, c'est donc un parallélogramme.

2. a. On a $AM = x$ et M qui est un point du segment [AB] de longueur 6. Donc $0 \leqslant x \leqslant 6$.

b. $MB = 6 - x$ et $NC = 10 - x$.

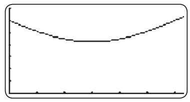
3. a. Le théorème de Pythagore dans le triangle MBN rectangle en B donne $MN^2 = MB^2 + BN^2$, d'où :
$MN = \sqrt{x^2 + (6 - x)^2}$. Donc $f(x) = \sqrt{x^2 + (6 - x)^2}$.

b. $x^2 + (6 - x)^2 = 2x^2 - 12x + 36 = 2(x - 3)^2 + 18$.

x	0	0	6
$x^2 + (6 - x)^2$	36 ↘	18	↗ 36

Comme $f(x) = \sqrt{x^2 + (6 - x)^2}$, on a :

x	0	0	6
f	6 ↘	$3\sqrt{2}$	↗ 6



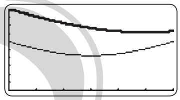
4. a. Le théorème de Pythagore dans le triangle NCP rectangle en C donne $NP^2 = NC^2 + CP^2$,
d'où $NP = \sqrt{(10 - x)^2 + x^2}$. Donc $g(x) = \sqrt{(10 - x)^2 + x^2}$.

b. $(10 - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x - 5)^2 + 50$.

x	0	5	6
$(10 - x)^2 + x^2$	100 ↘	50	↗ 52

Comme $g(x) = \sqrt{(10 - x)^2 + x^2}$, on a :

x	0	5	6
g	10 ↘	$5\sqrt{2}$	↗ $2\sqrt{13}$

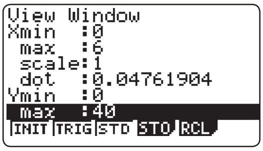


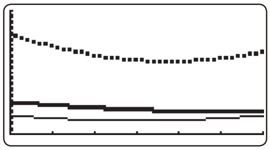
5. a. $L = 2(MN + NP) = 2\,(f(x) + g(x))$.

b. Sur l'intervalle [0 ; 3], les fonctions f et g sont décroissantes. Ainsi, sur l'intervalle [0 ; 3], la fonction h est la somme de deux fonctions décroissantes ; la fonction h est donc décroissante sur cet intervalle.
Sur l'intervalle [5; 6], les fonctions f et g sont croissantes. Ainsi, sur l'intervalle [5 ; 6], la fonction h est la somme de deux fonctions croissantes ; la fonction h est donc croissante sur cet intervalle.

c. Aucune propriété ne concerne la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

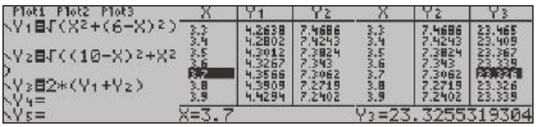
d.





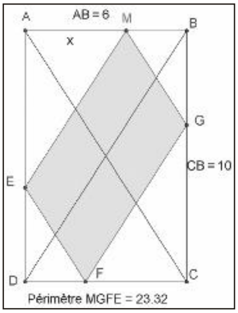
Entre 3 et 5, la fonction h (en pointillés) semble décroissante puis croissante.

e. On peut par exemple utiliser le tableau de valeur de la calculatrice. $Y1 = f(x)$, $Y2 = g(x)$ et $Y3 = 2*(Y1+Y2) = h(x)$.



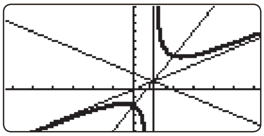
La calculatrice indique que le minimum de la fonction h est entre 3,7 et 3,8.

Remarque : *le minimum est atteint pour* $\dfrac{15}{4}$ *(= 3,75) et vaut* $4\sqrt{34} \approx 23{,}32$*, ce qui se produit quand les côtés du parallélogramme sont parallèles aux diagonales du rectangle.*



Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 02S_exercice139.ggb (Geogebra).

140 **1.**



En trait « gras » la fonction f, les droites sont les représentations graphiques de h_{-1}, h_1 et h_3. On a mis l'asymptote verticale.

2. a. $f(x) = \dfrac{x(x-1)+2}{x-1} = x + \dfrac{2}{x-1}$

donc $a = 2$ et $f(x) = g(x) + \dfrac{2}{x-1}$.

b. $f(x) - g(x) = \dfrac{2}{x-1}$, donc $f(x) - g(x)$ a le même signe que $x - 1$.

Si $x \geqslant 1$, alors $f(x) \geqslant g(x)$ et si $x \leqslant 1$, alors $f(x) \leqslant g(x)$.

$\mathscr{H}$ est en dessus de la droite $\mathscr{D}$ si $x \geqslant 1$ et $\mathscr{H}$ est en dessous de $\mathscr{D}$ si $x \leqslant 1$.

3. a. La fonction h_1 est définie par $h_1(x) = x$. La représentation graphique de h_1 est la droite d'équation $y = x$.

b. $h_m(1) = m \times 1 - m + 1 = 1$. Donc $A(1\,;h_m(1))$, c'est un point de la représentation graphique de la fonction h_m.

c. Les coordonnées des points communs à $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ vérifient le système formé des deux équations $y = f(x)$ et $y = h_m(x)$. Par substitution, les abscisses de ces points vérifient l'équation $f(x) = h_m(x)$, c'est-à-dire $\dfrac{x^2 - x + 2}{x-1} = mx - m + 1$ avec $x \neq 1$.

Le produit en croix donne :

$x^2 - x + 2 = (x-1)(mx - m + 1)$

$x^2 - x + 2 = mx^2 + (1-2m)x + m - 1$

$(1-m)x^2 + (2m-2)x + 3 - m = 0$ avec $x \neq 1$;

d'où la réponse.

d. Si $m = 1$, l'équation devient $0x^2 + 0x + 3 = 0$.

Cette équation n'a pas de solution.

e. Si $m \neq 1$, alors on doit résoudre l'équation $(1-m)x^2 + (2m-2)x + 3 - m = 0$.

$\Delta = (2m-2)^2 - 4(1-m)(3-m) = 8m - 8$.

Si $m > 1$, alors Δ est strictement positif, il y a deux solutions.

Si $m = 1$, l'équation n'a pas de solution d'après la question précédente.

Si $m < 1$, Δ est strictement négatif, il n'y a pas de solution.

Interprétation graphique :

Si $m > 1$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ ont deux points communs et si $m \leqslant 1$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ n'ont pas de point commun.

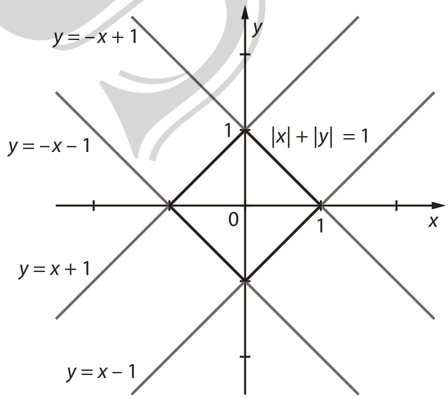
Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 02S_exercice140.ggb (Geogebra).

141 Il y a au total quatre cas suivant les signes.

Présentation sous forme de tableau :

$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert + 1$	$x \leqslant 0$	$x \geqslant 0$
$y \geqslant 0$	$-x + y = 1$	$x + y = 1$
$y \leqslant 0$	$-x - y = 1$	$x - y = 1$

$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert + 1$	$x \leqslant 0$	$x \geqslant 0$
$y \geqslant 0$	$y = x + 1$	$y = -x + 1$
$y \leqslant 0$	$y = -x - 1$	$y = x - 1$



Prises d'initiatives

142 L'équation $xy = x + y$ équivaut $y(x-1) = x$, d'où $y = \dfrac{x}{x-1}$ avec $x \neq 1$ et si $x = 1$ l'égalité devient $y = 1 + y$, ce qui est toujours faux. Donc l'ensemble cherché est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ avec $x \neq 1$.

Or $f(x) = \dfrac{x-1+1}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

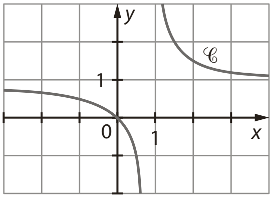
Sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto x - 1$ est croissante et strictement positive.

Donc $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x-1}$ est décroissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

Sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$, la fonction $x \mapsto x-1$ est croissante et strictement négative.

Donc $x \mapsto 1+\dfrac{1}{x-1}$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.

Représentation graphique :



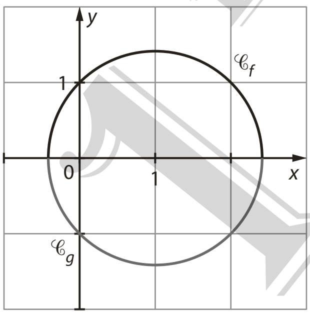
143 On a $(x-1)^2+y^2=2$, d'où $y^2=2-(x-1)^2$.
Il faut que $2-(x-1)^2 \geqslant 0$, soit $-x^2+2x+1 \geqslant 0$, c'est-à-dire que x est dans l'intervalle $[1-\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}]$.
On note $f(x)=\sqrt{2-(x-1)^2}$ et $g(x)=\sqrt{2-(x-1)^2}$ définie sur $[1-\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}]$.
On a donc $y=\sqrt{2-(x-1)^2}$ ou $y=-\sqrt{2-(x-1)^2}$.
Variations :

x	$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$
$2-(x-1)^2$	0	↗	2	↘	0

x	$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$
f	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	0

x	$1-\sqrt{2}$		0		$1+\sqrt{2}$
g	0	↘	$-\sqrt{2}$	↗	0

Ainsi :



Remarque : *La représentation graphique est le cercle de centre A (1 ; 0) et de rayon $\sqrt{2}$.*

144 On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+1}$, elle est définie si $x \neq -1$.

On a $\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2x+2+1}{x+1}=2+\dfrac{1}{x+1}$.

Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto x+1$ est croissante et strictement positive.

Donc $x \mapsto 2+\dfrac{1}{x+1}$ est décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Ainsi si $0 \leqslant x \leqslant 0{,}09$, alors $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 0{,}3$ et $g(0) \leqslant g(\sqrt{x}) \leqslant g(0{,}3)$.

Conclusion :
$$3 \leqslant \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} \leqslant \frac{36}{13} < 2{,}77.$$

145 On a $f(a \times b)=f(a)+f(b)$, où a et b entier (i).
Si l'entier n à 3 pour chiffre des unités, alors $f(n)=0$ (ii);
$f(10)=0$ (iii) ;
f est positive (iv).
D'après (ii), $f(2013)=0$.
Soit $n=2011\times 2013$, alors le chiffre des unités de n est 3, d'où $f(n)=0$. Ainsi :
$0=f(2011\times 2013)=f(2011)+f(2013)=f(2011)+0$.
Conclusion : $f(2011)=0$.
D'après (iii), $f(10)=0=f(2)+f(5)$. Or d'après (iv), f est positive, la seule possibilité est d'avoir $f(2)=0$ et $f(5)=0$.
$2012=2\times 2\times 503$.
Ainsi :
$f(2012)=f(2)+f(2)+f(503)=f(2)+f(2)=0$.
Donc $f(2012)=0$.
$2014=2\times 19\times 53$, donc :
$f(2014)=f(2)+f(19)+f(53)=0+f(19)+0=f(19)$.
Or $19\times 7=133$, donc :
$f(133)=f(19\times 7)=f(19)+f(7)$.
D'après (ii), on a :
$0=f(19)+f(7)$.
D'après (iv), f est positive, la seule possibilité est d'avoir $f(19)=0$ et $f(7)=0$.
Conclusion : on a $f(2014)=f(19)$, donc $f(2014)=0$.

F Activités TICE

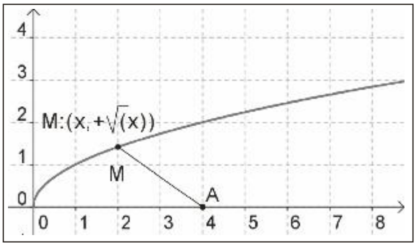
TP 1 Optimisation d'une distance avec un logiciel de géométrie et recherche d'une aire

Ce TP permet de déterminer le minimum d'une fonction racine carrée de deux façons. Il propose aussi une évaluation d'aire en utilisant le logiciel.

A. ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 02S_TP1A.ggb (Geogebra).***

L'utilisation du fichier dynamique, en observant la valeur de *a*, donne un minimum de1,94 pour la longueur AM.

B. 1.



$AM^2 = (4 - x)^2 + (\sqrt{x}) = x^2 - 7x + 16$,

d'où $AM = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$.

$f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$.

2. a. On vérifie que $x^2 - 7x + 16 = (x - 3{,}5)^2 + 3{,}75$.

x	0	0	6
$x^2 + 7x + 16$	16 ↘	3,75	↗

Donc sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, le sens de variation de la fonction u :

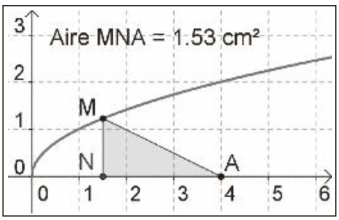
x	$-\infty$	3,5	$+\infty$
$x^2 + 7x + 16$	↘	3,75	↗

On a $f = \sqrt{u}$.

x	0	3,5	$+\infty$
f	4 ↘	$\sqrt{3{,}75}$	↗

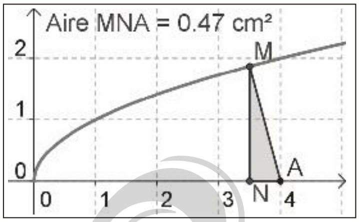
Le minimum de la longueur AM est $\sqrt{3{,}75} \approx 1{,}936$.

3. Le point est unique, ses coordonnées sont $(3{,}5 ; \sqrt{3{,}75})$.



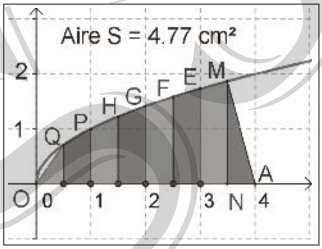
C. ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 02S_TP1C.ggb (Geogebra).***

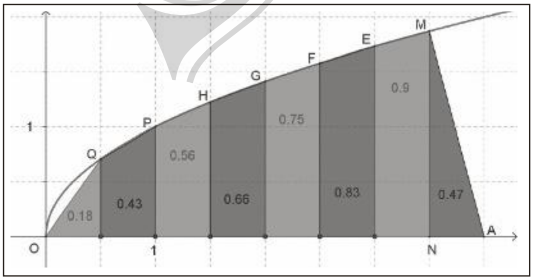
1. Construction et aire du triangle AMN.



Théoriquement, l'aire vaut :

$$\frac{MN \times NA}{2} = \frac{\sqrt{3{,}5} \times 0{,}5}{2} = \frac{\sqrt{3{,}5}}{4} \approx 0{,}467\,7.$$





Avec les valeurs indiquées, on trouve une aire de 4,8.

TP 2 Une courbe originale

Cette courbe est une ellipse. Elle est construite à l'aide de deux fonctions.

Le logiciel permet de mettre en évidence les propriétés des foyers.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 02S_TP2.ggb (Geogebra), 02S_TP2.dfw (Derive), 02S_TP2.xws (Xcas).

A. 1. L'équation $16x^2 + 25y^2 - 64x - 336 = 0$ équivaut à

$25y^2 = -16x^2 + 64x + 336$

$25y^2 = 16(-x^2 + 4x + 21)$

$y^2 = \frac{16}{25} \times (-x^2 + 4x + 21)$,

d'où la réponse $y^2 = \frac{16}{25} h(x)$.

2. L'égalité est équivalente à :
$y = \sqrt{\frac{16}{25}}\sqrt{h(x)}$ ou $y = -\sqrt{\frac{16}{25}}\sqrt{h(x)}$,
c'est-à-dire $y = \frac{4}{5}\sqrt{h(x)}$ ou $y = -\frac{4}{5}\sqrt{h(x)}$.

3. Les deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
En effet, soit M_1 et M_2 des points de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ respectivement qui ont la même abscisse.
Alors $M_1 : \left(x\ ;\ \frac{4}{5}\sqrt{h(x)}\right)$ et $M_2 : \left(x\ ;\ -\frac{4}{5}\sqrt{h(x)}\right)$.

Le milieu de $[M_1M_2]$ a pour coordonnées $(x\ ;\ 0)$, il est donc sur l'axe des abscisses et comme le repère est orthonormé, cet axe est perpendiculaire à $[M_1M_2]$, c'est donc la médiatrice.

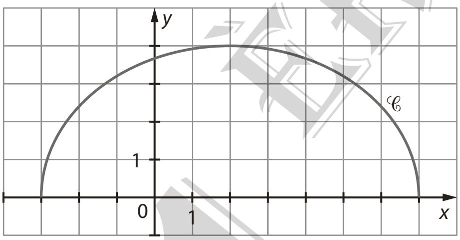
B. 1. On a $h(x) = -x^2 + 4x + 21$; $h(x) \geqslant 0$, donc $\Delta = 100$, $x_1 = -3$ et $x_2 = 7$. Le coefficient de x^2 est négatif, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-3\ ;\ 7]$.

2. Forme canonique : $h(x) = -(x-2)^2 + 25$, d'où le sens de variation sur l'intervalle $[-3\ ;\ 7]$:

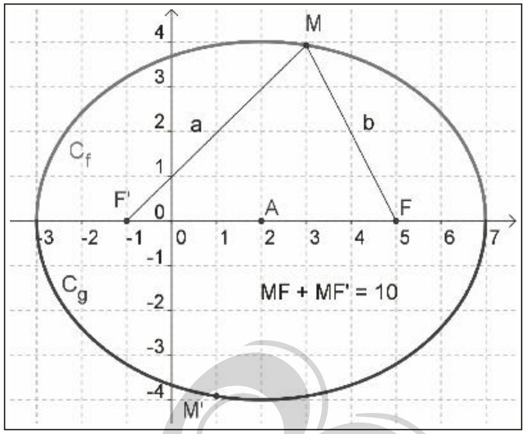
x	-3		2		7
h	0	$\nearrow$	25	$\searrow$	0

3. Comme $f = \frac{4}{5} \times h$. La fonction $\sqrt{h}$ a le même sens de variation que la fonction h.
On multiplie $\sqrt{h}$ par $\frac{4}{5} \geqslant 0$,
les fonctions f et h ont le même sens de variation.

4.



C. 1. La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



2. Le point A (2 ; 0) semble être le centre de symétrie. Avec le logiciel, on peut utiliser la fonction« symétrie centrale » de centre A et vérifier que le point M' obtenu est toujours sur la courbe $\mathscr{C}_g$ quand M décrit la fonction $\mathscr{C}_f$.

3. On constate que MF + MF' = 10.

D. 1. $MF^2 = (5-x)^2 + (y-0)^2$, d'où $MF = \sqrt{(5-x)^2 + y^2}$
$MF'^2 = (1-x)^2 + (y-0)^2$, d'où $MF' = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$.

2. $MF = \sqrt{(5-x)^2 + \left(\frac{16}{25}h(x)\right)^2}$ d'après la question.

Ainsi $MF = \sqrt{(5-x)^2 + \frac{16}{25}(-x^2 + 4x + 21)}$ d'où le résultat.
De la même façon, on monterait que :
$MF' = \sqrt{(x+1)^2 + \frac{16}{25}(-x^2 + 4x + 21)}$.

3. On obtient $a = \dfrac{\textbf{abs(3 * x – 31)}}{\textbf{5}}$.
Remarque : *En fait, on a* $MF^2 = \dfrac{(3x-31)^2}{25}$.

4. On obtient $b = \dfrac{\textbf{abs(3 * x + 19)}}{\textbf{5}}$.
Remarque : *En fait, on a* $MF^2 = \dfrac{(3x+19)^2}{25}$.

5. et **6.** On retrouve $a + b = 10$.
Si M est un point de la courbe $\mathscr{C}$, alors MF + MF' = 10.

CHAPITRE
3 Dérivation

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point.		Le nombre dérivé est défini comme limité du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite.
Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point.	• Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé.	L'utilisation des outils logiciels facilite l'introduction du nombre dérivé.
Fonction dérivée. Dérivée des fonctions usuelles : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto x^n$ (n entier naturel non nul). Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient.	• Calculer la dérivée de fonctions.	On évite tout excès de technicité dans les calculs de dérivation. Si nécessaire, dans le cadre de la résolution de problèmes, le calcul de la dérivée d'une fonction est facilité par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel. Il est intéressant de présenter le principe de démonstration de la dérivation d'un produit.

B Notre point de vue

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions de nombre dérivé d'une fonction et de tangente à sa courbe représentative, en un point. Nous avons ensuite défini la fonction dérivée et énoncé les propriétés sur les opérations, afin d'entraîner les élèves à calculer des dérivées. Ce travail se poursuivra par la suite dans le chapitre 4.
Nous avons utilisé un langage intuitif dans deux approches : l'une numérique (concernant la limite en 0), pour définir le nombre dérivé à partir d'un taux d'accroissement, l'autre graphique (passage du coefficient directeur d'une sécante à celui d'une droite qui occupe une position limite). La notation de limite est simplement mentionnée.
Le calcul du nombre dérivé d'une fonction, à partir du calcul de la dérivée, est utilisé dans la détermination d'une équation de tangente.
Nous avons fait le choix de donner des **énoncés de cours** simples illustrés d'exemples.
Les savoirs-faire sont constitués d'exercices élémentaires, applications immédiates du cours.
Dans le **choix des exercices**, nous en avons proposé plusieurs liés à des lectures graphiques.
De nombreux exercices permettent aux élèves de s'entraîner au calcul de dérivées et à la détermination d'une équation de tangente. Plusieurs exercices proposent des démonstrations, des activités de logique ou des références historiques.

Quelques exercices s'appuient sur des situations prises en dehors des mathématiques.
L'utilisation des **TICE** a été développée à plusieurs endroits dans le chapitre :
– Pour les calculatrices, nous avons présenté, dans les pages de Savoir-faire, les instructions relatives au calcul d'un nombre dérivé et au tracé d'une tangente. Ces instructions sont ensuite utilisées dans de nombreux exercices.
– Pour les logiciels, nous avons indiqué plusieurs utilisations d'un logiciel de géométrie dynamique et d'un logiciel de calcul formel pour le tracé de tangentes ou le calcul de dérivées introduit dans l'un des savoir-faire. Nous avons privilégié l'utilisation des TICE, non seulement pour calculer des dérivées ou tracer des courbes et des tangentes, mais aussi pour conjecturer ou contrôler un résultat.
Dans la page « **Chercher avec méthode** », l'énoncé choisi permet de mettre en œuvre plusieurs des méthodes introduites dans le chapitre : calcul de la dérivée d'un quotient de deux fonctions, application au calcul d'un nombre dérivé, détermination d'une équation de tangente. De plus, il est possible, ici, de contrôler certains des résultats obtenus, à l'aide d'une calculatrice : calcul du nombre dérivé et détermination de la tangente (tracé et équation).

Les notions abordées dans le chapitre 3

1. Nombre dérivé et tangente
2. Fonction dérivée
3. Dérivées et opérations

C Avant de commencer

Le QCM et les exercices proposés dans cette page permettent de faire le point d'une part sur la notion de coefficient directeur d'une droite et d'autre part sur le tracé et la détermination d'une équation de droite.

Se tester avec des QCM

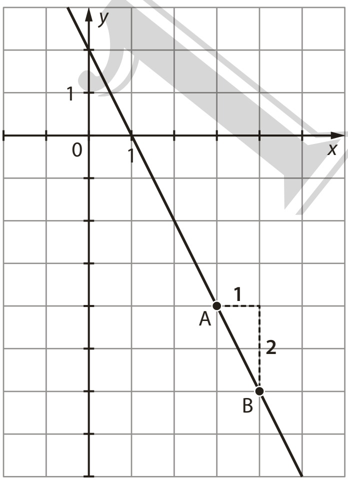
1 B ; **2** C ; **3** A ; **4** C ; **5** D ; **6** B.

Se tester avec des exercices

7 – 0,4.

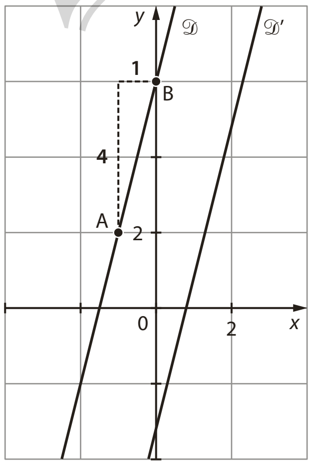
8 **a.** $y = 2x + 1$. **b.** $y = -x + 4$. **c.** $y = 3$.

9 **a.**



b. $y = -2x + 2$.

10 **a.** et **b.**



c. $y = 4x + 6$.

11 **a.** $f(2) = 9$ et $f(2 + h) = 9 + 8h + 2h^2$.

b. $f(2) = 1$ et $f(2 + h) = \dfrac{1}{2 + h - 1} = \dfrac{1}{1 + h}$.

D Activités

Activité 1 Une histoire de vitesse

Cette activité introduit le nombre dérivé comme limite d'un taux d'accroissement. Elle s'appuie sur une situation introduisant les notions de ***vitesse moyenne*** *et de* ***vitesse instantanée****. L'idée de limite est abordée ici, de manière très intuitive.*

1. La vitesse moyenne entre 0,46 s et 0,54 s est égale à $\dfrac{0,94}{0,08}$ soit 11,75 m•s^{-1}.
Entre 0,48 s et 0,52 s, elle est égale à $\dfrac{0,192}{0,04}$ soit 4,8 m•s^{-1}.

2. a. La vitesse moyenne entre les instants $t = 0,5$ et $t = 0,5 + h$ est égale à $4,9 + 4,9\,h$ pour $h > 0$.
b. Il faut lire la vitesse moyenne s'approche de plus en plus de 4,9 lorsque h s'approche de 0.
Lorsque h prend les valeurs 0,1 ; 0,01 et 0,001, on obtient respectivement pour la vitesse moyenne : 5,39 ; 4,949 ; 4,9049. La vitesse instantanée à l'instant $t = 0,5$ est égale à 4,9 m•s^{-1}.

Activité 2 Animation autour d'un point

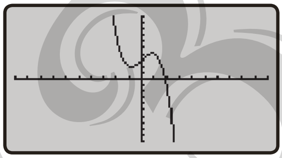
Cette activité permet d'introduire le nombre dérivé comme limite des coefficients directeurs des sécantes à une courbe passant par un point fixé de la courbe. On pourra ainsi introduire la notion de tangente à la courbe au point considéré. Cette activité utilise le fichier ***03S_activite2.ggb*** *disponible sur www.bordas-indice.fr qui permet une présentation à la classe en vidéo-projection. Cependant la copie d'écran donnée permet de traiter l'activité sans utiliser d'ordinateur.*
Pour l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, on pourra se reporter aux pages 266 à 269.

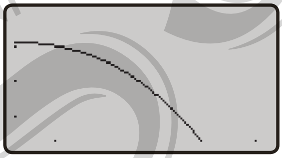
1. On observe que les coefficients directeurs des droites (AM) se rapprochent de 2 lorsque l'abscisse de M se rapproche de 1, par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures à 1. Pour x égal à 1, le logiciel affiche « ? ». Le rapport n'est pas défini.
2. a. Le point A a pour coordonnées $(1\,;\,f(1))$, soit A$(1\,;\,-1)$. Les coordonnées de M sont $(1+h\,;\,f(1+h))$.
Donc $r(h)$ le coefficient directeur de (AM) est égal à $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$. On a $f(1+h)-f(1) = h^2 - 2h$. Par suite $r(h) = h - 2$.
b. La valeur limite de $r(h)$ quand h s'approche de 0 est -2.

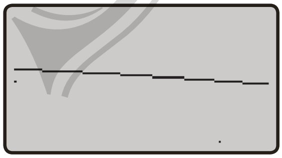
Activité 3 Une courbe à la loupe

Dans cette activité, on fait observer à l'élève qu'au voisinage d'un point donné, le tracé de la courbe est pratiquement rectiligne et se confond donc avec celui d'une droite, qui est ici donnée.
Pour l'utilisation de la fonction Zoom de la calculatrice, on se reportera, pour une calculatrice Texas à la page 272 et pour une calculatrice Casio à la page 276.

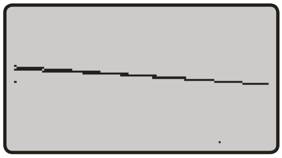
1. La première copie d'écran correspond à la fenêtre standard. Les deux autres ont été obtenues par deux agrandissements successifs autour du point A. Le dernier tracé est pratiquement rectiligne.



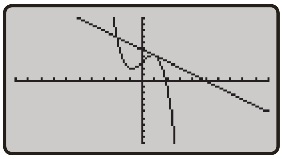




2. Le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ est confondu avec celui de la droite $\mathscr{D}$.



3. Les deux tracés sont maintenant distincts.



Activité 4 D'une courbe vers la courbe de la dérivée

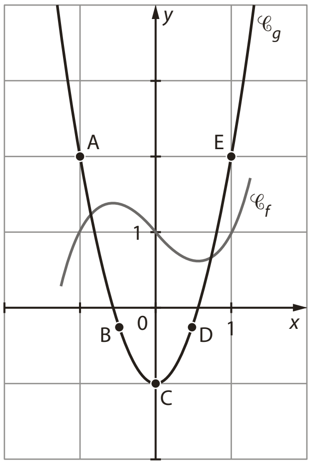
Il s'agit dans cette activité de déduire du tracé de la représentation graphique d'une fonction l'allure du tracé de la représentation graphique de sa fonction dérivée.

1. On lit $f'(-1) = 2$, $f'(0) = -1$ et $f'(1) = 2$.

2. a. Les droites T_2 et T_4 ont même coefficient directeur : $-0{,}25$.

b. On a donc $f'(0{,}5) = f'(-0{,}5) = -0{,}25$.

3. On obtient le tracé suivant :



4 . a. *Il faut lire A et B au lieu de A_1 et A_2.*

Les coordonnées de C sont $(0\,;-1)$. Donc $g(0) = c = -1$.

Les coordonnées de A sont $(-1\ ;\ 2)$ donc $g(-1) = 2$; celles de B sont $(-0{,}5\ ;-0{,}25)$ donc $g(-0{,}5) = -0{,}25$.

Les réels a et b sont donc solutions du système $\begin{cases} a - b - 1 = 2 \\ 0{,}25a - 0{,}5b - 1 = -0{,}25 \end{cases}$; on obtient $b = 0$ et $a = -3$.

b. *Il faut lire D et E au lieu de A_4 et A_5.*

Ainsi $g(x) = 3x^2 - 1$.

L'ordonnée de D est $f'(0{,}5) = -0{,}25$ et $g(0{,}5) = -0{,}25$.

L'ordonnée de E est $f'(1) = 2$ et $g(1) = 2$.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 On a $f(4) = -5$; $f(4 + h) = -5 - 2h$ donc le taux d'accroissement $r(h)$ est égal à -2, pour $h \neq 0$.

2 Comme $f(-1) = 2$ et $f(-1 + h) = h^2 - 2h + 2$, on a $f(-1 + h) - f(-1) = h^2 - 2h$, d'où $r(h) = h - 2$ pour $h \neq 0$.

3 On a $f(1) = 3$ et $f(1 + h) = 3h^2 + 6h + 3$, d'où $r(h) = 6 + 3h$.

4 **1.** Soit $r(h)$ le taux d'accroissement de f entre -2 et $-2 + h$. On a $f(-2) = 3$ et $f(-2 + h) = h^2 - 3h + 3$ donc $r(h) = \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = h - 3$ pour $h \neq 0$.

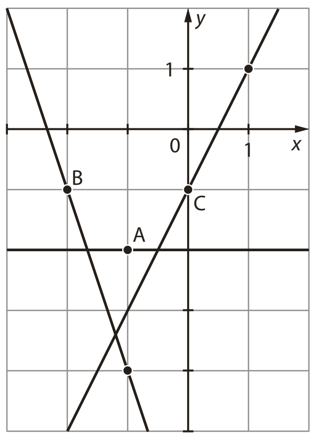
2. Quand h tend vers 0, le taux a pour limite -3. Donc f est dérivable en $a = -2$ et $f'(-2) = -3$.

5 On lit $f'(-2) = -3$.

6 On a $f(-1) = 1$ et $f'(-1) = 2$.

7 On a $f'(1) = 2$ et $f'(0) = -1$.

8 **1.** et **2.**



Pour **3.**, plusieurs tracés sont possibles.

9 **1.** $f'(x) = 2x + 5$.

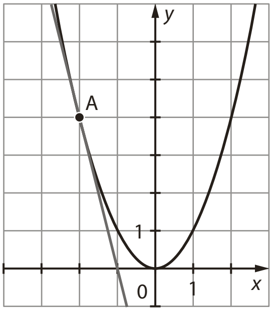
2. $f'(3) = 11$ et $f'(1) = 7$.

10 **1.** $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

2. $f'(3) = \dfrac{8}{9}$ et $f'(1) = 0$.

11 C'est le nombre dérivé de f en 2, soit -12.

12 **1.** Voici le tracé obtenu :



2. Une équation de T est $y = -4x - 4$.

3. On peut se reporter pour Texas à la page 273 et pour Casio à la page 277.

13 Le point de contact a pour coordonnées $(4 ; 2)$.

Le coefficient directeur de la tangente est $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

Une équation de la tangente est $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

14 1. On a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -1$.

2. f est le quotient des fonctions u et v.

Ainsi $f'(x) = \dfrac{-1}{(3-x)^2}$.

15 **1.** La fonction f est l'inverse de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$, par $u(x) = 3x^2 + 5$.

2. On sait que $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$. Or $u'(x) = 6x$,

donc $f'(x) = -\dfrac{6x}{(3x^2+5)^2}$.

16 **1.** $f'(x) = 8x - 3$.

2. $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

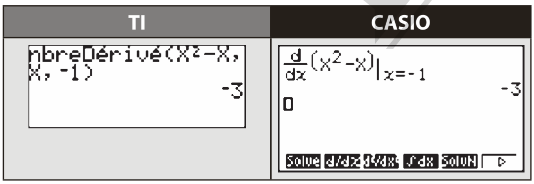
3. $f'(x) = \dfrac{-23}{(3x+5)^2}$.

POUR S'ENTRAÎNER

17 **1.** On a $f(-1) = 2$ et $f(-1+h) = h^2 - 3h + 2$.

2. Le taux d'accroissement de f entre -1 et $-1+h$ est égal à $h - 3$. Il a pour limite -3 quand h tend vers 0. Donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -3$.

3. On obtient l'écran suivant :



18 **1.** On a $g(2) = 0$ et $g(2+h) = -h^2 - 2h$.

2. Le taux d'accroissement de g entre 2 et $2+h$ est égal à $-h-2$. Il a pour limite -2 quand h tend vers 0. Donc g est dérivable en 2 et $g'(2) = -2$.

3. On utilise l'instruction *nbreDériv(* pour Texas et *d/dx* pour Casio.

19 **1.** $k(-1) = -1$ et $k(-1+h) = \dfrac{1}{-1+h}$.

2. Le taux d'accroissement de k entre -1 et $-1+h$ est égal à $\dfrac{1}{h-1}$.

Il a pour limite -1 quand h tend vers 0.

Donc k est dérivable en -1 et $k'(-1) = -1$.

3. On utilise l'instruction *nbreDériv(* pour Texas et *d/dx* pour Casio.

20 **1.** On a $f(1) = 1$ et $f(1+h) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$.

Le taux d'accroissement est donc $h^2 + 3h + 3$.

2. Ce taux a pour limite 3 lorsque h tend vers 0.

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

Pour les exercices 21 à 26, on calcule le taux $r(h)$, entre a et $a+h$, de la fonction donnée, puis la limite de ce taux lorsque h tend vers 0.

21 $r(h) = -3$ et $f'(4) = -3$.

22 $r(h) = -h - 2$ et $f'(4) = -2$.

23 $r(h) = \dfrac{-2}{2h+1}$ et $f'(0) = -2$.

24 $r(h) = h + 1$ et $f'(1) = 1$.

25 $r(h) = \dfrac{-1}{h-1}$ et $f'(-2) = 1$.

26 $r(h) = \dfrac{1}{h+1}$ et $f'(2) = 1$.

27 **1.** On a $r(h) = \dfrac{\sqrt{h+3}-\sqrt{3}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h+3}+\sqrt{3}}$.

2. Lorsque h tend vers 0, $r(h)$ a pour limite $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

28 Vrai.

29 Faux. En effet le taux d'accroissement a pour limite -8 et non -2 quand h tend vers 0.

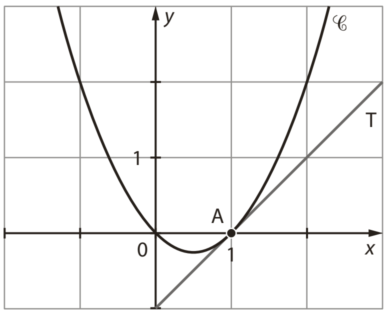
30 Vrai.

32 Le point A a pour coordonnées $(-1 ; 2)$. Le coefficient directeur de T est -3. Une équation de T est $y = -3x - 1$.

33 On a $f'(4) = -3$. L'ordonnée de A est -14.

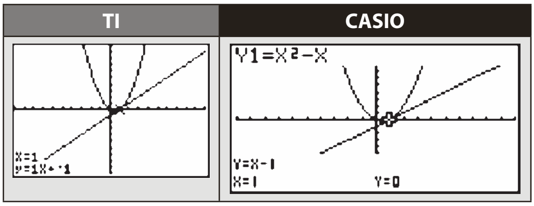
Il faut lire que f est dérivable en 4 (et non en 2).

34 **1.** On obtient le tracé suivant :

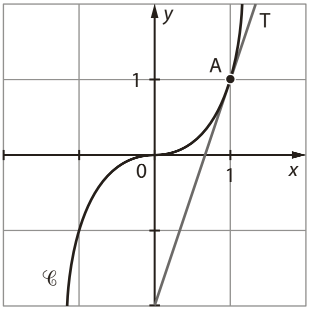


2. Une équation de T est $y = x - 1$.

3. On obtient l'écran suivant :



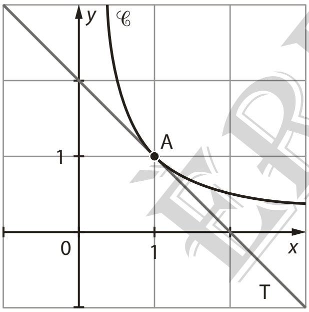
35 **1.** On obtient le tracé suivant :



2. Une équation de T est $y = 3x - 2$.

3. Se reporter à la page 273 pour Texas et à la page 277 pour Casio.

36 **1.** On obtient le tracé suivant :



2. Une équation de T est $y = -x + 2$.

3. Se reporter à la page 350 pour Texas et à la page 354 pour Casio.

37 Attention, la correction en fin d'ouvrage est erronée. Vous trouverez ci-dessous la bonne correction.

1. On lit graphiquement $f'(-1) = 3$ et $f'(2) = -6$.

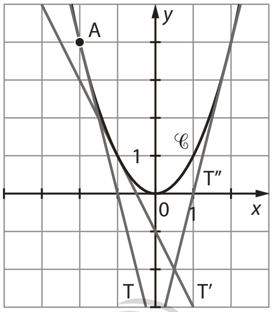
2. On lit de même que l'ordonnée de A est –4 et celle de B, 5.

La tangente T_1 est la droite passant par A de coefficient directeur 3. Une équation de T_1 est $y = 3x + p$ telle que $-4 = -3 + p$; d'où $p = -1$. Une équation de T_1 est donc $y = 3x - 1$.

De même une équation de T_2 est $y = -6x + 17$.

38 ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 03S_exercice38.ggb (Geogebra).***

On obtient la figure suivante :



Les équations des droites T, T′ et T″ sont respectivement :

$$y = -4x - 4 \;;\; y = -2x - 1 \text{ et } y = 4x - 4.$$

39 Faux, car les nombres dérivés de f et g en A ne sont pas nécessairement égaux.

40 Vrai.

41 Vrai.

42 **a.** $f'(x) = 5$, donc $f'(3) = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 5$.

b. $g'(x) = 4x^3$, donc $g'(3) = 108$ et $g'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$.

c. $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $h'(3) = -\frac{1}{9}$ et $h'\left(\frac{1}{3}\right) = -9$.

43 **a.** $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(-1) = 3$ et $f'(\sqrt{2}) = 6$.

b. $g'(x) = 4x^3$, donc $g'(-1) = -4$ et $g'(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$.

c. $h'(x) = -2$, donc $h'(-1) = -2$ et $h'(\sqrt{2}) = -2$.

44 **a.** $f'(x) = 0$, donc $f'(0{,}01) = 0$ et $f'(3) = 0$.

b. $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $g'(0{,}01) = \frac{1}{0{,}2}$ et $g'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

c. $h'(x) = 2x$, donc $h'(0{,}01) = 0{,}02$ et $h'(3) = 6$.

45 **3.** Il faut lire $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, (et pas $\frac{1}{2\sqrt{3}}$).

46 **1.** $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$.

2. Il y a deux solutions : $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$.

3. Il n'y a pas de solution.

47 **1.** On a $f'(x) = 3x^2$, d'où :

a. $f'(0) = 0$; **b.** $f'(2) = 12$;

c. $f'(-1) = 3$; **d.** $f'(12) = 432$.

2. On résout l'équation $f'(x) = 4$, soit $3x^2 = 4$.

Il y a deux valeurs : $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

$3x^2$ est un réel positif. Il n'y a pas de réel x tel que $f'(x) = -108$.

48 $f'(x) = 3x^2$, donc :

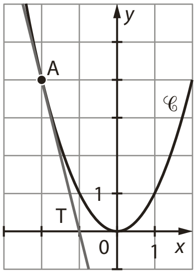
1. vrai ; **2.** vrai ; **3.** vrai.

49 $g(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc :

1. faux ; **2.** faux ; **3.** vrai.

50 **1.** $f'(x) = 2x$; le coefficient directeur de T est $f'(-2)$, soit -4.
Une équation de T est $y = -4x - 4$.

2.

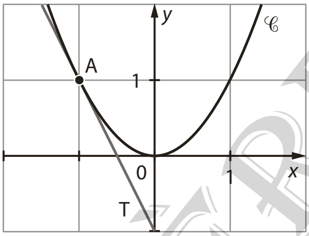


51 $g'(x) = 3x^2$; le coefficient directeur de T est $g'(-2)$, soit 12. Une équation de T est $y = 12x + 16$.

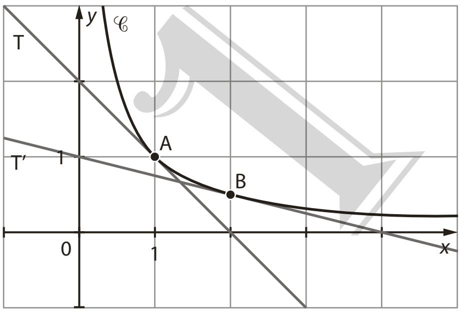
52 Le coefficient directeur de la tangente doit être égal à 4. On résout l'équation $2x = 4$.
Cette équation a une seule solution : 2.
Le point A a pour abscisse 2.

53 **1.** T a pour équation $y = -2x - 1$.

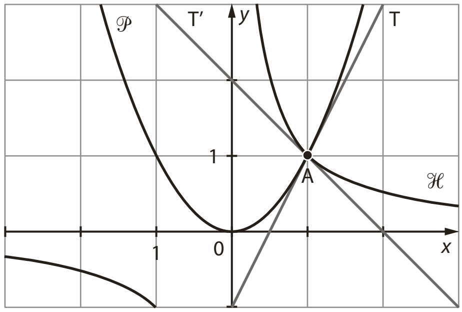
2.



3. a. On résout l'équation $2x = -6$.
Cette équation a une seule solution : -3.
b. Le point de contact a pour coordonnées $(-3 ; 9)$.



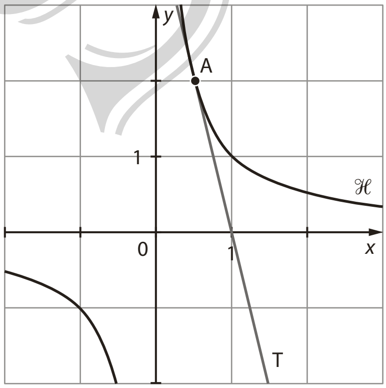
54 **1.** Les coordonnées de A vérifient les deux équations.
2. Les équations à 𝒫 et à ℋ des tangentes en A sont respectivement $y = 2x - 1$ et $y = -x + 2$.
3. On obtient la figure suivante :



55 **1.** Les coordonnées de A vérifient les deux équations.
2. Les équations à 𝒫 et à 𝒞 des tangentes T et T' sont respectivement $y = 2x - 1$ et $y = 0{,}5x + 0{,}5$.

56 L'équation $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{6}$ a pour solution 9. Les coordonnées de A sont donc $(9 ; 3)$. Une équation de T est $y = \frac{1}{6}x + 1{,}5$.

57 **1.** Une équation de T est $y = -4x + 4$.
2. On obtient la figure suivante :

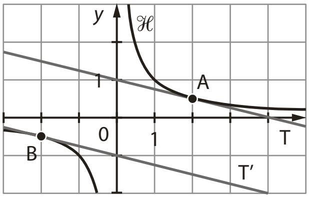


3. On résout l'équation $-\frac{1}{x^2} = -4$. Cette équation a deux solutions $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.
Les coordonnées des points de contact sont $\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$ et $\left(\frac{1}{2} ; -2\right)$.

58 **1. a.** On a $f'(2) = -\frac{1}{4}$. Une équation de T est :

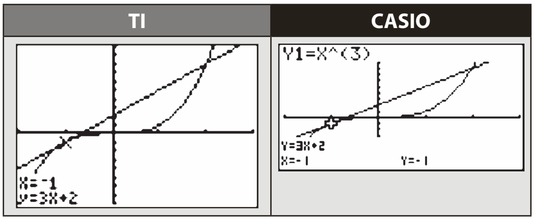
$$y = -\frac{1}{4}x + 1.$$

3. a. L'équation $-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}$ admet deux solutions : 2 et -2.
La tangente T' à la courbe 𝒞 au point d'abscisse -2 est parallèle à T.
Voici les tracés demandés :



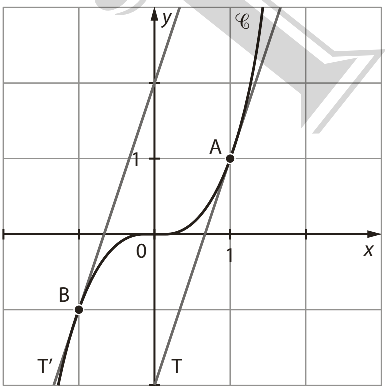
59 **1.** Se reporter à la page 350 pour Texas et à la page 354 pour Casio.
2. La courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la tangente T.
3. Une équation de T est $y = 2x - 1$.
4. Correctif : il faut lire $d(x) = (x - 1)^2$.
La différence $d(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$. Ce qui prouve la conjecture faite dans la question **2**.

61 **1.** On obtient l'écran suivant :

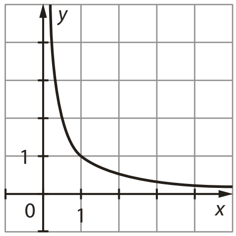


On peut choisir comme fenêtre :
Xmin = –2 ; Xmax = 3 ; Ymin = –8 et Ymax = 11.
Sur]–∞ ; 2] la courbe est au-dessous de T.
Sur [2 : +∞[la courbe est au-dessus de T.
2. Une équation de T est $y = 3x + 2$.
3. On développe $(x - 2)(x + 1)^2$ pour obtenir l'égalité.
4. L'abscisse de B est la deuxième solution de l'équation $x^3 = 3x + 2$. Le point B a pour coordonnées (2 ; 8).
5. Le signe de $(x - 2)(x + 1)^2$ est celui de $x - 2$; on démontre ainsi la conjecture faite dans la question **1**.
Il faut lire AIDE : question 4.

62 **1.** T a pour équation $y = 3x - 2$.
2. L'équation $3x^2 = 3$ a pour solutions –1 et 1.
Le point B a pour coordonnées (–1 ; –1).
3. T′ a pour équation $y = 3x + 2$.
4. On obtient :



63 **1.**



2. L'équation de la tangente au point $M\left(a\,;\,\dfrac{1}{a}\right)$ est : $y = -\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{2}{a}$.
3. Ses intersections avec les axes sont $A(2a\,;\,0)$ et $B\left(0\,;\,\dfrac{2}{a}\right)$.
4. Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(a\,;\,\dfrac{1}{a}\right)$.
C'est le point M, quel que soit a.

64 **1.** On résout l'équation $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1$.
Elle a pour solution unique $\dfrac{1}{4}$.
Le point A a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.
2. Une équation de T est $y = x + \dfrac{1}{4}$.

65 Le coefficient directeur de T est 3.
L'équation $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 3$ a pour solution $\dfrac{1}{36}$.
La tangente T′ à $\mathscr{C}'$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{36}$ est parallèle à T.

66 Faux. En effet, $f'(x) = -6$ donc $f'(1) = -6$.

67 Faux. En effet, $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(2) = 12$.

68 Faux car $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
D'où $f'(1) = 2$ et $g'(1) = -1$.

69 Faux car l'équation $-\dfrac{1}{x^2} = 3$ n'a pas de solution.

70 Vrai.

71 $f'(x) = 12x^2$.

72 $g'(x) = -6x$.

73 $h'(x) = -12x - 7$.

74 $k'(x) = 15x^2 - 4x + 3$.

75 $h'(x) = x^4 - x^3 - 2{,}5x$.

76 $k'(t) = -4t^2 + \dfrac{1}{2}$.

77 **1.** On a $f'(x) = 2(4 - 3x) + (2x - 1) \times (-3) = -12x + 11$.
2. $f(x) = -6x^2 + 11x - 4$ d'où $f'(x) = -12x + 11$.
3. On obtient la même expression développée.

78 On applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$;
$f'(x) = \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; donc $k = \dfrac{3}{2}$.

79 On applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$;
$f'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; or $x^2 = x(\sqrt{x})^2$;
par suite $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x\sqrt{x}}{2} = \dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$, donc $k = \dfrac{5}{2}$.

80 $f'(x) = \dfrac{4}{(3-4x)^2}$.

81 $g'(x) = \dfrac{7}{(3x-4)^2}$.

82 $h'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

83 La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et

$f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

84 La fonction g est dérivable sur $]-4\,;+\infty[$

et $g'(x) = \dfrac{5}{(x+4)^2}$.

85 La fonction h est dérivable sur $]2{,}5\,;+\infty[$

et $h'(x) = \dfrac{4}{(2x-5)^2}$.

86 La fonction p est dérivable sur $]3\,;+\infty[$ et

$p'(x) = \dfrac{13}{(3-x)^2}$.

88 **1.** La fonction g est dérivable sur I, comme quotient de deux fonctions dérivables sur I, dont le dénominateur ne s'annule pas sur I.

$g'(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

2. $g(x)$ s'écrit sous la forme d'une somme de deux fonctions.

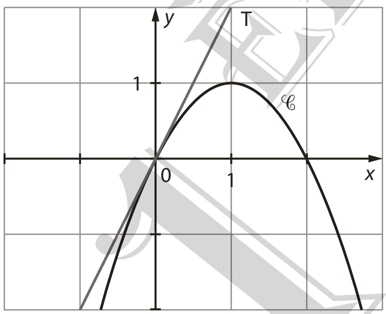
3. $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

On retrouve le résultat obtenu dans la question **1**.

89 **2.** f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2x + 2$.

3. Les coefficients directeurs sont 2 et 0.

4. On obtient la figure suivante :



90 **1.** On a $f'(x) = 2x - 2$.

L'équation $f'(x) = 2$ admet une solution unique 2.

2. Puisque $f(2) = 0$, le point de contact a pour coordonnées $(2\,;0)$. Une équation de la tangente est $y = 2x - 4$.

91 **1.** L'écran de la calculatrice permet de conjecturer que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$ au point A(1 ; 0).

On a $f'(x) = -3x^2 + 2x$. Donc $f'(1) = -1$ qui est le coefficient directeur de $\mathcal{D}$.

De plus les coordonnées de A vérifient les équations de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{C}$.

2. L'équation $f'(x) = -1$ admet deux solutions : 1 et $-\dfrac{1}{3}$.

Il existe donc une autre tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à $\mathcal{D}$.

Le point de contact a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{4}{27}\right)$.

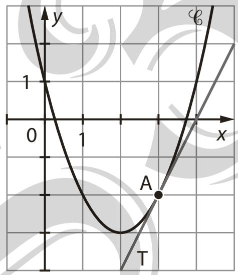
La tangente a pour équation $y = -x - \dfrac{5}{27}$.

92 $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + 1$;

le coefficient directeur est $f'(4) = \dfrac{7}{8}$.

$g'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; le coefficient directeur est $g'(4) = -\dfrac{1}{2}$.

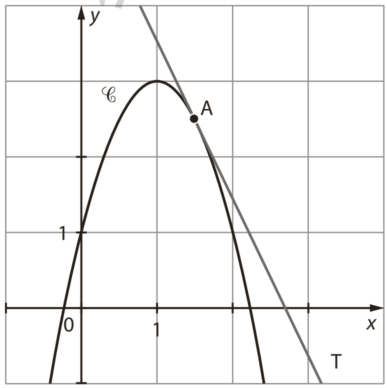
93 **1.**



2. $f'(x) = 2x - 4$; la condition est donc $2x - 4 = 2$ d'où $x = 3$. Les coordonnées de A sont $(3\,;-2)$.

Une équation de la tangente est $y = 2x - 8$.

94 **1.**



2. $f'(x) = -4x + 4$; la condition est donc $-4x + 4 = -2$, d'où $x = \dfrac{3}{2}$. Les coordonnées de A sont $\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.

Une équation de la tangente est $y = -2x + \dfrac{11}{2}$.

95 **1.** On a $f'(x) = 2x - 4$ et $g'(x) = \dfrac{2x}{3}$.

$f(3) = 3$ et $f'(3) = 2$. De même $g(3) = 3$ et $g'(3) = 2$.

2. Les courbes représentatives de f et de g ont pour point commun le point de coordonnées $(3\,;3)$. En ce point elles ont une tangente commune de coefficient directeur 2.

97 L'expression $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On a $f(0) = 5$ donc $c = 5$.

$\mathcal{P}'$ est la représentation graphique de la fonction g définie par $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

On a $g(2) = 1$ donc $f(2) = 1$. Le point A(2 ; 1) est commun aux courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Puisque $f(2)=1$, $4a + 2b + 5 = 1$; soit $2a + b = -2$.

En outre $g'(x) = -4x + 4$, donc $g'(2)=-4$.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont même tangente en A. Donc $f'(2) = -4$.

Or $f'(x) = 2ax + b$, par suite $4a + b = -4$.

Les réels a et b sont donc solutions du système :

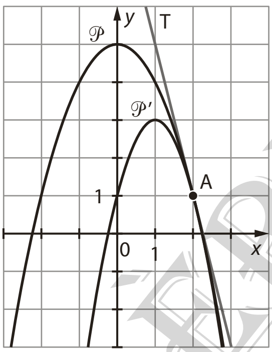
$$\begin{cases} 4a + b = -4 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$$

On obtient $a = -1$ et $b = 0$.

D'où $(x) = -x^2 + 5$.

Une équation de la tangente commune est $y = -4x + 9$.

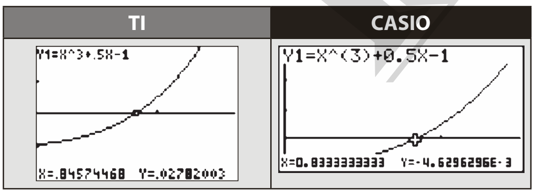
On a la figure suivante :



98 **1.** On peut choisir comme fenêtre : Xmin = 0 ; Xmax = 1,5 ; Ymin = –1 et Ymax = 3.

Avec la commande Trace, on obtient une approximation de l'abscisse du point d'intersection de la courbe : 0,8.

Voici l'écran correspondant :

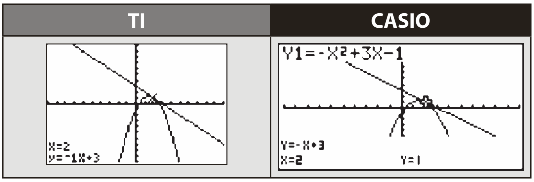


2. L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans [0 ; 1,5].

3. a. Une équation de la tangente est $y = 2{,}42x - 2{,}02$.

b. On obtient comme approximation : 0,83.

99 **1.** On obtient l'écran suivant :



2. La courbe $\mathcal{P}$ est en dessous de T.

3. Une équation de T est $y = -x + 3$.

4. a. $f(x) - (-x + 3) = -(x - 2)^2$; cette différence est négative sur $\mathbb{R}$.

b. Donc $f(x) \leqslant -x + 3$; par suite la courbe $\mathcal{P}$ est en dessous de T.

100 On a $f'(x) = -3x^2 + 2x$. Le coefficient directeur de (d) est –1. On résout donc l'équation $f'(x) = -1$. Cette équation a pour solutions $-\frac{1}{3}$ et 1. Il existe donc deux tangentes parallèles à (d). Les points de contact ont pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3} ; \frac{4}{27}\right)$ et (1 ; 0).

Les équations de ces tangentes sont respectivement $y = -x - \frac{5}{27}$ et $y = -x + 1$.

101 $f'(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 10x}{(x^2 + 1)^2}$.

102 $f'(x) = 10x^9 + 14x^6 + 12x^5 + 4x^3 + 12x^2$.

103 $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 1)\sqrt{x(x^2 + 1)}}{2x(x^2 + 1)}$.

104 $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 8x}{2\sqrt{x + 2}(x + 2)}$.

105 $f'(x) = \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$.

106 $f'(x) = -\dfrac{x(x^4 + 2x^2 - 1)}{\sqrt{(x^2 + 1)(x^4 + 1)^3}}$.

107 $f'(x) = -\dfrac{(x - 3)(x^3 - x^2 - 44x + 72)}{x^4(x - 2)^2}$.

108 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2 - \dfrac{\sqrt{x + 1}(3x + 1)}{2(x^2 - 1)^2}$.

109 **1.** Énoncé vrai. L'énoncé réciproque « Si f est définie en a, alors f est dérivable en a » est faux.

2. Énoncé vrai. L'énoncé réciproque « Si $f'(x) = 1$, alors $f(x) = x$ » est faux.

3. Énoncé faux. L'énoncé réciproque « Si la tangente en 1 à la courbe de f a pour équation $y = x$ alors $f'(1) = 1$ » est vrai.

4. Énoncé faux. L'énoncé réciproque « Si $f'(1) = g'(1)$, alors $f(1) = g(1)$ » est faux.

110 **1. a.** $f(x) = (u(x))^2 \times u(x)$. La fonction f est un produit de deux fonctions dérivables sur I donc f est dérivable sur I.

b. $(uv)' = u'v + uv'$

c. $f'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x) \times u(x) + (u(x))^2 \times u'(x)$
$= 3u'(x) \times (u(x))^2$,
soit $(u^3)' = 3u^2u'$.

2. On a ici $u(x) = x$ donc $f'(x) = 3x^2 \times 1 = 3x^2$.

3. On utilise le résultat précédent avec $u(x) = x^2 - 1$.
D'où $u'(x) = 2x$ et $f'(x) = 3(x^2 - 1)^2 \times 2x = 6x(x^2 - 1)^2$.

111 Vrai.

112 Faux, car l'équation $-\dfrac{1}{x^2} = 10$ n'a pas de solution.

113 Faux. On a $f'(x) = \dfrac{3x}{2\sqrt{x}}$.

114 Faux. On $f'(x) = 6(3x - 1)$.

115 Vrai.

116 $u'(x) = \dfrac{5}{(-x+2)^2}$.

117 On a $f'(x) = 3x^2 + 6x$. L'équation $f'(x) = -3$ a pour unique solution -1.

118 Soit $f(x) = \dfrac{4}{x}$. On résout l'équation $f'(x) = -2$, soit $\dfrac{-4}{x^2} = -2$. Elle a pour solutions $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
Les points ont pour coordonnées $(\sqrt{2}\,;\,2\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}\,;\,-2\sqrt{2})$.

119 $p'(x) = 3x^2 - 8x$. L'équation $3x^2 - 8x = 0$ a pour solutions 0 et $\dfrac{8}{3}$.
Les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points $(0\,;0)$ et $\left(\dfrac{8}{3}\,;\,-\dfrac{256}{27}\right)$ sont parallèles à l'axe des abscisses.

120 $f'(x) = 2x$; une équation de la tangente est $y = 2x + 2$.

121 On a $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} + 1$ et $h'(x) = 2x + 3\sqrt{x} + 1$.

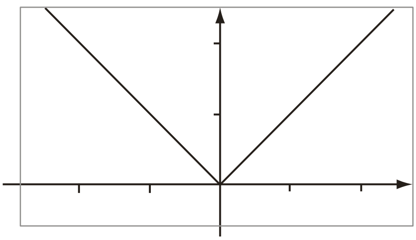
POUR FAIRE LE POINT

Attention, les réponses aux questions 3, 5, 6 et 10 en fin de manuel sont erronées, les réponses ci-dessous sont les bonnes.

1 A ; 2 C et D ; 3 A ; 4 B et C ; 5 A et D ;
6 C ; 7 A ; 8 C ; 9 B ; 10 A et D.

POUR APPROFONDIR

122 **1.** On obtient le tracé suivant :



2. On a $r(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{|h|}{h}$.
Si $h > 0$, $|h| = h$ et $r(h) = 1$
Si $h < 0$, $|h| = -h$ et $r(h) = -1$.
Lorsque h tend vers 0, $r(h)$ n'a pas de limite réelle. La fonction f n'est pas dérivable en 0.

123 **1.** Le coût fixe est 600 €.

2. $C(200) = 880$.

3. $C'(200) = 1{,}4$.

4. a. $C(201) - C(200) = 1{,}39$.

b. On obtient un résultat voisin à celui obtenu dans la question **3**.

5. Le coût du 201ᵉ article est plus élevé que le coût du 401ᵉ article.

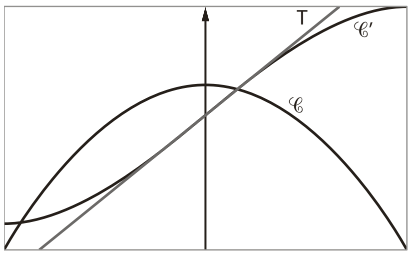
124 **1.** Les coordonnées de A sont $(a\,;\,-a^2 + 4a - 2)$.
Le coefficient directeur de la tangente en A est $f'(a)$, donc $4 - 2a$. Une équation de la tangente en a est donc $y = (4 - 2a)x + a^2 - 2$.

2. Les coordonnées de I vérifient l'équation de la tangente. Le réel a est solution de l'équation :
$$4 = (4 - 2a) \times \frac{3}{2} + a^2 - 2.$$
Cette équation a deux solutions : 0 et 3.
Les équations des tangentes correspondantes sont respectivement $y = 4x - 2$ et $y = -2x + 7$.

Attention, il y a une erreur de numérotation dans le manuel : les exercices 124 à 126 sont les exercices 125 à 127 (colonne de droite).

125 ***Fichier associé sur wwws.bordas-indice.fr : 03S_exercice 125.ggb (Geogebra).***

1. a.



La population est croissante sur l'intervalle [0 ; 2].

b. On a $y = 13{,}5t - 2{,}5$.
Sur [0 ; 1], la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.
Sur [1 ; 2], la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de T.
Jusqu'à $t = 1$, la vitesse de croissance augmente ; elle diminue ensuite.

2. On a $'(t) = -13{,}5t^2 + 27t$.
$f'(t)$ est une fonction polynôme du second degré qui admet un maximum pour $t = -\dfrac{27}{2 \times (-13{,}5)} = 1$.
On démontre ainsi la conjecture de la question **1. b**.

3. a. On a $f(1) = 11$ et $f'(1) = 13{,}5$. Une équation de

T est donc $y = 13{,}5t - 2{,}5$.

b. On vérifie l'égalité en développant son second membre. La différence $f(t) - (13{,}5t - 2{,}5)$ est du signe contraire de $t - 1$.

On démontre ainsi la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à T, conjecturée dans la question **1. b**.

126 **1.** Les conditions se traduisent par les égalités :

$$f(3) = 0\ ;\ f(0) = 2\ ;\ f'(0) = 2.$$

D'où $f(x) = -\dfrac{8}{9}x^2 + 2x + 2$.

2. La deuxième solution de l'équation $f(x) = 0$ est $-\dfrac{3}{4}$.

Cet exercice peut se traiter en utilisant un logiciel de calcul formel.

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 03S_exercice126.xws (Xcas).

127 **1.** $A(t) = 6 \cdot 10^6\, t$ (en m²) ; $r(t) = \sqrt{\dfrac{A(t)}{\pi}}$;

donc $r(t) = 1\,000\sqrt{\dfrac{6}{\pi}}\sqrt{t}$ (en m).

2. Soit d la distance du navire à la côte : on sait que $r(1) = \dfrac{d}{2}$, donc $d = 2\,000\sqrt{\dfrac{6}{\pi}}$ m, (2 764 m environ).

L'équation $r(t) =$ d équivaut à $t = 4$. La nappe atteindra la côte au bout de 4 jours.

On a $r'(4) = 250\sqrt{\dfrac{6}{\pi}}$; sa vitesse sera alors de $250\sqrt{\dfrac{6}{\pi}}$ soit environ 345,5 m par jour.

128 **1.** $-9{,}8t + 29{,}4$.

2. C'est la vitesse à l'instant $t = 0$.

3. La pierre touche le sol à l'instant $t = 6$; sa vitesse sera alors de $-29{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

129 **1.** ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 03S_exercice129.xws (Xcas) et 03S_exercice129.dfw (Derive).***

On pose $f(x) = 2x^2 - x - 5$ et $g(x) = -x^3 + 3x + 3$.

On résout l'équation $f(x) = g(x)$. Pour cela, on utilise, avec Xcas, la commande resoudre (voir page 270) et avec Derive la commande solve (voir page 271).

L'équation a deux solutions –2 et 2. Les courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ ont deux points d'intersection : A(–2 ; 5) et B(2 ; 1).

2. On a $f'(-2) = g'(-2)$ et $f'(2) \neq g'(2)$. Les courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ ont une tangente commune en A.

130 **1.** $$r(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\dfrac{1}{v(a+h)} - \dfrac{1}{v(a)}}{h}$$
$$= \frac{v(a) - v(a+h)}{h \times v(a) \times v(a+h)}$$
$$= -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a) \times v(a+h)}.$$

2. Puisque v est dérivable sur I, le rapport $\dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$ a pour limite $v'(a)$ quand h tend vers 0.

3. $v(a + h)$ a pour limite $v(a)$ lorsque h tend vers 0.

Donc $r(h)$ a pour limite $-v'(a) \times \dfrac{1}{(v(a))^2}$ lorsque h tend vers 0. Par suite f est dérivable sur I et $f' = \left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$.

131 **1.** Les côtés [AA′] et [MM′] des triangles SAA′ et SMM′ sont parallèles. Le théorème de Thalès permet donc d'écrire $\dfrac{SA'}{SM'} = \dfrac{AA'}{MM'}$.

2. On a SA′ $= |1 - s|$; SM′ $= |x - s|$; AA′ = 0,5 et MM′ $= |y|$. On observe que $0 \leqslant s \leqslant 1$ et que $x - s$ et y ont même signe. De l'égalité obtenue dans la question **1**, on peut donc déduire : $\dfrac{1-s}{x-s} = \dfrac{0{,}5}{y}$.

d'où $y = \dfrac{0{,}5(x-s)}{1-s}$ et $\mathrm{D} = y - 0{,}5x^2 = \dfrac{0{,}5(x-s)}{1-s} - 0{,}5x^2$

$$= -0{,}5x^2 + \frac{0{,}5}{1-s}x - \frac{0{,}5}{1-s}s.$$

L'expression de D est celle d'un polynôme du second degré, dont la variable est x.

3. a. Les résultats du second degré permettent donc de dire que D est maximale pour $x = -\dfrac{\dfrac{0{,}5}{1-s}}{2 \times (-0{,}5)} = \dfrac{1}{2(1-s)}$.

b. Lorsque M est en A, $x = 1$.

Donc s est solution de l'équation $\dfrac{1}{2(1-s)} = 1$

Soit $2s = 1$. L'abscisse du point S est $\dfrac{1}{2}$.

132 ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 03S_exercice132.ggb (Geogebra).***

1. A(–1 ; 1) et P(1 ; 0,5).

2. $y = x^2$.

3. Il y a deux tangentes à la parabole passant par P. Une seule convient avec le problème posé. Le point M correspondant a une abscisse voisine de 0,28.

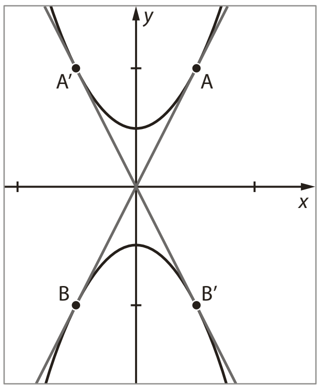
4. On obtient $y = 2mx - m^2$. Les coordonnées de P doivent vérifier cette équation.

Le réel m est solution de $m^2 - 2m + 0{,}5 = 0$.

Une solution convient : $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$, soit environ 0,293.

Ce résultat est bien conforme à la conjecture faite à la question **3**.

133 **1.** et **2.**



3. On a A(a ; $a^2 + 1$) et B($-a$; $-a^2 - 1$).

4. La droite (AB) a pour coefficient directeur $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-a^2 - 1 - a^2 - 1}{-a - a} = \dfrac{a^2 + 1}{a}$. Elle est tangente en A à $\mathscr{P}$. Son coefficient directeur est donc le nombre dérivé en a, de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ soit $2a$.

Le réel a est donc solution de l'équation $\dfrac{a^2+1}{a} = 2a$.

Cette équation admet deux solutions –1 et 1. Il existe donc deux tangentes communes aux courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Pour la première tangente, les points de contact ont pour coordonnées (1 ; 2) et (–1 ; –2).

Pour la seconde tangente, les points de contact ont pour coordonnées (–1 ; 2) et (1 ; –2).

134 **1.** $g'(x) = \dfrac{-2}{x^2}$. On résout l'équation $\dfrac{-2}{x^2} = -2$, soit $x^2 = 1$. Il y a deux points de la courbe $\mathscr{H}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 3$. Les points de coordonnées (–1 ; –2) et (1 ; 2).

2. *Il faut lire : Soit a un réel non nul.*

On a $g(a) = \dfrac{2}{a}$ et $g'(a) = \dfrac{-2}{a^2}$; une équation de la tangente à $\mathscr{H}$ au point A est donc $y = \dfrac{-2}{a^2}x + \dfrac{4}{a}$.

3. a. La tangente passe par M(–4 ; 4) si et seulement si $4 = \dfrac{-2}{a^2}(-4) + \dfrac{4}{a}$.

Le réel a est solution de l'équation $a^2 - a - 2 = 0$; cette équation a deux solutions –1 et 2. Il y a donc deux tangentes passant par M.

b. Les points de contact sont les points de coordonnées (–1 ; –2) et (2 ; 1). Les équations respectives sont :

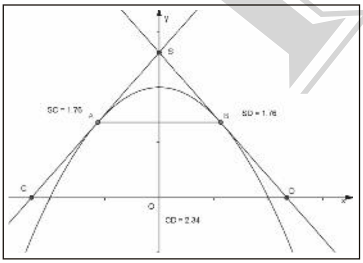
$$y = -2x - 4 \text{ et } y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

4. Pour P(1 ; 0), le réel a est solution de l'équation $0 = \dfrac{-2}{a^2} + \dfrac{4}{a}$ soit $-2 + 4a = 0$; il vient $a = 0{,}5$.

Il y a donc une seule tangente passant par P.

Pour O(0 ; 0), l'équation s'écrit $0 = \dfrac{-2}{a^2} \times 0 + \dfrac{4}{a}$, équation qui n'a pas de solution. Il n'y a pas de tangente passant par l'origine du repère.

135 **1.** ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 03S_exercice135.ggb (Geogebra).***



Dans le cas où $a = 0$, B est confondu avec A ; les tangentes sont confondues et parallèles à l'axe des abscisses.

Les points C et D ne sont pas définies. Le problème n'a alors pas de sens. On suppose dans la suite que $a \neq 0$.

2. On a A(a ; $1 - a^2$) et $f'(a) = -2a$. Une équation de la tangente en A est $y = -2ax + a^2 + 1$.

3. Le point C a pour ordonnée 0 donc C$\left(\dfrac{a^2+1}{2a} ; 0\right)$.

4. Le point S a pour abscisse O donc ses coordonnées sont (0 ; $a^2 + 1$).

D est le symétrique de C par rapport à l'axe des ordonnées, donc D a pour coordonnées $\left(-\dfrac{a^2+1}{2a} ; 0\right)$.

5. On a $SC = (a^2 + 1)\dfrac{\sqrt{4a^2+1}}{2|a|}$ et $CD = \dfrac{a^2+1}{|a|}$.

6. Par symétrie, on a $SC = SD$. Le triangle SCD est équilatéral si et seulement si $SC = CD$, soit aussi $SC^2 = CD^2$.

Le réel a est donc solution de l'équation $\dfrac{4a^2+1}{4a^2} = \dfrac{1}{a^2}$.

Soit de l'équation $4a^2 = 3$. Cette équation a deux solutions $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les points de contact A et B ont pour coordonnées $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{4}\right)$ et $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{4}\right)$.

136 **1.** L'abscisse des points d'intersection des deux courbes est solution de l'équation $-2x^2 + 7x - 3 = x^2 + x$, équation équivalente à l'équation $(x - 1)^2 = 0$ qui admet pour unique solution 1.

On observe que $f(1) = g(1) = 2$; en outre $f'(1) = g'(1) = 3$.

Les deux courbes ont pour point commun A(1 ; 2) et pour tangente commune, la droite passant par A de coefficient directeur 3.

2. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un tel polynôme.

On a $f'(x) = 2ax + b$.

Le polynôme f doit vérifier les deux conditions $f(1) = 2$ et $f'(1) = 3$.

Les réels a, b et c sont donc solutions du système

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases}.$$

Ce système admet une infinité de solutions telles que pour a fixé, on a $c = a - 1$ et $b = 3 - 2a$.

137 Soit f la fonction polynôme du second degré dont la parabole cherchée est la représentation graphique. Donc $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $f'(x) = 2ax + b$. La droite d'équation $y = x$ est tangente à la parabole au point d'abscisse s ce qui signifie que : $as^2 + bs + c = s$ et $2as + b = 1$. D'où $s = \dfrac{1-b}{2a}$ et par suite a, b et c vérifient :

$a\left(\dfrac{1-b}{2a}\right)^2 + (b - 1)\dfrac{1-b}{2a} + c = 0$; soit $(1 - b)^2 = 4ac$.

En procédant de même avec les deux autres tangentes, on a :

• $as^2 + bs + c = -5s + 3$ et $2as + b = -5$. D'où $s = \dfrac{-5-b}{2a}$ et par suite a, b et c vérifient $4ac - (b+5)^2 = 12a$.

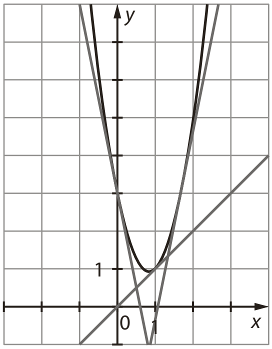
• $as^2 + bs + c = 7s - 9$ et $2as + b = 7$. D'où $s = \dfrac{7-b}{2a}$ et par suite a, b et c vérifient $4ac - (7-b)^2 = -36a$.

Par suite $(1-b)^2 - (b+5)^2 = 12a$ et ainsi $b = -a - 2$.

De même $(1-b)^2 - (7-b)^2 = -36a$ et ainsi $b = 4 - 3a$.

Le réel a est solution de l'équation $-a - 2 = 4 - 3a$; on obtient $a = 3$, puis $b = -5$ et $c = 3$.

Le polynôme cherché est $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$.



138 Soit f et g les fonctions dont $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les représentations graphiques et T une tangente commune à ces deux courbes. A d'abscisse a est le point de contact de T et $\mathscr{C}$; B d'abscisse b est le point de contact de T et $\mathscr{C}'$.

On a $f(a) = -1 + a^2$ et $f'(a) = 2a$. Une équation de T est donc $y = 2ax - 1 - a^2$.

B est un point de T donc $\dfrac{1}{b} = 2ab - 1 - a^2$.

En outre $g'(b) = -\dfrac{1}{b^2} = 2a$.

Par suite $a = -\dfrac{1}{2b^2}$. Le réel b est donc solution de l'équation $\dfrac{1}{b} = 2\left(-\dfrac{1}{2b^2}\right) \times b - 1 - \dfrac{1}{4b^2}$. Cette équation est équivalente à l'équation $4b^4 + 8b^3 + 1 = 0$.

En utilisant une calculatrice, on peut conjecturer que cette équation admet deux solutions ; il existe donc deux tangentes communes aux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

F Activités TICE

TP 1 Méthode Newton

On se propose de déterminer une solution approchée de l'équation $f(x) = 0$.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 03S_TP1.ggb et 03S_correctionTP1.ggb (Geogebra).

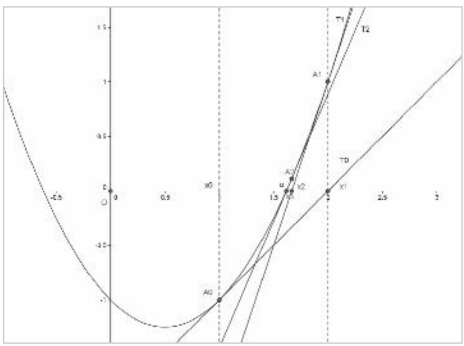
A. 1. L'équation $f(x) = 0$ admet une solution comprise entre 1 et 2.

2. a. Une équation de T_0 est $y = x - 2$.

b. On a $x_1 = 2$.

3. Une équation de T_1 est $y = 3x - 5$. Par suite $x_2 = \dfrac{5}{3}$.

4. Si T_2 est la tangente à la courbe au point d'abscisse $\dfrac{5}{3}$, on a $f'\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{7}{3}$ et $f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{1}{9}$. Par suite, une équation de T_2 est $y = \dfrac{7}{3}x - \dfrac{34}{9}$. On obtient $x_3 = \dfrac{34}{21}$.



Les réels x_0, x_1, x_2 et x_3 sont voisins de α et de plus en plus proches de α.

5. Le réel α est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Donc $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803$

$x_3 \approx 1{,}619$. Le réel x_3 est une approximation de α et $\alpha < x_3$.

B. 1. Le coefficient directeur de la tangente T en A($a, f(a)$) est $f'(a)$. D'où une équation de T :

$$y = f'(a)x + f(a) - a\,f'(a).$$

2. Le point d'intersection de T avec l'axe des abscisses a pour ordonnée 0. Son abscisse b est donc solution de l'équation $0 = f'(a) \times b + f(a) - a\,f'(a)$.

Donc $b = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

3. a. N représente le nombre d'itérations effectuées et X les approximations obtenues pour α.

b. Le nombre d'itérations choisi et une valeur approchée de α.

c. En Y1, on saisit l'expression de $f(x)$ et en Y2 celle de $f'(x)$.

Voici le programme obtenu :

TI	CASIO
PROGRAM:NEWTON :Prompt N,X :For(I,1,N) :X-Y1(X)/Y2(X)→X :End :Disp X :	======NEWTON ====== ?→N↵ ?→X↵ For 1→I To N↵ X-Y1(X)÷Y2(X)→X↵ Next↵ X◢ COM CTL JUMP ? ◢ ▷

Pour N = 5 et une valeur approchée initiale égale à 1, on obtient :

TI	CASIO
prgmNEWTON N=?5 X=?1 1.618033989 Fait ▮	? 5 ? 1 1.618033989 - Disp -

4. Pour 5 Itérations on obtient l'écran suivant :

TI	CASIO
prgmNEWTON N=?5 X=?2 2.094551482 Fait	? 5 ? 2 2.094551482 - Disp -

TP 2 Raccordement dans le tracé des lignes TGV

Il s'agit dans ce TP de déterminer une fonction vérifiant certaines contraintes liées à la modélisation d'un problème simplifié de raccordement de lignes TGV.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 03S_TP2.xws (Xcas) et 03S_TP2.dfw (Derive).

A. 1. B(4 ; 3) et C(6 ; 4).

2. La courbe passe par A(0 ; 0) donc $f(0) = 0$, d'où $d = 0$. Elle est tangente en A à l'axe des abscisses, donc $f'(0) = 0$. Puisque $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, alors $c = 0$ et $f(x) = ax^3 + bx^2$.

3. La droite (BC) a pour coefficient directeur 0,5.
La courbe passe par B et elle est tangente en B à (BC), donc $f(4) = 3$ et $f'(4) = 0{,}5$.

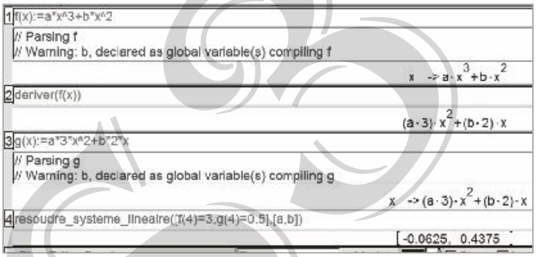
4. a. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$.

b. On obtient le système $\begin{cases} 64a + 16b = 3 \\ 48a + 16b = 1 \end{cases}$

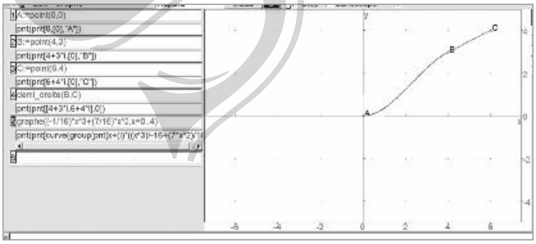
$a = -\dfrac{1}{16}$ et $b = \dfrac{7}{16}$. Ainsi $f(x) = -\dfrac{1}{16}x^3 + \dfrac{7}{16}x^2$.

Les copies d'écran ci-dessous obtenues avec le logiciel Xcas donnent les listes d'instruction à écrire.

B.



C.

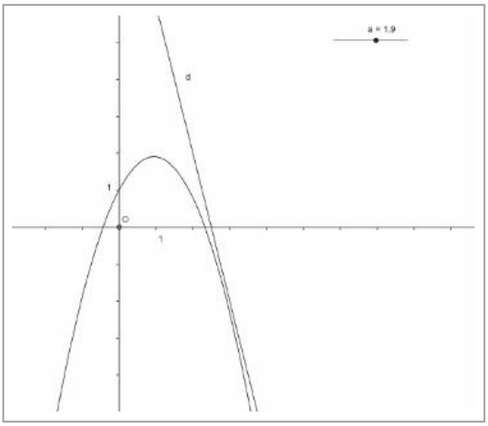


TP 3 Tangente à une parabole

On se propose de déterminer une parabole tangente à une droite d'équation donnée.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 03S_TP3.ggb et 03S_correctionTP3.ggb (Geogebra).

A. 1. 2. 3. On obtient la figure suivante :



4. a. Il y a deux positions de la parabole.

b. Les deux valeurs de a sont proches de -10 et de 2.

B. 1. a. On a $f'(x) = -2x + a$. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse m doit être égal à -4, c'est-à-dire : $-2m + a = -4$.

Le point de contact appartient à la fois à la parabole et à la droite (d), donc $f(m) = -4m + 10$.

b. On est ainsi conduit à résoudre le système

$$\begin{cases} -2m + a = -4 \\ -m^2 + a \times m + 1 = -4m + 10 \end{cases}$$

2. On obtient $m^2 = 9$, d'où $m = -3$ ou $m = 3$ et donc deux valeurs pour a, $a = -10$ et $a = 2$.

Il existe deux paraboles d'équations respectives $y = -x^2 - 10x + 1$ et $y = -x^2 + 2x + 1$ tangentes à la droite (d).

3. On démontre ainsi la conjecture de la question **4.b**.

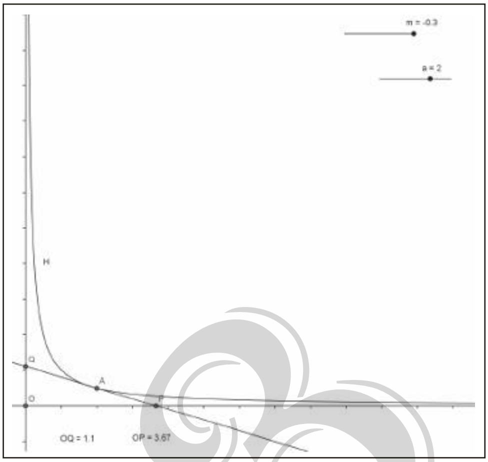
TP 4 Tangente à une hyperbole

Il s'agit d'étudier une propriété d'une tangente à une hyperbole.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 03S_TP4.ggb et 03S_correctionTP4.ggb (Geogebra).

A. Une équation de (d) est de la forme $y = mx + p$. Le point $A\left(a ; \frac{1}{a}\right)$ appartient à cette droite donc une équation de (d) est $y = m(x - a) + \frac{1}{a}$.

B. 1.



Pour chaque valeur de a, il y a une droite (d) tangente à $\mathscr{H}$.

2. Le produit OP × OQ est égal à 4.

C. 1. Lorsque (d) est tangente à $\mathscr{H}$, $m = f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

On obtient pour équation de (d) $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$.

2. On a $P(2a ; 0)$ et $Q\left(0 ; \frac{2}{a}\right)$.

3. Puisque $a > 0$, f est définie sur $]0 ; +\infty[$, $OP = 2a$ et $OQ = \frac{2}{a}$. Par suite $OP \times OQ = 2a \times \frac{2}{a} = 4$.

CHAPITRE 4 Applications de la dérivation

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. Extremum d'une fonction.	• Exploiter le sens de variation pour l'obtention d'inégalités.	Il n'est pas toujours utile de recourir à la dérivation pour étudier le sens de variation d'une fonction. On traite quelques problèmes d'optimisation.

B Notre point de vue

L'objectif de ce chapitre est d'apprendre à utiliser la dérivation pour étudier le sens de variation d'une fonction et pour déterminer ses extremums.

Dans le **Avant de commencer** plusieurs exercices permettent de tester si l'élève sait ou ne sait pas déterminer le signe d'une expression. C'est un acquis de Seconde qui est indispensable lors de chaque étude de fonctions utilisant la dérivation. Un rappel figure en fin de livre page 327 afin de permettre à l'élève de retrouver des réflexes lors de telles études. C'est aussi un acquis du chapitre du second degré (chapitre 1).

Pour comprendre le lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de la dérivée nous avons proposé trois activités très courtes ; il nous semble très utile que les élèves étudient au moins deux de ces activités avant de pouvoir énoncer les propriétés du cours.

Pour aider les élèves à comprendre l'énoncé de la propriété permettant d'obtenir le signe de la dérivée d'une fonction à partir du sens de variation de cette fonction, nous avons proposé dans le cours une idée graphique de la démonstration de cette propriété ; on ne peut pas aller plus loin puisque la notion de limite n'est pas au programme.

Les savoirs faire sont constitués d'exercices élémentaires, applications immédiates du cours.

Après l'étude de chacun de ces savoirs faire l'élève pourra s'entraîner sur les exercices signalés.

Les exercices sont progressifs et font appel à la capacité de l'élève à lire des graphiques, calculer des dérivées et étudier le signe de ces dérivées.

Dans certains exercices on demande à l'élève de déterminer le sens de variation d'une fonction avec deux démarches : en utilisant la dérivation mais aussi sans l'utiliser (exercices 5, 36, 37 et 45) mais cet aspect a déjà été bien étudié dans les chapitres 1 et 2.

De nombreux exercices proposent des problèmes d'optimisation dans des contextes différents (économie, volumes d'une boîte…) ; ils font appel à des fonctions polynômes de degré inférieur à 3 ou à des fonctions rationnelles.

L'utilisation des **TICE** a été développée à plusieurs endroits dans le chapitre :

– Pour les calculatrices, nous suggérons plusieurs fois aux élèves de vérifier la cohérence de leurs résultats avec celui affiché par la calculatrice mais nous leur montrons aussi dans les exercices 56 et 58 la nécessité de savoir déterminer les extremums locaux afin de pouvoir choisir une fenêtre de calculatrice adaptée.

– Pour les logiciels, nous avons indiqué plusieurs utilisations d'un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer ou pour contrôler un résultat (voir activité 3, exercices 100 à 102, TP 1 et 2) en particulier lors des problèmes d'optimisation liés à un contexte graphique ou géométrique.
– Conformément au programme pour certains problèmes d'optimisation un logiciel de calcul formel peut permettre de calculer la dérivée afin que l'élève se focalise alors plus sur le reste de l'étude (exercice 104, TP 2).
Certains exercices donnent quelques points de repères historiques : Euclide, Fermat, Agnesi, Bernoulli.

Les notions abordées dans le chapitre 4

1. Signe de la dérivée et variations d'une fonction
2. Extremum d'une fonction

C Avant de commencer

Le QCM et les exercices proposés dans cette page permettent de faire le point d'une part sur l'utilisation de la dérivée pour étudier le sens de variation d'une fonction (polynôme ou rationnelle) et d'autre part sur la recherche des extremums et la détermination d'inégalités.

Se tester avec des QCM

1 B ; **2** B et C ; **3** D ;
4 B ; **5** B.

Se tester avec des exercices

6 $1-4x^2$ est négatif sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]$, positif sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

7 x^2+1 est strictement positif.

8 $f'(x)=10x$.

9 $f'(x)=\dfrac{1(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

10 **1.** $f(0)=0$ et $f'(0)=5$. **2.** $y=5x$.

D Activités

Activité 1 Signe des nombres dérivés

Cette activité très courte permet par lecture graphique de déterminer le signe d'un nombre dérivé et de choisir sur quelle portion de la courbe il faut se placer pour que le nombre dérivé soit de signe fixé.

1. Pour $a=-1$, on a $f'(a)>0$; pour $b=2$, $f'(b)<0$.

2. a. $f'(x)=-2x+2$; $f'(-1)=4>0$ et $f'(2)=-2<0$.
b. $-2x+2$ est positif sur $]-\infty\,;1]$ et négatif sur $[1\,;+\infty[$; cohérent avec les réponses précédentes puisque -1 appartient à $]-\infty\,;1]$ et 2 appartient à $[1\,;+\infty[$.

Activité 2 Signe de la dérivée de fonctions de référence

Cette activité très courte permet d'utiliser les fonctions de référence pour découvrir un lien entre le signe de la dérivée d'une fonction et le sens de variation de cette fonction.

1. f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$; $f'(x)=2x$ est négatif sur $]-\infty\,;0]$ et positif sur $[0\,;+\infty[$.

2. g est croissante sur $[0\,;+\infty[$; $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est strictement positif sur $]0\,;+\infty[$.

3. Lorsque la dérivée est positive, la fonction semble être croissante.

Activité 3 Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

*Cette activité utilise le fichier **04S_activite3.ggb (Geogebra)** disponible sur le site www.bordas-indice.fr qui permet une présentation à la classe en vidéo projection de la question 2. Cependant la copie d'écran donnée sur le livre permet de traiter la question 1 de l'activité sans utiliser d'ordinateur. L'animation proposée dans le fichier numérique permet de montrer aux élèves que même lorsque la fonction f varie il y a toujours un lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée. Pour l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, on pourra se reporter à la page 344.*

1. a. *f* est croissante sur [–2,5 ; –1], décroissante sur [–1 ; 2] et croissante sur [2 ; 3,5].
b. *f'* est positive sur [–2,5 ; –1], négative sur [–1 ; 2] et positive sur [2 ; 3,5].
c. On retrouve la conjecture faite dans l'activité **2**.

2. Dans le fichier numérique, les curseurs *a, b, c et d correspondent aux coefficients de la courbe* (dessinée en bleue) d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; on peut changer la fenêtre de chaque curseur si on le souhaite en effectuant un clic droit sur ces curseurs. La courbe rouge est la courbe représentative de la fonction dérivée de la fonction *f* (pour l'obtenir on a entré Dérivée[f(x)] dans le champ de saisie).
En faisant varier le curseur *d*, on peut observer que la courbe représentative de la dérivée de la fonction *f* ne change pas ; en faisant varier les autres curseurs, on peut faire apparaître plusieurs courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f'}$; pour mieux voir le lien entre le sens de variation de la fonction *f* et le signe de la dérivée de cette fonction, on a construit deux droites verticales passant par les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ avec l'axe des abscisses ; ces droites peuvent être cachées en effectuant un clic droit sur les courbes puis en décochant Afficher l'objet .
En faisant varier les curseurs dans le fichier proposé, on fait varier la courbe $\mathscr{C}$ et donc la courbe représentant sa dérivée varie aussi ; pour chaque position du curseur on peut alors confirmer la conjecture faite précédemment entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.

Activité 4 Un minimum

Cette activité se base sur les connaissances des élèves concernant le second degré ; elle doit leur permettre de découvrir le moyen d'utiliser la dérivée pour déterminer le réel où une fonction atteint son minimum.
1. a. *f* semble admettre un minimum en $r = 1$.
b. $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ donc $f(x)$ est supérieur ou égal à 2, cette valeur étant obtenue pour $x = 1$.

2. a. Lorsque $x < 1$, $f'(x) < 0$; lorsque $x > 1$, $f'(x) > 0$; $f'(1) = 0$.
b. $f'(x) = 2x - 2$.
c. *f'* s'annule en $x = 1$ et change de signe.

Activité 5 Volume d'une boîte

Cette activité permet une première approche d'un problème d'optimisation ; la variation que l'on propose du côté de la boîte permet que l'expression du volume soit simple et que l'étude du signe de sa dérivée se fasse facilement (sans calcul de discriminant). Dans cette activité, l'élève doit découvrir le moyen d'utiliser la dérivée pour obtenir la valeur exacte du réel permettant d'atteindre un maximum.
1. $V(x) = x^2\left(\dfrac{1-x}{2}\right) = -0{,}5x^3 + 0{,}5x^2$

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
V(*x*)	0,0045	0,016	0,0315	0,048	0,0625

x	0,6	0,7	0,8	0,9
V(*x*)	0,072	0,0735	0,064	0,045

V(*x*) semble maximal pour *x* entre 0,65 et 0,75.
2. a. $V'(x) = -1{,}5x^2 + x$.

x	0,6	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65
V(*x*)	0,072	0,07256	0,07304	0,07343	0,07373	0,07394
V'(*x*)	0,06	0,05185	0,0434	0,03465	0,0256	0,01625

x	0,66	0,67	0,68	0,69	0,7
V(*x*)	0,07405	0,07 07	0,07398	0,0738	0,0735
V'(*x*)	0,0066	–0,0034	–0,0136	–0,0242	–0,035

b. *V*(*x*) semble maximal pour *x* entre 0,66 et 0,67.
c. On observe que $V'(x)$ change de signe entre $x = 0{,}66$ et $x = 0{,}67$; on peut faire la conjecture que $V'(a) = 0$.
d. On cherche *a* tel que $V'(a) = 0$; on résout l'équation $V'(x) = 0$ sur]0 ; 1[; on trouve $x = \dfrac{2}{3}$ donc d'après la conjecture de la question **c**. on trouve $a = \dfrac{2}{3}$.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 **1.** *f'* est positive sur]–∞ ; 2].
2. *f'* est négative sur [2 ; +∞[.

2 *f* est croissante sur [–3 ; 1] et décroissante sur [1 ; 4].

3 **1.** *f* est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. $f'(x) = -2$ strictement négatif sur $\mathbb{R}$, donc *f* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4 **1.** La fonction carré est décroissante sur]–∞ ; 0] et croissante sur [0 ; +∞[.

2. $f'(x) = 2x$; $2x$ est négatif sur $]-\infty\,;0]$ et positif sur $[0\,;+\infty[$,donc la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

5 **1.** f telle que $f(x)=-x^2$ est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
2. $f'(x)=-2x$; or $-2x$ est positif sur $]-\infty\,;0]$ et négatif sur $[0\,;+\infty[$; f est donc croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

6 $f'(x) = 4x$; $4x$ est négatif sur $]-\infty\,;0]$ et positif sur $[0\,;+\infty[$,donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

7 $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(x)$ est positif sur $\mathbb{R}$.
f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

8 **1.** Par lecture graphique, f est décroissante sur $[-1\,;1]$ et croissante sur $[1\,;3]$.
2. f' est donc négative sur $[-1\,;1]$ et positive sur $[1\,;3]$.

9 **1.** La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
2. Pour $f(x)=\dfrac{1}{x}$ on a $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$; ainsi la dérivée est strictement négative, donc la fonction est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

10 **1.** f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
2. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(x)$ est strictement positif sur $]0\,;+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

11 **1.** f est croissante sur $[-1\,;3]$ et décroissante sur $[3\,;5]$.
2. f admet un maximum atteint en $x=3$; ce maximum est égal à 80.

12 Le tableau de variations de f est :

x	-2		1		3
$f'(x)$		$+$		$-$	
f	$0{,}5$	↗	2	↘	0

2. Sur $[-2\,;3]$, le maximum de f est 2 et il est atteint en $x=1$; sur $[-2\,;3]$ le minimum de f est 0 et il est atteint en $x=3$.

13 f est croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque f s'annule en $x=-2$, alors f est négative sur $]-\infty\,;-2]$ et positive sur $[-2\,;+\infty[$.

14 **1.**

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
f		↘	5	↗	

2. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est égal à 5 ,donc f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

15 **1.**

x	-4		-1		1		4		5
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$			
f	2	↘	1	↗	3	↘			-1

2. a. Le maximum de f sur $[-4\,;5]$ est 3.
b. Pour tout x de $[-4\,;5]$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$.
3. a. Le minimum de f sur $[-4\,;1]$ est égal à 1, donc f est strictement positive sur $[-4\,;1]$.
b. f est positive sur $[1\,;4]$ et négative sur $[4\,;5]$.

POUR S'ENTRAÎNER

16 f est décroissante sur $[-2\,;-1]$, croissante sur $[-1\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;2]$.
2. f' est négative sur $[-2\,;-1]$, positive sur $[-1\,;1]$ et négative sur $[1\,;2]$.

17 **1.** f est croissante sur $[-4\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;4]$.
2. f' est positive sur $[-4\,;0]$ et négative sur $[0\,;4]$.
3. A est la courbe représentative de la dérivée de la fonction f.

18 A représente la fonction f, donc f' est positive sur $]-\infty\,;-1]$, négative sur $[-1\,;2]$ et positive sur $[2\,;+\infty[$, donc seule la courbe C peut représenter f'. B représente g et D représente g'.

19 **1.** Faux : la dérivée de f est positive sur $]-\infty\,;3]$.
2. Vrai.

20 **1.** Vrai.
2. Faux puisque f est décroissante sur $[-1\,;0]$.
3. Faux puisqu'on aurait alors $f'(x)=1{,}5x^2+1{,}5$.
$f'(x)$ serait strictement positif sur $\mathbb{R}$, ce qui est en contradiction avec le sens de variation de f.

21 **1.** f' est positive sur $[-1\,;2]$ et négative sur $[2\,;3]$.
2. f est croissante sur $[-1\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;3]$.

22 **1.** f' est négative sur $]-\infty\,;2]$ donc f est décroissante sur $]-\infty\,;2]$.
2. $f(a) > f(b)$.

23 **1.** $f'(x)=-2x+4$.
2. $f'(x)$ est positive sur $]-\infty\,;2]$ et négative sur $[2\,;+\infty[$.
3. f est donc croissante sur $]-\infty\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
f		↗	4	↘	

4. Tableau cohérent avec le graphique donné par la calculatrice.

24 **1.** $f'(x) = -2x + 3$.

2. f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 1{,}5]$ et décroissante sur $[1{,}5\ ;+\infty[$.

25 $f'(x) = 10x + 3$; f est décroissante sur $[-1\ ;-0{,}3]$ et croissante sur $[-0{,}3\ ;\ 1]$.

26 **1.** $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

f' est positif sur $]-\infty\ ;-1]$, négatif sur $[-1\ ;1]$ et positif sur $[1\ ;+\infty[$.

2. f est croissante sur $]-\infty\ ;-1]$, décroissante sur $[-1\ ;\ 1]$ et croissante sur $[1\ ;+\infty[$.

28 $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$.

f est croissante sur $]-\infty\ ;-2]$, décroissante sur $[-2\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

29 **1.** $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

2. $f'(x)$ est positif sur $\left]-\infty\ ;-\frac{1}{3}\right]$, négatif sur $\left[-\frac{1}{3}\ ;\ 1\right]$ et positif sur $[1\ ;+\infty[$.

3. f est croissante sur $\left]-\infty\ ;-\frac{1}{3}\right]$, décroissante sur $\left[-\frac{1}{3}\ ;\ 1\right]$ et croissante sur $[1\ ;+\infty[$.

$f(-2) = -10$; $f(1) = -1$; $f(2) = 2$; $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}$.

30 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 1$.

2. $f'(x)$ est une somme de deux termes positifs, donc $f'(x)$ est positif sur $\mathbb{R}$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

31 **1.** $f'(x) = -3x^2 - 6x + 9$; f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ -3]$, croissante sur $[-3\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;+\infty[$.

2. $y = 9x$.

32 **1.** $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$.

2. f est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{4}\right]$, et croissante sur $\left[\frac{3}{4}\ ;+\infty\right[$.

33 **1.** $f'(x) = 4x(x^2 - 1)$; sur $[0\ ;+\infty[$. $f'(x)$ est de même signe que $x^2 - 1$; f est décroissante sur $[0\ ;\ 1]$ et croissante sur $[1\ ;+\infty[$.

34 $f'(x) = 2x(x^2 - 4)$; f est décroissante sur $]-\infty\ ;-2]$, croissante sur $[-2\ ;\ 0]$, décroissante sur $[0\ ;\ 2]$ et croissante sur $[2\ ;+\infty[$.

$f(-3) = f(3) = 4{,}5$; $f(-2) = f(2) = -8$; $f(0) = 0$.

35 **1.** $f'(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$; f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $y = 9x$.

3. $f(x) - 9x = x^2\left(\frac{1}{3}x - 3\right)$; la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de T sur $]-\infty\ ;\ 9]$ et au-dessus de T sur $[9\ ;+\infty[$.

36 **1. a.** $(u + v)' = u' + v'$. Si u et v sont croissantes sur I alors u' et v' sont positives sur I, donc $(u + v)'$ aussi donc $u + v$ est croissante sur I.

b. f est croissante sur $[1\ ;\ 8]$ comme somme de deux fonctions croissantes sur $[1\ ;\ 8]$.

2. Si u et v sont décroissantes sur I alors u' et v' sont négatives sur I, donc $(u + v)'$ aussi donc $u + v$ est décroissante sur I.

3. a. u est décroissante sur $\mathbb{R}$ et v est croissante sur $\mathbb{R}$; $(u + v)(x) = x + 3$ donc la fonction $u + v$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. u telle que $u(x) = x - 3$ et v telle que $v(x) = -2x$ sont deux fonctions qui n'ont pas le même sens de variation sur $\mathbb{R}$ et telles que la somme des deux est décroissante sur $\mathbb{R}$.

37 **1.** $f'(x) = 3 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$.

2. f est donc croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

3. f est la somme de deux fonctions croissantes sur $[0\ ;+\infty[$.

38 $f'(x) = \frac{2}{(2x)^2} > 0$; f est donc croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

39 $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$; f est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1[$.

41 **1.** $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$.

2. f est croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

42 **1.** $f'(x) = 3 + \frac{1}{x^2} > 0$.

2. f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

43 $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2}$

f est décroissante sur $]1\ ;+\infty[$.

44 f est décroissante sur $]0\ ;\ 2]$ et croissante sur $[2\ ;+\infty[$.

45 **1.** $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$; pour u strictement positive, le signe de $\frac{-u'}{u^2}$ est le même que le signe de $-u'$; si u est croissante sur I alors u' est positive donc $-u'$ est négative donc la fonction $\frac{1}{u}$ est décroissante sur I.

2. a. u est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

b. Puisque u est strictement positive, u et $\frac{1}{u}$ ont des sens de variation contraire d'après **1.**, donc f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, et décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

46 Vrai.

47 Faux, car f est décroissante sur $[-0{,}1\ ;\ 0{,}1]$.

48 Vrai.

49 Vrai.

50 Faux car $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$; $f'(x)$ est négatif sur $]0\ ;\ 1]$ donc f est décroissante sur $]0\ ;\ 1]$.

51 Vrai car $f'(x) = \frac{1}{(2x)^2} > 0$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

52 **a.** et **b.** Par lecture graphique, le minimum de f semble être égal à $-3{,}5$ et être atteint en $x = 1$.

2. a. $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$.
Ce polynôme admet deux racines : –2 et 1 ; il est positif à l'extérieur de l'intervalle des racines et négatif à l'intérieur.
b. Le minimum de f sur [–2 ; 2] est égal à $f(1)$, c'est-à-dire –3,5.

53 **1.** Par lecture graphique, le maximum de f sur [0 ; 2] semble être égal à –2.
2. a. $f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1 - x^2)$. $f'(x)$ est négatif sur [–2 ; –1], positif sur [–1 ; 1] et négatif sur [1 ; 2].
b. c. Le maximum de f sur [0 ; 2] est égal à –2.
d. Pour tout x de [–2 ; 2], $-6 \leqslant f(x) \leqslant -2$.

54 **1.** f est croissante sur $]-\infty\,;-2]$, décroissante sur $\left[-2\,;\frac{4}{3}\right]$, croissante sur $\left[\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$.
2. Le maximum de f sur [–3 ; 2] est atteint en $x = -2$; ce maximum est égal à 12.

55 **1.** f est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$, croissante sur [–1 ; 2], décroissante sur $[2\,;+\infty[$.
2. Le maximum de f sur [0 ; 3] est atteint en $x = 2$.
3. Le minimum de f sur [0 ; 3] est égal à –1 car $f(0) = -1$ et $f(3) = 0{,}5$.

56 **1.** f semble être croissante sur [–10 ; 10].
2. a. $f'(x) = 3(x^2 - 0{,}04)$; f est croissante sur [–10 ; –0,2], décroissante sur [–0,2 ; 0,2] et croissante sur [0,2 ; 10].
b. La fenêtre de construction du premier graphique ne permet donc pas de voir le sens de variation de f pour x appartenant à [–0,2 ; 0,2].
3. a. Ce sont les extremums locaux qui sont intéressants. On trouve que f admet un maximum local égal à 0,016 et un minimum local égal à –0,016. On peut choisir une fenêtre où x est entre –0,5 et 0,5, y entre –0,1 et 0,1.

57 **1.** f est décroissante sur [–1 ; 0] et croissante sur [0 ; 1].
2. Sur [–1 ; 1] le minimum de f est atteint en $x = 0$ et il est égal à 1 ; $f(-1) = 2$ et $f(1) = \frac{4}{3}$, donc le maximum de f sur [–1 ; 1] est égal à 2.

58 **1.** $f'(x) = 0{,}06x^2 - 4{,}2x + 36$; f est croissante sur [–10 ; 10], décroissante sur [10 ; 60] et croissante sur [60 ; 80].
2. a. Le minimum de f est égal à –1 080 et le maximum de f est égal à 170.
b. On peut prendre x entre –10 et 80 ; y entre –1 100 et 180.

59 **1.** $f'(x) = -1 - \frac{1}{(2+x)^2}$. $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]-2\,;+\infty[$.
2. $\frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}$.

61 **1.** $V(x) = x^2(12 - x)$.
2. V est croissante sur [0 ; 8] et décroissante sur [8 ; 12[.
3. Le volume de ce placard est maximal pour $x = 8$ et ce volume maximal est égal à 256 dm^3.

62 **1.** f est croissante sur $]-\infty\,;5]$, décroissante sur [5 ; 15] et croissante sur $[15\,;+\infty[$.
2. $V(x) = x(30 - 2x)(15 - x) = f(x)$.
V est maximal pour $x = 5$ cm.

63 **1.** $B(x) = 450x - (x^3 - 60x^2 + 975x)$.
$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x$ pour x appartenant à [0 ; 45].
2. B est décroissante sur [0 ; 5], croissante sur [5 ; 35] et décroissante sur [35 ; 45].
3. Le bénéfice est maximal pour 35 kilogrammes.
4. Le bénéfice maximal est égal à 12 250 euros.

64 $B(x) = -0{,}02x^3 + 2{,}1x^2 - 36x - 80$.
2. Après le calcul de la dérivée et l'étude du signe de cette dérivée, on peut affirmer que le bénéfice maximum est obtenu pour la vente et la fabrication de 60 sacs.

65 **1.** $C_M(x) = 2x - 230 + \frac{7\,200}{x}$.
2. Le coût est minimal pour 60 repas servis.

66 **1.** Le coût est croissant sur [0 ; 20].
2. La fonction C_M est décroissante sur [0 ; 15] et croissante sur [15 ; 20].
Le coût moyen minimal est atteint pour $x = 15$ et égal à 75 milliers d'euros.
3. a. $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 216x$.
B est décroissante sur $[0\,;10 - 2\sqrt{7}]$, croissante sur $[10 - 2\sqrt{7}\,;10 + 2\sqrt{7}]$, et décroissante sur $[10 + 2\sqrt{7}\,;20]$.
Lorsque la production de l'entreprise est environ égale à 15,292 tonnes, le bénéfice est maximal.

67 **1.** f est croissante sur $]-\infty\,;-10\sqrt{2}]$, décroissante sur $[-10\sqrt{2}\,;0]$, croissante sur $[0\,;10\sqrt{2}]$ et décroissante sur $[10\sqrt{2}\,;+\infty[$.
2. $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{400x^2 - x^4}$.
La fonction racine carrée étant croissante, l'aire maximale est obtenue pour $x = 10\sqrt{2}$; le triangle ABC est alors isocèle et rectangle en A.

68 f est croissante sur $\left[0\,;\frac{a}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{a}{2}\,;a\right]$; le point C donc être placé au milieu du segment [AB].

69 **1.** Faux car $f(-2{,}5) = 13{,}25$.
2. Faux ; par exemple $f(3) = -38$.

70 **1.** Faux : le maximum est atteint pour $x = -1$ mais il est égal à –3.
2. Faux : g n'admet pas de minimum sur $]-\infty\,;0[$.

71 **1.** Vrai.
2. Faux : le minimum est atteint pour $x = 0$.

72 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $f(2) = 0$.
3. f est négative sur $]-\infty\,;2]$ et positive sur $[2\,;+\infty[$.

73 **1.** f est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$, croissante sur $[-1\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$.
2. Sur $]-\infty\,;1]$ f admet un minimum égal à 16, donc f est positive.
3. a. $f(3) = 0$.
b. f est positive sur $[1\,;3]$ et négative sur $[3\,;+\infty[$.
c. $x^3 \leqslant 3x + 18$ équivaut à $-x^3 + 3x + 18 \geqslant 0$.
D'après l'étude précédente, c'est sur l'intervalle $]-\infty\,;3]$ que cette inégalité est vérifiée.

74 **1.** h est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $h(1) = 0$,donc h est positive sur $[1\,;+\infty[$.
3. $f(x)$ est supérieur à $g(x)$ sur $[1\,;+\infty[$.

76 **1.** Vrai.
2. Vrai.
3. Vrai.
4. Faux : f est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$ donc $f'(x)$ est négatif sur $]-\infty\,;-1]$.

77 **1.** f est négative sur $]-\infty\,;1]$ et positive sur $[1\,;+\infty[$.
2. f est croissante sur $]-\infty\,;0]$, décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{2}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.
3. $y = 8x - 12$.
4. a. g est croissante sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{4}{3}\right]$, décroissante sur $\left[-\dfrac{4}{3}\,;2\right]$ et croissante sur $]2\,;+\infty[$.
b. Le minimum de g sur $[0\,;+\infty[$ est égal à 0, donc g est positive sur $[0\,;+\infty[$.
c. La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur $[0\,;+\infty[$.

78 **1. a.** f est décroissante sur $]0\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.
b. Le minimum de f est égal à $f(1)$, c'est-à-dire 2, donc $f(x) \geqslant 2$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.
2. $x + \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x}$.

79 **1.** f est croissante sur $[0\,;4]$; de plus $f(4) = 0$, donc f est négative sur $[0\,;4]$.
2. $(0{,}5\sqrt{x} - 1)^2 = 0{,}25x - \sqrt{x} + 1 = -f(x)$.

80 Faux : f est croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x = 1$ donc f est négative sur $]-\infty\,;1]$.

81 **1.** Vrai.
2. Faux car par exemple $f(2) = -11$.

82 **1.** Vrai.
2. Faux car par exemple $f(0) = 11$.

83 **1.** $f'(x) = 6x^2 + 4$.
2. f est croissante sur $\mathbb{R}$.

84 **1.** $f'(x) = -3x^2 + 3$.
2. f est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$, croissante sur $[-1\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

85 **1.** $f'(x) = -3x^2 + 2x$.
2. f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, croissante sur $\left[0\,;\dfrac{2}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

86 **1.** f est croissante sur $]-\infty\,;0]$, décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{2}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.
2. Le minimum de f sur $[0\,;+\infty[$ est $\dfrac{23}{27}$.
3. f est donc positive sur $[0\,;+\infty[$.

87 **1.** f est croissante sur $]-\infty\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.
2. f est négative sur $]-\infty\,;2]$ et positive sur $[2\,;+\infty[$; tous les réels strictement supérieurs à 2 sont tels que $x^3 > 3x + 2$.

88 **1.** f est décroissante sur $]0\,;2]$ et croissante sur $[2\,;+\infty[$.
2. Le minimum de f sur $]0\,;+\infty[$ est égal à 4.

89 **1.** f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.
2. $f(1) = 0$.
3. f est négative sur $]0\,;1]$ et positive sur $[1\,;+\infty[$.
4. Pour tout x tel que $0 < x \leqslant 1$, on a $x^2 \leqslant \dfrac{1}{x}$.

POUR FAIRE LE POINT

1 C ; **2** A et B ; **3** D ; **4** B, C et D ;
5 C. **6** B et C ; **7** B et D ; **8** A et D ;
9 A, C et D.

POUR APPROFONDIR

90 **1.** f est croissante sur $[0\,;\sqrt{50}]$ et décroissante sur $[\sqrt{50}\,;10]$.
Le maximum de f est atteint pour $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
2. a. x appartient à $]0\,;10[$.
b. Aire ABC $= \dfrac{1}{2}x\sqrt{25 - \dfrac{x^2}{4}}$.
c. $V(x) = 20 \times \dfrac{1}{2}x\sqrt{25 - \dfrac{x^2}{4}} = 10x\sqrt{25 - \dfrac{x^2}{4}}$.
3. a. $V(x) = 5\sqrt{f(x)}$.
b. V a le même sens de variation que f.
c. Le volume est maximal pour $x = 5\sqrt{2}$ et le volume maximal est égal à 250 cm^3.

91 **1.** Volume $= 2 \times \dfrac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$; or $r^2 + h^2 = 9$ donc $V(h) = \dfrac{2}{3}\pi \times (9 - h^2) \times h$.

2. Le signe de V' est le même que le signe de $\sqrt{3} - h$, donc V est croissante sur $]0 ; \sqrt{3}]$ et décroissante sur $[\sqrt{3} ; 3[$.

$h_0 = \sqrt{3}$.

3. Le volume maximal est égal à $4\pi\sqrt{3}$ soit environ 21,766 dm^3.

4. $r_0^2 = 6$ donc $r_0 = h_0\sqrt{2}$.

92 **1.** $r^2 = 50^2 - OC^2 = 50^2 - (h - 50)^2$

Donc $r^2 = 100\,h - h^2$.

2. $V = \frac{1}{3}\pi(100h - h^2)h$.

3. Le volume du cône est maximal pour $h = \frac{200}{3}$.

93 **1. a.** $R = x + \text{OH}$ et $R^2 = \text{OH}^2 + 200^2$.

b. On a : $(x + \text{OH})^2 = \text{OH}^2 + 200^2$, d'où OH en fonction de x.

c. $R = x + \frac{20\,000}{x} - \frac{x}{2} = f(x)$.

2. a. Sur $[100 ; 300]$ le signe de f' est le même que le signe de $x - 200$, donc f est décroissante sur $[100 ; 200]$ et croissante sur $[200 ; 300]$.

b. f est minimale pour $x = 200$.

3. a. R est minimal pour $x = 200$ et alors $R = 200$.

b. L'arc $\widehat{\text{AB}}$ est alors un demi-cercle.

94 **2. a.** Aire MNPQ $= -0{,}1x^3 + 40x$.

b. L'aire est maximale pour $x = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

3. La longueur de la poutre permettant que l'aire soit maximale est environ 23,09 m.

95 **1.** $y = 5 - 3x$.

2. Aire $= x^2 + x(5 - 3x) = -2x^2 + 5x$.

3. L'aire est maximale pour $x = 1{,}25$ et alors $y = 1{,}25$; le logo est alors formé de deux carrés.

96 **1.** Pour $a = -5$, f est croissante sur $\left]-\infty ; -\frac{5}{3}\right]$, décroissante sur $\left[-\frac{5}{3} ; 1\right]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Pour $a = 5$ et $a = \frac{1}{3}$, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. f est croissante sur $\mathbb{R}$ lorsque $f'(x)$ est toujours supérieur à 0, c'est-à-dire lorsque $4 - 12a$ est inférieur ou égal à 0, donc pour $a \geqslant \frac{1}{3}$.

97 C doit être tel que AC $= \frac{2}{3}a$.

98 **1.** Pour $a = 1$, f est décroissante sur $]0 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Pour $a = -1$ f est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. a doit être inférieur ou égal à 0.

99 **1. a.** g est croissante sur $[0 ;1]$ et décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

b. g est négative sur $[0 ; +\infty[$, donc $2\sqrt{x} \leqslant x + 1$.

2. a. $y = 0{,}5x + 0{,}5$.

b. $\mathscr{C}$ est en dessous de la tangente.

100 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 04S_exercice100.ggb (Geogebra), 04S_exercice100.fig (CABRI)***

1. f est décroissante sur $[0 ; 6]$.

2. Construire la courbe, puis le point M variable sur cette courbe puis son projeté H sur l'axe (Ox) et le triangle OMH ; faire afficher l'aire et déplacer le point M.

3. a. Aire $= \frac{1}{2}xf(x)$.

b. $A'(x) = \frac{12(2 - x)(2 + x)}{(x^2 + 4)^2}$.

A est maximal pour $x = 2$.

101 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 04S_exercice101.ggb (Geogebra), 04S_exercice101.fig (CABRI)***

1. f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. a. Construire le point A, puis le milieu de [OA] puis le cercle ; pour construire une droite passant par A et de coefficient variable il y a différentes possibilités ; dans le fichier joint nous avons choisi de construire un point H variable sur [Ox) ; construire ensuite la droite (AH) puis les points K et M ; animer le point H et faire apparaître la trace du point M.

b. $y = mx + 2$.

c. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

d. $\text{H}\left(-\frac{2}{m} ; 0\right)\ \text{K}\left(\frac{-2m}{1+m^2} ; \frac{2}{1+m^2}\right)$.

e. Le point M a pour coordonnées $\left(-\frac{2}{m} ; \frac{2}{1+m^2}\right)$.

La courbe décrite par le point M a pour équation $y = \frac{2x^2}{4 + x^2}$.

102 ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 04S_exercice102.ggb (Geogebra).***

1. $3x^4 + 2x^2 - 1$ est négatif sur $\left[0 ; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et positif sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}} ; +\infty\right[$.

2. a. $f'(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^2}$; f est donc décroissante sur $\left[0 ; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}} ; +\infty\right[$.

b. Le minimum de f est atteint en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et il est égal à $\frac{16}{3\sqrt{3}}$.

3. Construire la courbe $\mathscr{C}_g$ puis le point M sur cette courbe et utiliser l'outil tangente.

4. a. $y = -x + 1{,}25$.

b. A(1,25 ; 0) et B(0 ; 1,25).

c. Aire AOB = 0,78125.

5. a. $\text{M}(x ; 1 - x^2)$; $Y = -2xX + 1 + x^2$.

b. $\text{A}\left(\frac{1+x^2}{2x} ; 0\right)$.

c. $B(0\ ;\ 1+x^2)$.

d. Aire AOB $= 0{,}25f(x)$.

e. L'aire AOB est minimale pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, soit environ 0,58.

103 **1. a.** $f'(x) = 3(1+x)^2$.

b. $y = 3x + 1$.

2. a. g est croissante sur $]-\infty\ ;\ -2]$, décroissante sur $[-2\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Le minimum de g sur $[-2\ ;\ 2]$ est égal à 0, donc g est positive sur $[-2\ ;\ 2]$.

b. $(1+x)^3 \geqslant 1 + 3x$ sur $[-2\ ;\ 2]$.

c. T est en dessous de $\mathscr{C}$ sur $[-2\ ;\ 2]$.

104 **1.** Il semble que le pli minimal mesure environ 27 cm et qu'il soit obtenu pour x environ égal à 15 cm .

2. a. D'après l'énoncé MN = MC et le point N doit appartenir au segment [AD], donc la longueur x doit être supérieure à la moitié de CD et inférieure à 21.

b. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle DMN rectangle en D, on obtient :

$DN^2 = x^2 - (21-x)^2$ donc $DN = \sqrt{21(2x-21)}$.

c. Aire triangle MDN $= \dfrac{(21-x)\times DN}{2}$

$= \dfrac{(21-x)\sqrt{21(2x-21)}}{2}$

Aire triangle MNP $= \dfrac{x \times NP}{2} = \dfrac{xy}{2}$.

Aire triangle PMC= Aire triangle MNP.

d. Aire trapèze CDNP $= \dfrac{DN+PC}{2} \times DC$

$= \dfrac{\sqrt{21(2x-21)}+y}{2}$,

par ailleurs l'aire de ce trapèze est aussi égale à la somme des aires des trois triangles MDN, MNP, et PMC. On obtient alors une égalité puis en isolant les termes contenant y, on obtient l'expression de y.

e. En se plaçant dans le triangle MCP, on a

$MP^2 = x^2 + y^2$, donc $MP^2 = \dfrac{2x^3}{2x-21}$,

donc $MP = \sqrt{\dfrac{2x^3}{2x-21}}$.

3. a. $f'(x) = \dfrac{2x^2(4x-63)}{(2x-21)^2}$.

f est décroissante sur $]10{,}5\ ;\ 15{,}75]$, puis croissante sur $[15{,}75\ ;\ 21]$.

b. Le pli minimal est atteint pour $x = 15{,}75$.

105 $y = \dfrac{50}{x}$ et $S(x) = 100 + 40x + \dfrac{2\,000}{x}$.

S est minimal pour $x = \sqrt{50}$ et alors $y = \sqrt{50}$.

Le parallélépipède est donc de hauteur 20 cm et de base un carré de côté environ 7,07 cm.

106 $y = \dfrac{P}{2} - x$ et $S(x) = \dfrac{P}{2}x - x^2$.

S est maximal pour $x = \dfrac{P}{4}$ et alors $y = \dfrac{P}{4}$.

107 $y = \dfrac{S}{x}$ et $p(x) = 2\left(x + \dfrac{S}{x}\right)$.

$p'(x) = 2\left(1 - \dfrac{S}{x^2}\right) = 2\left(\dfrac{x^2 - S}{x^2}\right)$

p est minimal pour $x = \sqrt{S}$ et alors $y = \sqrt{S}$.

108 $h = \dfrac{3}{\pi R} - R$ et $V(R) = 3R - \pi R^3$

$V'(R) = 3 - 3\pi R^2$.

V est maximal pour $R = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et alors $h = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

109 $f - g$ est décroissante sur $[a\ ;\ b]$ et s'annule en a, donc $f - g$ est négative sur $[a\ ;\ b]$.

110 Soit g telle que $g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$.

g est dérivable sur I et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Puisque f' est croissante sur I, on en déduit que $g'(x) < 0$ pour $x < a$ et $g'(x) > 0$ pour $x > a$.

g admet donc un minimum en a et ce minimum vaut 0, donc g est positive donc la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de T sur I.

F Activités TICE

TP 1 Optimisation d'une distance

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 04S_TP 1.ggb (Geogebra), 04S_TP 1.fig (CABRI).

L'objectif de ce TP est d'utiliser un logiciel de géométrie pour traiter un problème d'optimisation ; ici on cherche la distance d'un point à une courbe.

A. 1. On entre l'équation $y = x^2$ dans le champ de saisie et on construit le point A en entrant A = (0,1)

2. Pour construire le point M, on peut utiliser un curseur a pour faire varier son abscisse puis entrer ses coordonnées sous la forme $(a\,;a^2)$. On peut aussi simplement utiliser l'outil Point sur… .

3. La distance AM semble minimale pour deux valeurs de x environ égales à 0,7 et – 0,7.

4. En appelant M_0 le point en lequel la distance semble être minimale, la droite (d) passant par M_0 et perpendiculaire à (AM_0) semble être la tangente à la courbe au point M_0.

B. 1. $AM = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1)^2}$.

2. u est paire ; le minimum de u est égal à 0,75 et atteint pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ sur $[0, +\infty[$.

3. Le minimum de AM est $\sqrt{0{,}75} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Il existe deux points d'abscisses $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Remarque : nous n'avons pas demandé de démontrer la conjecture faite à la question **A. 4.** car les élèves n'ont sans doute pas lors de l'étude de ce chapitre de moyen pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires (la condition $mm' = -1$ n'est plus au programme dans les années précédentes).

C. 1. Pour construire A, il est bien utile ici de construire un curseur a avec a variant entre 0 et 4.

2. Ici on doit étudier la fonction v telle que :

$v(x) = x^4 + (1 - 2a)x^2 + a^2$.

$v'(x) = 2x(2x^2 + (1 - 2a))$; les valeurs de a telles que $v'(x)$ ne s'annule qu'une fois en 0 en changeant de signe sont les a tels que $1 - 2a$ supérieur ou égal à 0. a doit donc être inférieur à 0,5.

TP 2 Optimisation d'une aire

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 04S_TP 2.ggb (Geogebra), 04S_TP 2.fig (CABRI), 04S_TP 2.dfw (Derive) , 04S_TP 2.xcas (Xcas).

Ici c'est l'aire d'un triangle que l'on cherche à optimiser.

A. On construit le cercle, le point A, le point M sur le cercle puis le triangle AMM'. Une valeur approchée de l'abscisse du point M tel que l'aire du triangle AMM' soit maximale est environ –0,4.

B. 1. $y = \sqrt{4 - x^2}$ puisque la figure étant symétrique par rapport à l'axe des abscisses, l'énoncé propose de supposer que le point M a une ordonnée positive.

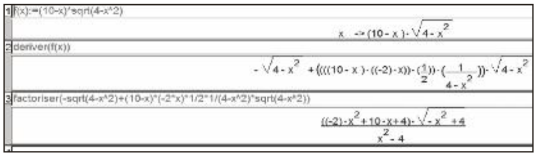
2. Appelons H le projeté du point M sur la droite (OA) et h la hauteur du triangle AMM'.

Pour trouver la hauteur h on peut distinguer deux cas ou utiliser une valeur absolue.

Si x appartient à $[0\,; 2]$, alors $h = OA - OH = 10 - x$;
si x appartient à $[-2\,; 0]$ alors $h = OA + OH$
$= 10 + (-x) = 10 - x$.

L'aire du triangle AMM' est alors égale à $(10 - x)\sqrt{4 - x^2}$.

C. Voici l'affichage donné par le logiciel Xcas :



D. Le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $-(-2x^2 + 10x + 4)$, c'est-à-dire le même que le signe de $2x^2 - 10x - 4$; la seule racine de ce polynôme comprise entre –2 et 2 est $\dfrac{5 - \sqrt{33}}{2} \approx -0{,}37$.

C'est l'abscisse du point M qui permet que l'aire du triangle AMM' soit maximale.

CHAPITRE 5

Les suites numériques

A Le programme

L'étude de phénomènes discrets fournit un moyen d'introduire les suites et leur génération en s'appuyant sur des registres différents (algébrique, graphique, numérique, géométrique) et en faisant largement appel à des logiciels. Les interrogations sur leur comportement amènent à une première approche de la notion de limite qui sera développée en classe de Terminale. L'étude des suites se prête tout particulièrement à la mise en place d'activités algorithmiques.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Modes de génération d'une suite numérique. Suites arithmétiques et suites géométriques.	• Modéliser et étudier une situation à l'aide de suites. ◇ Mettre en œuvre des algorithmes permettant : – d'obtenir une liste de termes d'une suite ; – de calculer un terme de rang donné. ▣ Établir et connaître les formules donnant $1 + 2 + \ldots + n$ et $1 + q + \ldots + q^n$.	Il est important de varier les approches et les outils. L'utilisation du tableur et la mise en œuvre d'algorithmes sont l'occasion d'étudier en particulier des suites générées par une relation de récurrence.
Sens de variation d'une suite numérique. Approche de la notion de limite d'une suite à partir d'exemples.	• Exploiter une représentation graphique des termes d'une suite.	◇ On peut utiliser un algorithme ou un tableur pour traiter des problèmes de comparaison d'évolutions et de seuils. Par exemple, dans le cas d'une suite croissante non majorée, on peut déterminer un rang à partir duquel tout terme de la suite est supérieur à un nombre donné. Le tableur, les logiciels de géométrie dynamique et de calcul sont des outils adaptés à l'étude des suites, en particulier pour l'approche expérimentale de la notion de limite. On ne donne pas de définition formelle de la limite.

B Notre point de vue

Ce chapitre traite de la notion de suites numériques, qui sont introduites dans les activités 1 et 2. Dans la première activité, la suite est définie par la restriction à l'ensemble $\mathbb{N}$ d'une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$, tandis que nous avons choisi une approche algorithmique pour présenter un exemple de suite définie par récurrence dans l'activité 2. Cette activité constitue la première des nombreuses rencontres que feront les élèves avec l'algorithmique dans ce chapitre, puisque ces compétences sont présentes à toutes les étapes, le cours pour l'obtention des termes d'une suite, les exercices de tous niveaux et enfin dans deux TP.
La seconde page de cours est consacrée aux variations des suites et à une approche de la notion de limite par la recherche de seuils, ceux-ci étant introduits dans l'activité 3. Conformément au programme, cette notion est étudiée à l'aide d'exemples, l'un pour une suite dont la limite est infinie, l'autre pour une suite convergeant vers 0. Sans pour autant que celle-ci soit formelle, nous avons fait le choix de donner une définition de la limite d'une suite dans les deux cas considérés, afin que les élèves appréhendent mieux l'intérêt et le sens de la recherche de seuils. En exercices, la recherche de seuils est aussi l'occasion d'un travail sur l'algorithmique et de programmations sur calculatrice.
Les pages 3 et 4 du cours sont consacrées aux notions de suites arithmétiques et suites géométriques qui sont introduites dans les activités 4 et 5 à travers une approche géométrique. Ces notions sont largement utilisées dans des activités de modélisations, en exercices ou en travaux pratiques.
La page « **Chercher avec méthode** » est naturellement consacrée à un problème de modélisation, et nous essayons d'apprendre à l'élève comment passer d'un phénomène discret à une modélisation par une suite numérique, puis à répondre au problème posé grâce à l'étude de cette suite.
Enfin, quatre TP sont consacrés à l'étude des suites numériques.

Les notions abordées dans le chapitre 5

1. Les suites numériques
2. Sens de variation d'une suite et recherche de seuil
3. Les suites arithmétiques
4. Les suites géométriques

C Avant de commencer

Se tester avec des QCM

1 C ; **2** A ; **3** C ; **4** B ;
5 C ; **6** B ; **7** C ; **8** B ; **9** C .

Se tester avec des exercices

10 $f(n+1) - f(n) = 2n + 2$ et $f(n) - f(n-1) = 2n$.

11 $n = 201$.

12 $E = 3^{3n+1} \times 5^{n+1}$ et $F = \dfrac{5^{n-1}}{3^{n-1}}$.

13 32 %.

14 Diminution de 20 %.

D Activités

Activité 1 Le pont suspendu

*Dans cette activité, la notion de suite est introduite à l'aide d'un exemple qui se veut concret et qui permet une première utilisation de la notation indicielle. La suite étant la restriction à l'ensemble $\mathbb{N}$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, les élèves seront invités à utiliser le mode **table** de leur calculatrice avec un pas adéquat.*

1. $l_0 = f(0) = 2{,}8$.

2.

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}
2,25	1,8	1,45	1,2	1,05	1	1,05	1,2	1,45	1,8	2,25

Activité 2 Une suite récurrente

Dans cette activité, nous donnons un exemple de suite définie par récurrence. Il nous a semblé intéressant de voir cette notion sous un aspect algorithmique car les élèves ont été familiarisés avec ces pratiques dans les classes antérieures. Après la détermination des premiers termes dans deux situations, les élèves sont amenés à découvrir la relation de récurrence induite par l'algorithme.
L'algorithme est disponible sur le site www.bordas-indice.fr : 05S_activite2.alg (Algobox).

1. Si on entre 1 comme valeur de A, les sept premiers nombres affichés sont 1 ; –1 ; –5 ; –13 ; –29 ; –61 et –125.

2. Si on entre 3 comme valeur de A, les sept premiers nombres affichés sont tous égaux à 3.

3. a. $a_1 = 2a_0 - 3$.
b. $a_2 = 2a_1 - 3$.
c. $a_{n+1} = 2a_n - 3$.

Activité 3 Un placement financier

*L'objectif de cette activité est d'introduire d'une part la notion de variation d'une suite, d'autre part d'initier la recherche de seuil à l'aide du mode **suite** de la calculatrice. L'utilisation d'un exemple de placement financier rend plus intuitif la notion de variation mais également celle de seuils.*

1. $C_1 = 1{,}04\ C_0 + 100 = 1\ 140$;

$C_2 = 1{,}04\ C_1 + 100 = 1\ 285{,}60$.

2. $C_{n+1} = 1{,}04C_n + 100$.

3. $C_1 > C_0$, $C_2 > C_1$. On peut conjecturer que $C_{n+1} > C_n$ pour tout entier naturel n. Cela se traduit par le fait que chaque année le capital de Jean Magazine augmente.

4. En utilisant le mode **suite** de la calculatrice, on obtient
$C_3 = 1\ 437{,}02$; $C_4 = 1\ 594{,}50$;
$C_5 = 1\ 758{,}29$; $C_6 = 1\ 928{,}62$; $C_7 = 2\ 105{,}76$…

5. Le premier entier naturel n tel que $C_n \geqslant 3\ 000$ est 12 ce qui correspond à l'année 2024.

6. Le premier entier tel que $C_n \geqslant 10\ 000$ est 33 et le premier entier tel que $C_n \geqslant 100\ 000$ est 87. D'un point de vue théorique on peut dire que le capital peut dépasser ces valeurs, en considérant l'espérance de vie humaine c'est plus discutable.

Activité 4 Le jardin mathématique

Dans cette activité, nous faisons découvrir la notion de suite arithmétique dans un contexte géométrique. Les élèves découvrent la relation entre deux termes consécutifs puis sont amenés à conjecturer la formule du terme général qui sera donnée en cours.

1. La distance parcourue est $2EA_0$ soit $2 \times 6 = 12$ exprimée en mètres. On a bien $d_0 = 12$.

2. $d_1 = 2 \times EA_1 = 2 \times (6 + 2) = 16$, $d_2 = 20$.

3. a. $d_1 = d_0 + 4$. $d_2 = d_1 + 4$.
b. $d_{n+1} = 2EA_{n+1} = 2 \times (EA_n + A_nA_{n+1})$
$= 2 \times (EA_n + 2) = 2EA_n + 4 = d_n + 4$.

4. a. $A_0A_6 = 6 \times 2 = 12$.
b. $d_6 = 2 \times (EA_0 + A_0A_6) = 2EA_0 + 2A_0A_6$
$= d_0 + 24 = 36$.

5. $A_0A_n = 2n$ et
$d_n = 2EA_n = 2 \times (EA_0 + A_0A_n) = 2EA_0 + 2A_0A_n$
$= d_0 + 4n = 12 + 4n$.

Activité 5 Une ligne qui se brise

Dans cette activité, nous introduisons la notion de suite géométrique dans un contexte purement géométrique. Des calculs simples permettent la construction termes à termes de plusieurs suites géométriques, les élèves découvriront les relations de récurrences et pourront conjecturer l'expression du terme général de deux de ces suites, préparant ainsi l'obtention de la formule dans le cadre du cours.

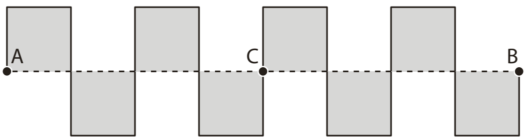
1. a. $L_1 = 6 \times \frac{1}{2} = 3$.

b. $S_1 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

2. a. $L_2 = 12 \times \frac{1}{4} = 3$.

b. $S_2 = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

3.



4. $S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n$.

5.

Étape	Nb de segments	Longueur d'un segment	Longueur du trajet	Nb de carrés	Aire d'un carré	Aire totale
1	6	$\frac{1}{2}$	3	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	12	$\frac{1}{4}$	3	4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
3	24	$\frac{1}{8}$	3	8	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$
4	48	$\frac{1}{16}$	3	16	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{16}$
5	96	$\frac{1}{32}$	3	32	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{32}$

On peut conjecturer que $L_n = 3$ et $S_n = \frac{1}{2^n}$ pour tout entier naturel n non nul.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 L'indice du troisième terme est 2, celui du seizième terme est 15.

2 L'indice du premier terme est 4.

3 $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ et $u_{15} = 225$.

4 $u_2 = 4$, $u_3 = \dfrac{9}{2}$ et $u_7 = \dfrac{13}{2}$.

5 $v_1 = 7$, $v_2 = 19$ et $v_3 = 55$.

6 **1.** $w_1 = -11$ et $w_2 = -32$.
2. $w_{n+1} = 3w_n + 1$.

7 **1.** La valeur affichée est 7.
2. Il faut saisir la valeur 2 pour N.

8 $u_4 - u_3 \leqslant 0$.

9 $u_{21} - u_{20} \geqslant 0$.

10 Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = 2$ et $2 > 0$ donc (v_n) est croissante.

11 Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = -0{,}5$ et $-0{,}5 < 0$ donc (w_n) est décroissante.

12 **1.** La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = f(n)$ où f est la fonction inverse donc (u_n) est décroissante.

13 On a $u_{69} \geqslant 1\,000$ et $u_{42} < 1\,000$, donc $u_{69} > u_{42}$.

14 $n_0 = 5\,001$.

15 $N = 10^{28} - 1$.

16 **1.** $u_1 = 5$, $u_2 = 7$, $u_3 = 9$.
2. $u_n = 3 + 2n$.

17 $v_{n+1} = v_n + (-2)$ pour tout entier naturel n.
(v_n) est arithmétique de raison -2.

18 La raison est $u_3 - u_2 = 4$.

19 $7 \times 18 = 126$; $18n$.

20 **1.** $S = 55$.
2. $S' = 5\,050$.

21 **1.** $w_1 = 6$, $w_2 = 12$ et $w_3 = 24$.
2. $w_n = 3 \times 2^n$.

22 La raison de la suite est $\dfrac{u_5}{u_4} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$.

23 Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 5v_n$ donc v_n est une suite géométrique de raison 5.

24 Au 7e pliage, l'épaisseur de la tôle est $2^7 = 128$ millimètres. Au $n^{\text{ième}}$ pliage, la tôle a une épaisseur de 2^n millimètres.

25 $S = 797\,161$, $S' = 2 - \dfrac{1}{2^{12}} = \dfrac{8191}{4\,096}$.

POUR S'ENTRAÎNER

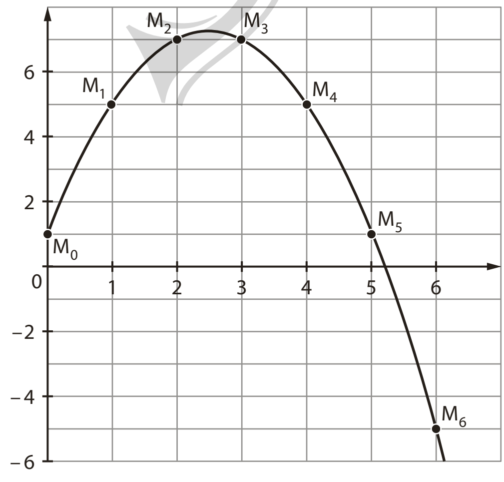
26 **1.** $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 7$, $v_0 = 0$, $v_1 = -1$, $v_2 = 1$.
2. $u_4 = 31$, $v_4 = 1$.

27 **1.** $u_0 = 1$, $u_1 = -4$, $u_2 = -19$, $v_0 = 1$, $v_1 = -4$, $v_0 = -79$.
2. $u_4 = -79$, $v_4 = -4\,868\,448\,079$.

28 **1.** $u_0 = -3$, $u_1 = 1 - \sqrt{10}$, $u_2 = 2 - \sqrt{13}$, $u_{100} = 100 - \sqrt{10\,009}$.
2. (u_n) n'est définie que pour $n \geqslant 2$, $u_2 = \dfrac{7}{2}$ et $u_{100} = \dfrac{7}{660}$.

29 **1.** $u_0 = 2$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_{100} = 2$.
2. (u_n) n'est définie que pour $n \geqslant 1$: $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ et $u_{100} = 100^{100} = 10^{200}$.
3. $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{3}{4}$ et $u_{100} = 1 - \dfrac{1}{2^{100}}$.

30 **1.** $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $u_2 = 7$, $u_3 = 7$, $u_4 = 5$, $u_5 = 1$ et $u_6 = -5$.
2.

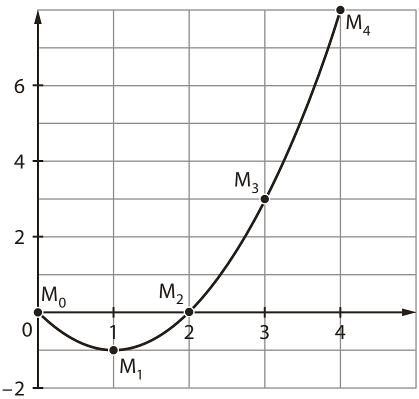


3. Pour tout entier naturel n, M_n a pour coordonnées $(n\,;-n^2 + 5n + 1)$ donc M_n est situé sur la parabole d'équation $y = -x^2 + 5x + 1$.

32 **1.** $u_0 = 5$, $u_1 = 5$ et $u_2 = 5$. On ne peut pas déduire que (u_n) est constante.
2. $u_n - 5 = n(n-1)(n-2)$ et $u_n = 5$ équivaut à $u_n - 5 = 0$, les seuls entiers naturels n tels que $u_n = 5$ sont 0, 1 et 2.

33 **1.** $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 3$ et $u_4 = 8$.
2. $n = 26$.

3.



Pour tout entier naturel n, M_n a pour coordonnées $(n,\, n^2 - 2n)$ donc le point M_n appartient à la parabole d'équation $y = x^2 - 2x$.

34 **1.** $u_{n-1} = n^2 - 5n + 5$, $u_{n+1} = n^2 - n - 1$, $u_{n+2} = n^2 + n - 1$, $u_n + 1 = n^2 - 3n + 2$ et $u_{2n} = 4n^2 - 6n + 1$.

2. $u_{n-1} = \dfrac{n}{2n+1}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{2n+5}$, $u_{n+2} = \dfrac{n+3}{2n+7}$,

$u_n + 1 = \dfrac{3n+4}{2n+3}$ et $u_{2n} = \dfrac{2n+1}{4n+3}$.

35 $u_{n-1} = n^2 - 2n + 2$ et $u_{n+1} = n^2 + 2n + 2$.

36 **1.** $u_1 = 4$, $u_2 = 10$ et $u_3 = 28$.

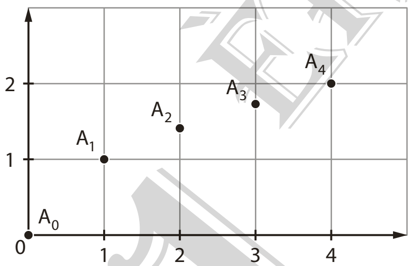
2. $u_1 = -3$, $u_2 = -8$ et $u_3 = -63$.

3. $u_1 = -5$, $u_2 = -\dfrac{1}{3}$ et $u_3 = 2$.

4. $u_1 = 2$, $u_2 = 2$ et $u_3 = 2$.

37 **1.** $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2}$, $u_3 = \sqrt{3}$ et $u_4 = 2$.

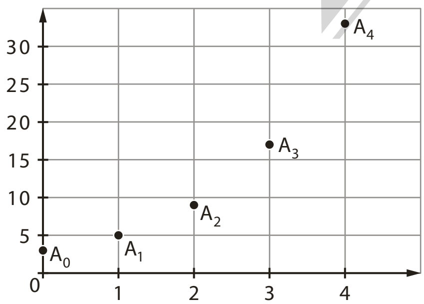
2.



38 **1.** $u_1 = 5$, $u_2 = 9$, $u_3 = 17$ et $u_4 = 33$.

2. $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

3.



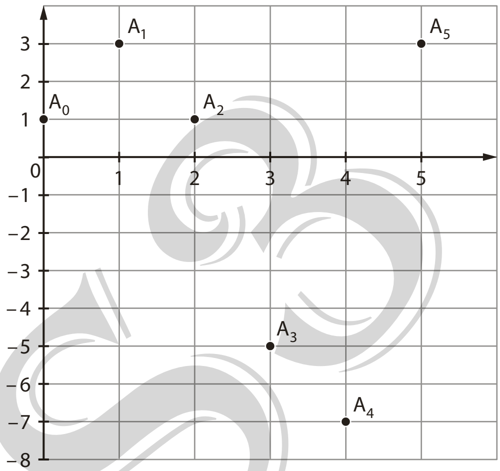
39 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 05S_exercice39.xls (Excel 2003), 05S_exercice39.xlsx (Excel 2007) et 05S_exercice39.ods (OpenOffice).***

1. $\boxed{\text{=2*A3+1}}$.

2. $\boxed{\text{=2*C2+1}}$.

40 **1.** $u_2 = 1$, $u_3 = -5$, $u_4 = -7$ et $u_5 = 3$.

2.



41 $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_5 = 8$, $u_6 = 13$, $u_7 = 21$ et $u_8 = 34$.

42

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	–1	–5	–13	–29

u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
– 61	–125	–253	–509	–1 021

u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
–2 045	–4 093	–8 189	–16 381	–32 765

u_{16}	u_{17}	u_{18}	u_{19}	u_{20}
– 65 533	–131 069	–262 141	–524 285	–1 048 573

43

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
0,63	–1,03	–3,6	20,44	1,53	–0,43	–2,28	–13,21

v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}
3,08	0,19	–1,45	–5,09	7,27	0,93	–0,8	–3

45 **1.**

TI	CASIO
PROGRAM:SUITE :Prompt A :Prompt N :For(I,1,N) :2*A+5→A :End :Disp A :	======SUITES ====== ?→A↵ ?→N↵ For 1→I To N↵ 2×A+5→A↵ Next↵ A◢ TOP BTM SRC MENU A↔a CHAR

2. $u_{11} \approx 12\ 283$.

46 **1.**

TI	CASIO
PROGRAM:SUITE :Prompt A :Prompt N :For(I,1,N) :(A+3)/(3*A²+1)→ A :End :Disp A	======SUITES ====== ?→A↵ ?→N↵ For 1→I To N↵ (A+3)÷(3×A²+1)→A↵ Next↵ A◢ TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR

2. $u_{17} \approx 0{,}241\ 785$ à 10^{-6} près.

47 ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 05S_exercice47.alg (Algobox).***

1.

```
Saisir n
  Si n > 3 alors
  montant prend la valeur 17 × n × 0,92
  Sinon montant prend la valeur 17 × n.
Afficher montant
```

2. Si le client achète au moins 4 livres, il bénéficie d'une réduction de 8 % sur la totalité de la commande.
3. Si $n \leqslant 3$, $u_n = 17n$ et si $n \geqslant 4$, $u_n = 15{,}64n$.

48 **1.** Faux. Contre-exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
2. Vrai. $u_1 = f(u_0) = 2$ et $u_2 = f(u_1) = 5$.
3. Vrai. $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3 = 2(2u_n + 3) + 3 = 4u_n + 9$.
4. Faux. $u_2 = 2$ et $u_3 = 9$.

49 **1.** (u_n) est croissante.
2. (u_n) est décroissante.
3. (u_n) est décroissante.
4. $u_n = \dfrac{5}{n} + 1$, (u_n) est décroissante.

50 **1.** $u_{n+1} - u_n = 4n + 1$. (u_n) est croissante.
2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(32n+8)}{(4n-1)^2(4n+3)^2}$. (u_n) est décroissante.
3. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1}$. (u_n) est croissante.
4. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2$. (u_n) est croissante.

51 **1.** $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$. (u_n) est croissante.
2. $u_{n+1} - u_n = -\sqrt{u_n^2 + 3}$. (u_n) est décroissante.
3. $u_{n+1} - u_n = -\left(u_n^2 + 1\right)$. (u_n) est décroissante.
4. $u_{n+1} - u_n = n^2 - n + 3 = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{4}$. (u_n) est croissante.

52 **1.** $u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^n$. (u_n) est croissante.
2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1}{2^{n+1}}$. (u_n) est décroissante.
3. $u_{n+1} - u_n = 5^n(4n+5)$. (u_n) est croissante.
4. Correctif : il faut lire $u_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$ et non pas $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-n}{2^{n+1}}$. (u_n) est décroissante.

53 **1.** $u_0 = 1$, $u_1 = 6$, $u_2 = 27$ et $u_3 = 0$. (u_n) est non monotone.
2. $v_{n+1} - v_n = 10n + 4$. (v_n) est croissante.
3. La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^3 + 7x + 3$ étant croissante, (w_n) est croissante.
4. $t_{n+1} - t_n = -(n+3)^2$. (t_n) est décroissante.

54 **1.** $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$. (u_n) est non monotone.
2. $v_{n+1} - v_n = 3n^2 + n$. (v_n) est croissante.
3. La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$ étant décroissante, (w_n) est décroissante.
4. $t_{n+1} - t_n = -\sqrt{n+1}$. (t_n) est décroissante.

56 **1.** On conjecture que la suite (u_n) est décroissante.
2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(n^2 + 9n + 3)}{(n^2+1)((n^2+2n+2)}$, ce qui permet de démontrer la conjecture.

57 **1.** $w_{n+1} - w_n = (u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n)$ donc $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$ car $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$.
2. Dans ce cas, (w_n) est décroissante.

58 Si $u_n = n^2 + 2n$ et $v_n = -n$, (w_n) est croissante.
Si $u_n = n$ et $v_n = -n^2 - 2n$, (w_n) est décroissante.

59 Si $u_n = n$ et $v_n = n^2$, (w_n) est croissante.
Si $u_n = \dfrac{-1}{n+1}$ et $v_n = (n+1)^2$, (w_n) est décroissante.

60 **1.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2}{3^{n+1}}$. (u_n) est décroissante.
2. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 0.
3. $n_0 = 7$.
4.

```
A prend la valeur 1
I prend la valeur 0
Tant que A > 10^(–90)
  I prend la valeur I + 1
  A prend la valeur 1/3^I
Fin Tant que
Afficher I
```

61 **1.** $n_0 = 99^2 = 9\ 801$.
2. $n_0 = (10^8 - 1)^2$.

62 **1.** $n_0 = 97$.
2. $n_1 = 9\ 997$.

63 **1.** On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
2. $8 + \sqrt{1009} \approx 39{,}76$ donc $n_0 = 40$.
3. N est l'entier immédiatement supérieur ou égal à $8 + \sqrt{9 + 10^p}$.

64 **1.** On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
2. $n_0 = 1\ 000$.
3. $N = 10^p$.

65 **1.** On obtient $N = 5$ en affichage.
2. Il s'agit du premier entier n tel que $u_n \geqslant 100$.
3. Il suffit de remplacer 100 par 1 000 dans la boucle « TANT QUE ».
4.

TI	CASIO
0 ↦ N 10 ↦ U While U ⩽ 1 000 N+1 ↦ N 2U–5 ↦ U End Disp N	0 ↦ N 10 ↦ U While U ⩽ 1 00 N+1 ↦ N 2U–5 ↦ U WhileEnd N◢

5. $n_0 = 8$.

66 **1.** On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 0.
2. $n_0 = 2\ 001$.

3. n_0 est l'entier immédiatement supérieur à :

$$10^p + \sqrt{10^{2p} + 10^p - 1}.$$

67 $n_0 \leqslant 45$.

68 **1.** Faux. $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = 2\ldots$

2. Faux. $u_3 \approx 7{,}06$ et $u_4 \approx -1{,}16$.

3. Vrai. $69 > 42$ et (u_n) est croissante.

4. Faux. Il suffit de prendre $u_n = (-1{,}35)^n$.

69 $u_1 = 5$, $u_2 = 7$, $u_n = 2n + 3$, $u_{25} = 53$.

70 $u_1 = 2$, $u_2 = 9$, $u_n = 7n - 5$, $u_{25} = 170$.

71 $u_1 = \frac{7}{2}$, $u_2 = 4$, $u_n = \frac{1}{2}n + 3$, $u_{25} = 15{,}5$.

72 $u_1 = 22$, $u_2 = 20$, $u_n = -2n + 24$, $u_{25} = -26$.

73 $u_1 = \frac{-9}{5}$, $u_2 = \frac{-13}{5}$, $u_n = \frac{-4}{5}n - 1$, $u_{25} = -21$.

74 **1.** (u_n) n'est pas arithmétique car $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 7$.

2. (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 2.

3. (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

4. (u_n) n'est pas arithmétique car $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et $u_2 = 10$.

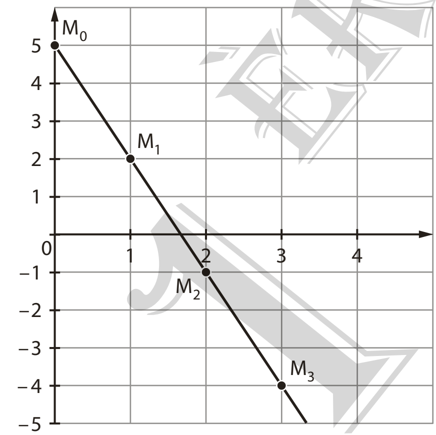
75 **1.** (u_n) n'est pas arithmétique car $u_1 - u_0 = 0$ et $u_2 - u_1 = 1$.

2. (u_n) n'est pas arithmétique car $u_1 - u_0 = 0$ et $u_2 - u_1 = 1$.

3. (u_n) est arithmétique de raison -5.

4. (u_n) n'est pas arithmétique car $u_0 = 7$, $u_1 = 15$ et $u_2 = 31$.

76



$M_n(n, y_n)$ appartient à la droite d'équation $y = -3x + 5$ donc $y_n = -3n + 5$ et $y_{n+1} - y_n = -3$ donc la suite (y_n) est arithmétique de raison -3.

77 **1.** $r = 3$.

2. $r = \frac{-1}{4}$.

78 **1.** $r = \frac{-1}{2}$.

2. $r = \frac{-31}{600}$.

79 $t_{n+1} - t_n = (u_{n+1} - 5v_{n+1}) - (u_n - 5v_n)$

$= (u_{n+1} - u_n) - 5(v_{n+1} - v_n) = 3 - 5 \times (-2) = 13.$

$t_{10} = t_0 + 13 \times 10 = 89$.

80

```
Saisir A
Saisir r
Saisir N
Afficher A
Pour I variant de 1 à N
| A prend la valeur A + r
| Afficher A
Fin Pour
```

81 **1.** $u_{12} = 82$.

2. À partir du rang 144.

3. Pour n compris entre 72 et 143 inclus.

82 **1.** Les huit premiers termes sont nuls.

2. On pourrait conjecturer que $w_n = 0$ pour tout entier naturel n.

3. $w_8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 8 = 40\,328$.

La conjecture est fausse.

83 **1.** $u_1 = \frac{6}{13}$, $u_2 = \frac{6}{25}$, $u_3 = \frac{6}{37}$, $v_1 = \frac{13}{6}$, $v_2 = \frac{25}{6}$ et $v_3 = \frac{37}{6}$.

2. $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n + 1}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2$.

3. $v_n = \frac{1}{6} + 2n = \frac{1 + 12n}{6}$ et $u_n = \frac{6}{1 + 12n}$.

84 **1.** Vrai. $u_{n+1} = u_n + 0$ pour tout n.

2. Faux. Les points sont alignés sur une droite de coefficient directeur r.

3. Vrai. $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{3}$ pour tout n.

4. Faux. $15 \times \frac{1 + 15}{2} = 120$.

5. Faux. $3 + 0{,}6n \geqslant 1\,000$ équivaut à $n \geqslant \frac{997}{0{,}6}$, soit $n \geqslant 1\,662$.

85 **1.** $e_1 = 95$, $e_2 = 100$, $e_n = 90 + 5n$.

2. $e_{15} = 165$, donc $S = 16 \times \frac{90 + 165}{2} = 2\,040$.

86 **1.** (u_n) est arithmétique puisque pour tout n, $u_{n+1} = u_n + 20$.

2. $u_{30} = 100 + 20 \times 29 = 680$

et $u_1 + u_2 + \ldots + u_{30} = 11\,700$.

3. $S_n = u_1 + \ldots + u_n = n \times \frac{100 + 100 + 20(n - 1)}{2}$

$= 10n^2 + 90n.$

On trouve $n_{\max} = 53$.

87 **1.** $S = 1 + 2 + \ldots + n$ et $S = n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1$, donc $2S = (n + 1) + \ldots + (n + 1)$. Cette somme comportant n termes tous égaux à $n + 1$, on obtient $2S = n(n + 1)$, soit $S = \frac{n(n + 1)}{2}$.

2. $S = \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \times 11}{2} = 55$.

88 $S = u_1 + \ldots + u_9 = 9 \times \dfrac{u_1 + u_9}{2}$

$= \dfrac{9}{2} \times (u_1 + u_1 + 8 \times 2) = 9 \times (u_1 + 8).$

$S = 153$ équivaut à $u_1 = 9$ et les 9 entiers impairs sont ceux de 9 à 25.

89 $11k \leqslant 100$ équivaut à $k \leqslant 90$,

donc $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{90} 11k = 11 \times \sum_{k=0}^{90} k = 45\,045.$

91 **1.** $t_n = 5 \times 3^n$ et $t_7 = 10\,935$.

2. t est croissante car $q > 1$ et $t_0 > 0$.

92 **1.** $v_n = 3 \times (-2)^n$ et $v_{10} = 3\,072$.

2. v est non monotone car $q < 0$.

93 $v_1 = 6$, $v_2 = 12$ et $v_n = 3 \times 2^n$.

94 $v_1 = -6$, $v_2 = 12$ et $v_n = 3 \times (-2)^n$.

95 $v_1 = -6$, $v_2 = -18$ et $v_n = -2 \times 3^n$.

96 $v_1 = \dfrac{-2}{3}$, $v_2 = \dfrac{-2}{9}$ et $v_n = \dfrac{-2}{3^n}$.

97 $v_1 = \dfrac{2}{3}$, $v_2 = \dfrac{-2}{9}$ et $v_n = \dfrac{-2}{(-3)^n}$.

98 $v_1 = 6$, $v_2 = -18$ et $v_n = -2 \times (-3)^n$.

99 **1.** $v_0 = 12$, $v_1 = 24$, $v_2 = 48$, $v_3 = 96$ mais $v_4 = 180$ donc v n'est pas géométrique.

2. $u_{n+1} = 3 \times 7^{n+3} = 3 \times 7^n \times 7 = u_n \times 7$, u est donc géométrique de raison 7 et de premier terme $u_0 = 147$.

100 **1.** (v_n) n'est pas géométrique car $v_0 = 1$, $v_1 = 4$ et $v_2 = 13$.

2. (v_n) est géométrique de raison 7 et de premier terme $v_0 = 3$.

3. (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{3}$.

4. (v_n) n'est pas géométrique car $v_0 = 2$, $v_1 = 5$ et $v_2 = 13$.

101 **1.** (v_n) est géométrique de raison 5.

2. (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

3. (v_n) est géométrique de raison 0 car $v_0 = -1$, $v_n = 0$ pour tout entier n non nul.

4. (v_n) n'est pas géométrique car :

$$v_0 = 1,\ v_1 = 4 \text{ et } v_2 = 256.$$

102 $S = 87\,380$.

103 $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{15} \frac{1}{2^k} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{16}}\right) = \frac{65\,535}{32\,768}.$

104 $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{11} (-3)^k = -132\,860.$

105 **1.** $S = 5 \times \dfrac{1 - 3^9}{1 - 3} = 49\,205.$

2. $S' = 107\,567\,595$.

106

```
Saisir A
Saisir r
Saisir N
Afficher A
Pour I variant de 1 à N
  | A prend la valeur q × A
  | Afficher A
Fin Pour
```

107 **1.** $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, $qS = q + q^2 + \ldots + q^{n+1}$ et $S - qS = 1 - q^{n+1}$ soit $(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$ et $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

2. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{63} 2^k = 1{,}84 \times 10^{19}.$

108 **1.** Faux. (u_n) définie par $u_n = n^2$ n'est ni géométrique, ni arithmétique.

2. Vrai. $v_{n+1} = 1{,}07 v_n$ pour tout n.

3. Vrai. $S = \dfrac{1 - 2^{12}}{1 - 2} = \dfrac{1 - 2^{12}}{-1} = 2^{12} - 1.$

4. Faux. Contre-exemple : $v_n = 2^n + 3^n$ avec $v_0 = 2$, $v_1 = 5$ et $v_2 = 13$.

109 **1.** $b_1 = 32\,100$, $c_1 = 28\,800$, $b_2 = 34\,347$ et $c_2 = 27\,648$.

2. $b_{n+1} = 1{,}07 b_n$ et $c_{n+1} = 0{,}96\, c_n$.

3. $b_n = 30\,000 \times 1{,}07^n$ et $c_n = 30\,000 \times 0{,}96^n$.

110 **1.** $u_1 = 21\,012$.

2. $u_{n+1} = 1{,}03 u_n$ et $u_n = 20\,400 \times 1{,}03^n$.

3. $n = 24$.

111 Correctif : $u_n = u_0 \times 0{,}55^n$, d'où $u_3 \approx 16{,}64$ et $u_4 \approx 9{,}15$: il faut disposer de 4 plaques.

112 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 05S_exercice112.xls (Excel 2003), 05S_exercice112.xlsx (Excel 2007) et 05S_exercice112.ods (OpenOffice).***

1. $d_1 = 50$, $d_2 = 50 \times 0{,}98 = 49$ et $d_3 = 48{,}02$.

2. $d_{n+1} = 0{,}98 d_n$. (d_n) est géométrique de raison 0,98 et de premier terme $d_1 = 50$: $d_n = 50 \times 0{,}98^{n-1}$.

3. $L_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_n = 50 \times \frac{1 - 0{,}98^n}{1 - 0{,}98} = 2\,500 \times (1 - 0{,}98^n).$

4. Pour tout n, $0{,}98^n > 0$ donc $1 - 0{,}98^n < 1$ et $L_n < 2\,500$.

5. $N = 388$ mais $L_{387} \approx 2\,498{,}994\ldots$

113 **1.** Faux. (M_n) est géométrique de raison $1 - 0{,}165 = 0{,}835$.

2. Vrai. $0{,}835^4 \approx 0{,}486$ et $0{,}835^3 \approx 0{,}582$.

114 **1.** $v_{n+1} - v_n = n + 1 + \dfrac{1}{2(n+1) - 1} - n - \dfrac{1}{2n - 1}$

$= 1 + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n-1}$

$= \dfrac{4n^2 - 1}{4n^2 - 1} + \dfrac{2n - 1}{4n^2 - 1} - \dfrac{2n + 1}{4n^2 - 1}$

$= \dfrac{4n^2 - 1 + 2n - 1 - 2n - 1}{4n^2 - 1} = \dfrac{4n^2 - 3}{4n^2 - 1}.$

2. Pour $n = 0$, la différence $v_{n+1} - v_n = 3$ et pour $n \geqslant 1$, $4n^2 - 3$ et $4n^2 - 1$ sont positifs donc $v_{n+1} - v_n > 0$: (v_n) est croissante.

3. $n = 1\,000$.

115 Il faut lire $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+1}$ (et non pas $\dfrac{2n^2+1}{n^2+1}$).

1. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. $n_0 = 2\,001$.

3. n_0 est l'entier immédiatement supérieur à $10^p + \sqrt{10^{2p} + 10^p - 1}$.

116 **1.** $a_{n+1} = a_n + 7$. (a_n) est arithmétique de raison 7 et de premier terme $a_0 = 1\,500$ donc $a_n = 1\,500 + 7n$.

2. $n = 72$.

3. $S = \sum\limits_{k=0}^{72} a_k = 127\,896$.

117 **1.** $D_1 = 300 \times 0{,}8 = 240$.

2. $D_{n+1} = 0{,}8D_n$. (D_n) est géométrique de raison 0,8. $D_n = 300 \times 0{,}8^n$.

3. $\sum\limits_{k=0}^{29} D_k = 300 \times \dfrac{1 - 0{,}8^{30}}{1 - 0{,}8} \approx 1\,498{,}14$.

POUR FAIRE LE POINT

Attention à la question **10**, la réponse B est aussi bonne.

1 B et C ; **2** A ; **3** B ; **4** A ; **5** A ;
6 A ; **7** B ; **8** D ; **9** C ; **10** A, B et D ;
11 D ; **12** A.

POUR APPROFONDIR

118 **1. a.** $l_0 = 50\pi$, $l_1 = 25\pi$ et $l_2 = 12{,}5\pi$.

b. Le diamètre du demi-cercle $\mathscr{C}_{n+1}$ est la moitié de celui de $\mathscr{C}_n$, donc $l_{n+1} = \dfrac{1}{2} l_n$ et $l_n = \dfrac{50\pi}{2^n}$.

2. a. $L = \sum\limits_{k=0}^{7} l_k = 50\pi\left(2 - \dfrac{1}{2^7}\right) = \dfrac{6\,375\pi}{64} \approx 312{,}9$ mètres.

b. $\dfrac{312{,}9}{0{,}5} = 625{,}8$ donc il faut $625 + 1 = 626$ arbustes.

119 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 05S_exercice119.xls (Excel 2003), 05S_exercice119.xlsx (Excel 2007) et 05S_exercice119.ods (OpenOffice).***

1. D'une année à l'autre, la surface de gazon est diminuée de 20 % donc multipliée par 0,8 et on ajoute 50 puisque 50 m² de chiendent est remplacé par du gazon, d'où la formule $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 50$.

2. $u_1 = 1\,650$ et $u_0 = 2\,000$.

3. $v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = (0{,}8u_n + 50) - 250 = 0{,}8u_n - 200$.
$v_{n+1} = 0{,}8\,(u_n - 250) = 0{,}8v_n$. (v_n) est donc géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 250 = 1\,750$.

4. $v_n = 1\,750 \times 0{,}8^n$ et $u_n = v_n + 250 = 1\,750 \times 0{,}8^n + 250$.

5. $u_n \geqslant 500$ équivaut à $n \leqslant 8$.

120 **1.** $u_1 = 200 \times 1{,}04 + 200 = 408$,
$u_2 = 408 \times 1{,}04 + 200 = 624{,}32$
et $u_3 = 1{,}04u_2 + 200 \approx 849{,}29$.

2. $u_{n+1} = 1{,}04u_n + 200$.

3. a. $v_0 = u_0 + 5\,000 = 5\,200$,
$v_1 = u_1 + 5\,000 = 5\,408$ et $v_2 = 5\,624{,}32$.

b. $v_{n+1} = u_{n+1} + 5\,000 = 1{,}04\,u_n + 200 + 5\,000$
$= 1{,}04u_n + 5\,200 = 1{,}04(u_n + 5\,000) = 1{,}04v_n$.
(v_n) est donc géométrique de raison 1,04.

c. $v_n = 5\,200 \times 1{,}04^n$
et $u_n = v_n - 5\,000 = 5\,200 \times 1{,}04^n - 5\,000$.

4. 11 années.

121 **1.** $d_1 = 2$, $d_2 = 1$.

2. $d_{n+1} = \dfrac{1}{2} d_n$. (d_n) est géométrique de premier terme $d_0 = 4$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

3. $d_n = 4 \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

4. $S_n = d_0 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 4 \times 2 \times \left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

$= 8 \times \left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.

5. On conjecture que la limite de la suite (S_n) est 8.

6. Non car $S_n = 8$ équivaut à $\dfrac{1}{2^{n+1}} = 0$.

7. $n = 12$.

122 Pour $x \neq -3$, on pose $q = \dfrac{2x}{x+3}$ et on remarque que $q = 1$ ne fournit pas de solution.
Si $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + q^3 = \dfrac{1 - q^4}{1 - q}$ et l'équation équivaut alors à $1 - q^4 = 0$ soit $q^4 = 1$, d'où $q = -1$ puisque 1 est exclut.
$\dfrac{2x}{x+3} = -1$ équivaut à $x = -1$.

123 **A. 1.** Le triangle OAB est équilatéral et [OA′] est la hauteur issue de O de ce triangle donc $OA' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} OA$.
Le triangle OA′B′ est équilatéral donc A′B′ = OA′.
De plus OA = AB, d'où l'égalité :

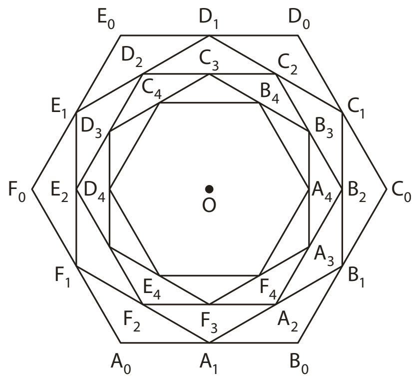
$$A'B' = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \quad \text{et} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Si a est le coté d'un triangle équilatéral l'aire du triangle est $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times a^2$. On déduit que :

$$\frac{s'}{s} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} A'B'^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} AB^2} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

3. $a = 6s$ et $a' = 6s'$, donc $a' = \dfrac{3}{4} a$.

B. 1.



2. D'après la partie A, on a $c_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, c_n$.
La suite (c_n) est donc géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $c_0 = 8$.

3. $c_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

$A_4B_4 = c_4 = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 8 \times \frac{9}{16} = \frac{9}{2}$.

4. D'après la partie A, on a $a_{n+1} = \frac{3}{4}\, a_n$.

5. $a_0 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = 96\sqrt{3}$. La suite (a_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$, donc $a_n = 96\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

6. $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{4}$ équivaut à $n \geqslant 5$.

124 **1.** $1 - \mathcal{A}_n$ désigne la partie non coloriée après le n[ième] coloriage, on a alors :

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + \frac{1}{9}(1 - \mathcal{A}_n) = \frac{8}{9}\mathcal{A}_n + \frac{1}{9}.$$

2. $\mathcal{B}_{n+1} = \mathcal{A}_{n+1} - 1 = \frac{8}{9}\mathcal{A}_n + \frac{1}{9} - 1$

$= \frac{8}{9}\mathcal{A}_n - \frac{8}{9} = \frac{8}{9}\mathcal{A}_n - 1 = \frac{8}{9}\mathcal{B}_n$.

La suite $(\mathcal{B}_n)$ est géométrique de raison $\frac{8}{9}$ et de premier terme $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_1 - 1 = \frac{1}{9} - 1 = \frac{-8}{9}$.

$$\mathcal{B}_n = -\frac{8}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = -\left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

3. $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_n + 1 = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$.

4. On conjecture que la limite de la suite $(\mathcal{A}_n)$ est 1. On se rapproche, sans jamais l'atteindre, d'un coloriage complet du carré.

125 La numérotation des polygones dessinés est P_0, P_1 et P_2 et non pas P_1, P_2 et P_3.

1. $c_0 = 3$, $l_0 = 1$, $p_0 = 3$ et $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$c_1 = 12$, $l_1 = \frac{1}{3}$, $p_1 = 4$ et $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$c_2 = 48$, $l_2 = \frac{1}{9}$, $p_2 = \frac{16}{3}$ et $a_2 = \frac{10\sqrt{3}}{27}$.

2. $c_{n+1} = 4c_n$ et $c_n = 3 \times 4^n$.

3. $l_{n+1} = \frac{1}{3}\, l_n$ et $l_n = \frac{1}{3^n}$.

4. $p_n = c_n l_n = \frac{3 \times 4^n}{3^n} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$. (p_n) est géométrique.
On conjecture que sa limite est $+\infty$.

5. L'aire d'un petit triangle à la $(n+1)$[ième] étape est $\frac{\sqrt{3}}{4} \times l_{n+1}^2$, soit $\frac{\sqrt{3}}{4 \times 3^{2n+2}}$. Et comme il y a c_n petits triangles à la $(n+1)$[ième] étape, on déduit :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3 \times 4^n \times \sqrt{3}}{4 \times 3^{2n+2}} = \frac{4^{n-1} \times \sqrt{3}}{3^{2n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n,$$

donc $a_{n+1} = a_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - a_k = a_n - a_0$$

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{12} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\, \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{20}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right].$$

On a alors $a_n = \frac{3\sqrt{3}}{20}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

126 **1.** $u_2 = \frac{5}{2}u_1 - \frac{3}{2}u_0 = \frac{7}{2}$ et $u_3 = \frac{23}{4}$.

2. a. $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{5}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n - u_{n+1}$

$= \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n$.

b. $v_{n+1} = \frac{3}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{3}{2}v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0$

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \frac{3}{2}} = 2 \times \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right]$.

On a alors $u_n = 2 \times \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right] + 1 = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$.

127 **1.** $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = -1$, $v_3 = 2$ et $v_4 = \frac{1}{2}$.

2. On remarque que la suite (v_n) semble périodique de période 3.

3. $v_{n+2} = 1 - \frac{1}{v_{n+1}} = 1 - \frac{v_n}{v_n - 1} = \frac{v_n - 1 - v_n}{v_n - 1} = \frac{1}{1 - v_n}$

et $v_{n+3} = 1 - \frac{1}{v_{n+2}} = 1 - (1 - v_n) = v_n$.

128 **1.** $U_{n+1} = U_n + (n+1)^2$. $U_1 = 1^2 = 1$.

2. $W_1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. $W_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$,

donc $W_{n+1} - W_n = \dfrac{1}{6}(n+1)\left[(n+2)(2n+3) - (n(2n+1)\right]$
$$= \frac{1}{6}(n+1)(6n+6),$$
donc $W_{n+1} - W_n = (n+1)^2$ d'où $W_{n+1} = W_n + (n+1)^2$.

3. $W_1 = U_1$ et la relation de récurrence permettant le calcul de W_{n+1} à partir de W_n est la même que celle permettant le calcul de U_{n+1} à partir de U_n.

On déduit que $U_n = W_n$ pour tout n,

soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

129 Il faut lire $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :
05S_exercice129.xls (Excel 2003),
05S_exercice129.xlsx (Excel 2007)
et 05S_exercice129.ods (OpenOffice).

1. On conjecture que $V_n = n^2 - 1$, donc que $U_n = \dfrac{1}{3}(n^2-1)$.

2.
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - k = 1^2 - 1 + 2^2 - 2 + \dots + n^2 - n$$
$$= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 - (1 + 2 + \dots + n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

On obtient alors :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - k = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$
et
$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 - k = \frac{(n+1)(n-1)}{3} = \frac{n^2-1}{3}.$$

130 **1. a.** $f(x) = x^0 + x^1 + x^2$ avec $x \neq 1$,

donc $f(x) = \dfrac{1-x^3}{1-x} = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ avec la formule de la somme des puissances successives d'un réel.

b. Avec la première forme, on obtient $f'(x) = 1 + 2x$ et avec la seconde $f'(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{(x-1)^2}$, d'où l'égalité.

2. On obtient $g(x) = \dfrac{1-x^4}{1-x} = \dfrac{x^4-1}{x-1}$.

En dérivant chacune des formes, on obtient :
$$g'(x) = 1 + 2x + 3x^2 = \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}.$$

3. On considère la fonction h définie sur $]1\,;+\infty[$ par $h(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$. On obtient

$h(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ et en dérivant chacune des expressions de $h(x)$ on obtient l'égalité :
$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},$$
soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

131 **1.** $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$ et $u_5 = 8$.

2.

```
A prend la valeur 1
B prend la valeur 1
Entrer la valeur de N
Pour I variant de 1 à N + 1
   | Afficher A
   | C prend la valeur A + B
   | A prend la valeur B
   | B prend la valeur C
Fin pour
```

3.

TI	CASIO
Prompt N	? ↦ N
1 ↦ A	1 ↦ A
1 ↦ B	1 ↦ B
For(I,1,N + 1)	For 1 ↦ I To
Disp A	N
A + B ↦ C	A◢
B ↦ A	A + B ↦ C
C ↦ B	B ↦ A
End	C ↦ B
	Next
	A

On obtient $u_{24} = 75\,025$.

132 **1.** OA_0 est la longueur de la diagonale du triangle rectangle isocèle OA_0A_1 donc $OA_1 = A_0A_1$ et

$OA_0 = \sqrt{2}\,OA_1$, d'où $OA_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}OA_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}OA_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $OA_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}OA_n$ puisque OA_n est la longueur de la diagonale du triangle rectangle isocèle OA_nA_{n+1}.

3. $u_{n+1} = OA_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}OA_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $u_0 = OA_0 = 1$: $u_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

4. Comme $A_{k-1}A_k = OA_k$, on a :
$$L_n = OA_0 + OA_1 + \dots + OA_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

5. On conjecture que la limite de la suite (L_n) est un réel proche de 3,4142 (en fait exactement $\sqrt{2} + 2$).

133 **A. 1.** $u_1 = 740$ et $u_2 = 644$.

2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 0{,}6u_n + 200 - 500$
$$= 0{,}6u_n - 300 = 0{,}6(u_n - 500) = 0{,}6v_n.$$
$v_0 = u_0 - 500 = 400$.

(v_n) est donc géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_0 = 400$.

b. Comme $v_0 > 0$ et $0 < 0{,}6 < 1$, (v_n) est décroissante.

c. $v_n = 400 \times 0{,}6^n$

et $u_n = v_n + 500 = 400 \times 0{,}6^n + 500$.

d. $n = 12$.

B. 1. $a_0 = 900$ et $a_1 = 0{,}8 \times a_0 + (1\,000 - a_0) \times 0{,}2 = 740$.

2. $a_2 = 0{,}8 \times a_1 + (1\,000 - a_1) \times 0{,}2 = 644$.

3. $0{,}8a_n$ correspond au nombre de clients restant de l'année n et $0{,}2 \times (1\,000 - a_n)$ correspond au nombre de clients de B venant l'année $n+1$ chez A.

4. $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 200 - 0{,}2a_n = 0{,}6a_n + 200$.

5. Étant donné les relations de récurrence et le fait que $a_0 = u_0$ on déduit que $a_n = u_n$ pour tout entier n. On peut conjecturer que la limite de (a_n) est 500, donc le marché va évoluer vers une répartition égalitaire.

Prises d'initiatives

134 À chaque étape le nombre de triangles non noircis est multiplié par 3 car comme pour la première étape, chaque triangle non noirci est divisé en 4 triangles dont un seul est noirci. Comme le nombre de triangles que l'on noircit à l'étape n est égal au nombre de triangles non noircis à l'étape $n - 1$, on déduit que, pour $n \geqslant 1$, $T_{n+1} = 3T_n$. (T_n) est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $T_1 = 1$.

Le nombre total de triangles noircis à la $n^{\text{ième}}$ étape est $S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \dfrac{1-3^n}{1-3} = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

135 **1.** $S = 3\sum\limits_{k=1}^{n} k - n = 3\dfrac{n(n+1)}{2} - n = \dfrac{3n^2+n}{2}$.

2. 11 étages et il restera 21 cartes.

136 **1.** $D_3 = 0$.

2. $D_4 = 2$.

3. Toutes les diagonales de P_n sont des diagonales de P_{n+1}, les segments reliant le nouveau sommet aux sommets de P_n sont des diagonales pour P_{n+1} sauf les deux reliant les sommets adjacents à ce nouveau sommet, enfin le côté de P_n reliant les deux sommets adjacent au nouveau sommet de P_{n+1} devient une diagonale pour P_{n+1}.

On déduit que $D_{n+1} = D_n + (n-2) + 1 = D_n + n - 1$.

4. $\sum\limits_{k=3}^{n-1} D_{k+1} - D_k = D_n - D_3 = D_n$

et $\sum\limits_{k=3}^{n-1} D_{k+1} - D_k = \sum\limits_{k=3}^{n-1} (k-1)$

$= (3-1) + (4-1) + \ldots + (n-1-1)$

$= 2 + 3 + \ldots + n - 2$

$= \sum\limits_{k=2}^{n-2} k = (n-3)\dfrac{2+(n-2)}{2} = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

F Activités TICE

TP 1 La demi-vie d'un médicament avec un tableur

Ce TP utilise le tableur pour étudier l'évolution de la concentration d'un médicament dans le sang et rechercher des seuils de concentration.

A. 1. $C_{n+1} = C_n - 0{,}035C_n = (1 - 0{,}035)C_n = 0{,}965C_n$.

2. La suite (C_n) est géométrique de raison 0,965.

3. $C_n = C_0 \times 0{,}965^n = 0{,}965^n$ puisque $C_0 = 1$.

B. Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 05S_TP1.xls (Excel 2003), 05S_ TP1.xlsx (Excel 2007) et 05S_ TP1.ods (OpenOffice).

1. Après avoir légendé les cellules **A1** et **B1** et renseigné les cellules **A2** et **B2**, inscrire dans **A3** : **=A2+1** puis dans **B3** : **=B2*0,965**. Sélectionner les deux cellules **A3** et **B3**, puis recopier vers le bas jusqu'à la ligne **302**.

2. 5 heures correspondant à 300 minutes, on obtient le nuage de points à partir de la plage réalisée précédemment en utilisant éventuellement l'aide fournie en bas de la page.

C. 1. a. On a $C_{19} \approx 0{,}508$ et $C_{20} \approx 0{,}490$, on en déduit que la concentration initiale est divisée par deux au bout d'un temps compris entre 19 et 20 minutes.

b. $C_{30} = 0{,}965^{30} \approx 0{,}34$ à 10^{-2} près.

c. $C_n \leqslant 0{,}17$ à partir du rang 50, donc la concentration est à nouveau divisée par deux au bout d'un temps supplémentaire t compris entre 19 et 20 minutes.

d. On peut conjecturer que la concentration est divisée par deux toutes les 20 minutes.

2. a. $0{,}965^{20} \approx 0{,}50$ à 10^{-2} près par excès.

b. $C_{n+20} = 0{,}965^{n+20} = 0{,}965^n \times 0{,}965^{20}$

$= C_n \times 0{,}965^{20} \approx C_n \times 0{,}50$.

Ce qui prouve la conjecture.

TP 2 Flux de populations

Ce TP utilise le tableur pour étudier l'évolution conjointe des populations de trois zones géographiques, il se poursuit par une étude mathématique des suites permettant de confirmer les conjectures émises.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 05S_TP2.xls (Excel 2003), 05S_ TP2.xlsx (Excel 2007) et 05S_ TP2.ods (OpenOffice).

A. 1. $a_0 = 5\,000$, $b_0 = 2\,000$ et $c_0 = 4\,000$.

2. $a_1 = 0{,}9a_0 + 0{,}1b_0 + 0{,}01c_0 = 4\,500 + 200 + 40 = 4\,740$.

$b_1 = 0{,}9b_0 + 0{,}1a_0 + 0{,}01c_0 = 1\,800 + 500 + 40 = 2\,340$.

$c_1 = 0{,}98c_0 = 3\,920$.

3. Dans la cellule **B3**, on entre la formule $\boxed{\text{=0,9*B2+0,1*C2+0,01*D2}}$, dans la cellule **C3** on entre la formule $\boxed{\text{=0,9*C2+0,1*B2+0,01*D2}}$, et dans la cellule **D3** on entre la formule $\boxed{\text{=0,98*D2}}$. On recopie ensuite ces formules vers le bas jusqu'à la ligne **102**.

4. Sélectionner les quatre colonnes et utiliser éventuellement l'aide en bas de page.

5. On peut conjecturer que les zones Agrandville et Bordville se partageront équitablement la totalité de la population tandis que Campaville disparaîtra.

B. 1. a. Pour conjecturer la nature de la suite (d_n), on calcule les premiers termes de cette suite dans la colonne **E** en entrant dans la cellule **E2** la formule $\boxed{\text{=B2–C2}}$ et en la recopiant vers le bas, puis on peut faire apparaître les quotients $\frac{d_{n+1}}{d_n}$ dans la colonne **F** entrant dans la cellule **F3** la formule $\boxed{\text{=E3/E2}}$ qu'on recopie vers le bas. Ces quotients étant tous égaux à 0,8, on conjecture que la suite (d_n) est géométrique de raison 0,8.

Démonstration :

$d_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1}$

$\quad = 0{,}9a_n + 0{,}1b_n + 0{,}01a_n - (0{,}9b_n + 0{,}1a_n + 0{,}01a_n)$

$\quad = 0{,}8a_n - 0{,}8b_n = 0{,}8(a_n - b_n) = 0{,}8d_n$.

b. Il faut lire $d_n = 0{,}8^n \times 3\,000$.

$d_0 = a_0 - b_0 = 5\,000 - 2\,000 = 3\,000$.

Donc (d_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $d_0 = 3\,000$, ce qui permet de déduire que pour tout entier naturel n, $d_n = 0{,}8^n \times 3\,000$.

2. a. $c_{n+1} = 0{,}98c_n$ pour tout entier naturel n.

b. (c_n) est donc géométrique de raison 0,98 et de premier terme $c_0 = 4\,000$, donc $c_n = 4\,000 \times 0{,}98^n$ pour tout entier naturel n.

3. a. $c_n \leqslant 1\,000$ équivaut à $n \geqslant 69$. Au 1er janvier de l'année 2079, la population de Campaville sera au-dessous du seuil de 1 000 habitants, ce seuil étant franchi au cours de l'année 2078.

b. $d_{69} = 0{,}8^{69} \times 3\,000 \approx 0{,}0006$ à 10^{-4} près.

Au 1er janvier 2079, l'écart du nombre d'habitants entre Agranville et Bordville est donc nul.

TP 3 La suite de Syracuse

Ce TP utilise le logiciel Algobox pour étudier quelques résultats sur la célèbre suite de Syracuse. Il peut ne pas être traité dans sa totalité sans que cela soit préjudiciable à la bonne compréhension des problèmes, la troisième partie, d'un bon niveau, pourra éventuellement n'être traitée que par des élèves ayant une certaine aisance en algorithmique.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 05S_TP3.alg, 05S_TP3-tempsdevol.alg, 05S_TP3-altitudemax.alg et 05S_TP3-tempsdevol-altitude.alg (Algobox).

A. 1.

```
Afficher le message : « donner la valeur de n »
Saisir n
Afficher n
Tant que n ≠ 1
Si n est pair
n prend la valeur n/2
Afficher n
Sinon
n prend la valeur 3n + 1
Afficher n
Fin Tant que
```

2. Pour $n = 5$, on obtient : 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1

Pour $n = 13$, on obtient : 13 ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1.

3. Pour $n = 8$, la suite obtenue est : 8 ; 4 ; 2 ; 1.

Donc $\mathscr{L}(8) = 4$.

Pour $n = 3$, la suite obtenue est : 3 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1.

Donc $\mathscr{L}(3) = 8$.

4.

```
Afficher le message : « donner la valeur de n »
k prend la valeur 1
Saisir n
Afficher n
Tant que n ≠ 1
k prend la valeur k + 1
Si n est pair
n prend la valeur n/2
Afficher n
Sinon
n prend la valeur 3n + 1
Afficher n
Fin Tant que
Afficher message « le temps de vol est » :
Afficher k
```

5. Pour compléter le fichier, inutile de tout retaper : on déclare la nouvelle variable k, puis on crée une ligne pour affecter 1 à la variable k, une ligne dans la boucle « **Tant que** » pour affecter $k + 1$ à k et enfin deux lignes en dehors de la boucle pour le message et la sortie du résultat : la valeur de k.

6. À l'aide du programme, on obtient $\mathscr{L}(26) = 11$ et $\mathscr{L}(27) = 112$.

B. 1. Si $n = 2^p$, la suite de Syracuse de n est constituée des puissances de 2 inférieures ou égales à n, c'est-à-dire des nombres 2^m avec $0 \leqslant m \leqslant p$. On a donc $\mathscr{L}(p) = p + 1$.

2. On remarque, en testant sur différentes valeurs de k, que si k est non nul, $\mathscr{L}(8k + 4) = \mathscr{L}(8k + 5)$.

3. Il suffit d'écrire les quatre premiers termes de la suite de Syracuse pour chacun des nombres :

- $8k + 4$; $4k + 2$; $2k + 1$; $3(2k + 1) + 1 = 6k + 4$
- $8k + 5$; $3(8k + 5) + 1 = 24k + 16$; $12k + 8$; $6k + 4$

Si $k \neq 0$, aucun des nombres rencontrés n'est égal à

1 et donc les suites comportent au moins 4 termes et les quatrièmes termes étant égaux les suites auront la même longueur. Dans le cas $k = 0$, les temps de vols sont différents puisque $\mathscr{L}(4) = 3$ et $\mathscr{L}(5) = 6$.

C. 1. a. La variable « max » contient la valeur la plus grande des deux valeurs n et « max » de départ.

b. En repartant du programme initial, il suffit de déclarer la nouvelle variable « max », d'ajouter une ligne pour affecter la valeur de n à la variable « max », puis dès le début de la boucle « **Tant que** » on insère le bloc de la question précédente, la variable « max » contient alors la plus grande valeur des termes rencontrés. Après la fin de la boucle « **Tant que** », on ajoute une ligne pour l'affichage de la valeur de « max », on peut aussi ajouter une ligne pour un message.

2. a. On reprend le programme de départ. On crée une nouvelle variable A qui gardera la valeur de n de départ. On affecte donc la valeur de n à A avant la boucle « **Tant que** » puis on remplace la condition (n!=1) de cette boucle par la condition $n \geqslant$ A.

b. Si k désigne le nombre d'itérations de cette boucle, le temps de vol en altitude est $k - 1$.

c. Pour compléter le programme, on définit une variable k, puis au début de la boucle « **Tant que** » on ajoute une ligne pour affecter la valeur $k + 1$ à k. Après la boucle, on ajoute une ligne pour affecter la valeur $k - 1$ à k et une autre pour afficher la valeur de k qui est le temps de vol en altitude.

d. Le temps de vol en altitude pour $n = 127$ est 23.

TP 4 Calcul d'aire

Ce quatrième et dernier TP propose d'approcher l'aire sous une courbe par la méthode des rectangles supérieurs à l'aide du logiciel Algobox. Une première partie est consacrée à la compréhension du procédé de construction de la suite, la seconde à la programmation et l'obtention d'approximation de l'aire cherchée. Enfin dans une troisième partie, on détermine, en utilisant un logiciel de calcul formel, le terme général de la suite construite, pour ensuite déterminer des seuils confirmant la conjecture effectuée dans la seconde partie.

A. 1. $S_2 = 0{,}5 \times 0{,}5^2 + 0{,}5 \times 1^2 = 0{,}625$.

2. a. Le rectangle construit sur la base $\left[0\ ;\ \frac{1}{n}\right]$ a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour « hauteur » $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$, donc son aire est $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$. Le rectangle construit sur la base $\left[\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right]$ a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour « hauteur » $f\left(\frac{k}{n}\right)$, donc son aire est $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x_k)$.

b. $S_n = \frac{1}{n} f(x_1) + \frac{1}{n} f(x_2) + \ldots + \frac{1}{n} f(x_n)$

$$= \frac{1}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

B. Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 05S_TP4.alg (Algobox).

1. a.

Saisir n
S prend la valeur 0
Pour k allant de 1 à n
S prend la valeur $S + \frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2$
Fin Pour
Afficher S

b.

```
▼ VARIABLES
  ├k EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├n EST_DU_TYPE NOMBRE
  └S EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├AFFICHER "Entrer le nombre de subdivisions"
  ├LIRE n
  ├S PREND_LA_VALEUR 0
  ▼ POUR k ALLANT_DE 1 A n
    ├DEBUT_POUR
    ├S PREND_LA_VALEUR S+1/n*pow(k/n,2)
    └FIN_POUR
  ├AFFICHER "Une valeur approchée de l'aire est "
  ├AFFICHER S
  └AFFICHER " en unités d'aire"
FIN_ALGORITHME
```

2. Pour $n = 100$, on obtient $\mathscr{A} \approx 0{,}33835$.
Pour $n = 500$, on obtient $\mathscr{A} \approx 0{,}334334$.
Pour $n = 10\,000$, on obtient $\mathscr{A} \approx 0{,}33338333$.

3. On peut conjecturer que $\mathscr{A} = \frac{1}{3}$.

C. 1. a. Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 05S_TP4.xws (Xcas) et 05S_TP4.dfw (Derive).

On obtient $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + n + 1}{6}$ à l'aide du logiciel Xcas et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ à l'aide du logiciel Derive.

b. En utilisant les fonctionnalités de développement et de simplification des logiciels ou en effectuant les calculs « à la main », on obtient $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ puis :

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

2. Si $n \geqslant 100$, alors $2n \geqslant 200$ et $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{200}$.

D'autre part si $n \geqslant 100$, alors $n^2 \geqslant 10\,000$ et $6n^2 \geqslant 60\,000$, soit $\frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{1}{60\,000} \leqslant \frac{1}{200}$.

On a donc dans le cas où $n \geqslant 100$:

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{1}{200} + \frac{1}{200}, \text{ soit } \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{1}{100}.$$

Si $n \geqslant 10^4$, alors $2n \geqslant 2 \cdot 10^4$ et $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2 \cdot 10^4}$.

D'autre part si $n \geqslant 10^4$, alors $n^2 \geqslant 10^8$ et $6n^2 \geqslant 6 \cdot 10^8$, soit $\frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{1}{6 \cdot 10^8} \leqslant \frac{1}{2 \cdot 10^4}$.

On a donc dans le cas où $n \geqslant 10^4$:

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{1}{2 \cdot 10^4},$$

soit $\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{1}{10^4}$,

soit $\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leqslant 10^{-4}$.

Ce résultat est conforme à la conjecture faite, puisque pour un nombre de subdivisions supérieur à 10 000, l'écart entre $\frac{1}{3}$ et S_n est inférieur à 0,0001.

CHAPITRE

6 Géométrie plane

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Géométrie plane Géométrie plane Condition de colinéarité de deux vecteurs : $xy' - yx'$.		
Vecteur directeur d'une droite.	▣ Utiliser la condition de colinéarité pour obtenir une équation cartésienne de droite.	On fait le lien entre coefficient directeur et vecteur directeur.
Équation cartésienne d'une droite.	• Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un vecteur directeur et un point. • Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie par une équation cartésienne.	L'objectif est de rendre les élèves capables de déterminer efficacement une équation cartésienne de droite par la méthode de leur choix.
Expression d'un vecteur du plan en fonction de deux vecteurs non colinéaires.	• Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes.	On ne se limite pas au cadre de la géométrie repérée.

B Notre point de vue

Ce chapitre « géométrie plane » traite des notions de vecteurs, de leurs applications ainsi que des équations de droites. Les vecteurs comme les équations de droites ont été abordés en classe de Seconde, les activités permettent donc de réactiver les connaissances afin de découvrir et mettre en place les nouvelles notions au programme de la classe Première scientifique.
La première activité permet d'aborder la partie 1 du cours. D'une part, nous revoyons la somme de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un réel, d'autre part nous découvrons la construction géométrique de ce produit.
Pour la partie 2 du cours, nous pourrons nous appuyer sur les activités 2 et 3 grâce auxquelles nous mettons en place la condition analytique de colinéarité et nous abordons la décomposition dans une base.
Les équations de droites sont introduites dans l'activité 4 et font l'objet de la troisième partie du cours.
De nombreux exercices de tous niveaux viennent à la suite du cours, et comme recommandé dans le programme nous ne nous limitons pas à la géométrie repérée.
La page « **Chercher avec méthode** » est consacrée à un problème d'alignement de points qu'on résout en se plaçant dans un repère lié à la figure faisant ainsi appel à de nombreuses notions du chapitre.
Enfin, deux TP concluent ce chapitre, l'occasion pour l'élève d'établir différentes conjectures grâce à un logiciel de géométrie dynamique, avant de démontrer ces résultats.

Les notions abordées dans le chapitre 6

1. Rappels et compléments sur les vecteurs
2. Applications du calcul vectoriel
3. Équations de droites

C Avant de commencer

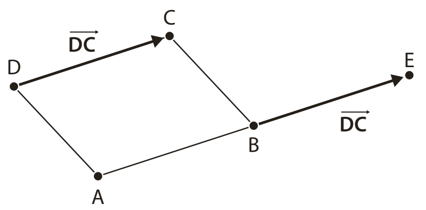
Se tester avec des QCM

1 C ; **2** B et D ; **3** A et D ; **4** B ;
5 B et C ; **6** D ; **7** A et C ; **8** C.

Se tester avec des exercices

9 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{EB}$
$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

10



$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ puisque $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, ABCD étant un parallélogramme. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, on déduit que les points A, B et E sont alignés.

11 $\overrightarrow{AB}(3\ ;\ 4)$. ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, donc $\begin{cases}x_C-3=3\\y_C-5=4\end{cases}$, soit $\begin{cases}x_C=6\\y_C=9\end{cases}$. C(6 ; 9).

12 (d) a pour équation $y=3x+p$;
or $A\in(d)$ donc $-4=3\times5+p$ soit $p=-19$ et (d) a pour équation $y=3x-19$.

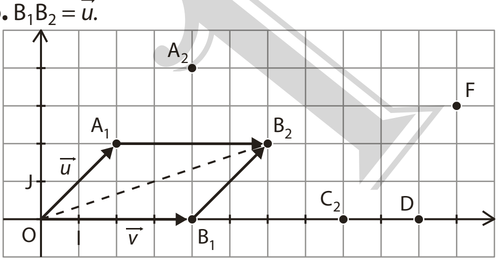
13 $AC=\sqrt{(5-1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$.
$BC=\sqrt{(5-3)^2+(2+2)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$.
On déduit que ABC est isocèle en C.
$AB=\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}$.
$AC^2+BC^2=20+20=40=AB^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on déduit que le triangle ABC est rectangle en C.

D Les activités

Activité 1 La marche du robot

Dans cette activité, nous revoyons la construction géométrique de la somme de deux vecteurs vue en classe de Seconde et nous introduisons les notions de direction, sens et longueur d'un vecteur, pour aborder la construction géométrique du vecteur $k\vec{u}$ qui a été défini par ses coordonnées en classe de Seconde.

1. a. $\overrightarrow{A_1B_2}=\vec{v}$.
b. $\overrightarrow{B_1B_2}=\vec{u}$.



c. Partant de O, le robot peut effectuer en déplacement de type « $\vec{u}$ » ce qui le conduit en A_1, puis effectuer un déplacement de type « $\vec{v}$ » qui l'amène en B_2. L'autre trajet possible est d'effectuer un déplacement de type « $\vec{v}$ » , le robot se retrouve alors en B_1 puis un déplacement de type « $\vec{u}$ » pour arriver en B_2.

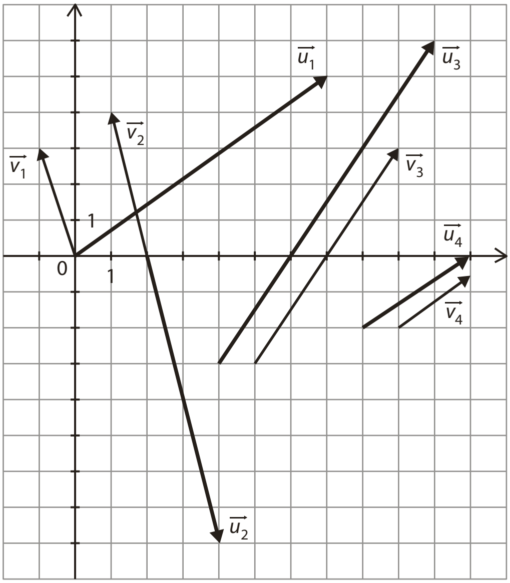
d. Le robot se retrouve en A_2.
e. C'est le seul trajet possible : il faut effectuer deux fois le trajet de type « $\vec{u}$ », on a $\vec{z}=2\vec{u}$.

2. a. Le robot se retrouve en C_2. $\overrightarrow{OC_2}=2\vec{v}$.
b. Pour aller de C_2 à D, le robot se déplace dans la direction horizontale en avant et pendant $\frac{1}{2}$ seconde.
$\overrightarrow{C_2D}=\frac{1}{2}\vec{v}$.
c. Pour aller de D à C_2, le robot se déplace dans la direction horizontale en arrière et pendant $\frac{1}{2}$ seconde.
$\overrightarrow{DC_2}=-\frac{1}{2}\vec{v}$.
d. $\overrightarrow{C_2F}=1{,}5\,\vec{u}$.

Activité 2 Colinéarité de deux vecteurs

Dans cette activité, nous établissons la condition analytique de colinéarité de deux vecteurs. Pour cela, l'élève est amené à faire le lien entre colinéarité de deux vecteurs et proportionnalité des couples de coordonnées de ceux-ci, pour ensuite proposer la formule attendue en utilisant des acquis des classes antérieures sur les tableaux de proportionnalités.

1.



2. a. Les couples de vecteurs colinéaires sont $\vec{u}_2$ et $\vec{v}_2$ d'une part et $\vec{u}_3$ et $\vec{v}_3$ d'autre part.

b. Dans le cas de deux vecteurs colinéaires, le tableau constitué des deux couples de coordonnées est un tableau de proportionnalité.

3. a. $3 \times 0{,}32 - 2 \times 0{,}48 = 0{,}96 - 0{,}96 = 0$, donc le tableau des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un tableau de proportionnalité ; les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

b. $2{,}5 \times (-2{,}1) - 1{,}5 \times (-3{,}4) = -5{,}25 + 5{,}1 = -0{,}15$ et $-0{,}15 \neq 0$, donc le tableau des coordonnées de $\vec{w}$ et $\vec{z}$ n'est pas un tableau de proportionnalité ; les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

4. a. Les couples de coordonnées de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont proportionnels.

b. En effectuant le « produit en croix » dans le tableau des coordonnées des deux vecteurs, on obtient $7x - 5 \times 4 = 0$; on a alors $7x = 20$ et $x = \frac{20}{7}$.

Activité 3 Décomposition d'un vecteur du plan

À partir de différents vecteurs représentés, l'élève exprime un vecteur en fonction d'un ou de deux autres lorsque cela est possible. Il est progressivement amené à découvrir la condition nécessaire et suffisante sur deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ pour que tout vecteur $\vec{u}$ puisse s'écrire en fonction de ces deux vecteurs.

1. $\vec{z} = 0{,}5\vec{u}$ et $\vec{w} = -1{,}5\vec{v}$.

2. a. $\vec{a}$ ne peut pas être exprimé en fonction d'un seul vecteur $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ car $\vec{a}$ n'est colinéaire à aucun de ces deux vecteurs.

b. Oui car $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$.

3. $\vec{b} = 1{,}5\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{c} = -\vec{u} + \vec{v}$.

4. Non, car $\vec{u}$ et $\vec{z}$ sont colinéaires, donc toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs est un vecteur colinéaire à ces deux vecteurs, et ni $\vec{b}$, ni $\vec{c}$ ne sont colinéaires à $\vec{u}$.

5. $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne doivent pas être colinéaires.

Activité 4 Équations cartésienne d'une droite

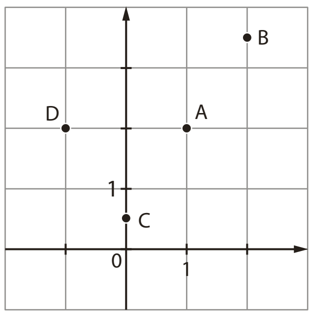
Dans cette activité, il s'agit de faire découvrir à l'élève d'autres écritures des équations de droites. Pour cela, nous partons d'une équation cartésienne sous la forme $ax + by + c = 0$ et nous faisons découvrir qu'il s'agit d'une équation de droite en utilisant la condition analytique de colinéarité. Dans une dernière partie, l'élève sera observateur pour découvrir, grâce au logiciel Geogebra, l'influence sur la droite des variations des coefficients de l'équation, puis pourra constater qu'une droite a plusieurs équations cartésiennes.

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 06-S-activite04.ggb (Geogebra).

1. a. $3 \times x_A - 2 \times y_A + 1 = 3 \times 1 - 2 \times 2 + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$, les coordonnées du point A vérifient l'équation ; A appartient donc à l'ensemble E.

b. $3 \times x_B - 2 \times y_B + 1 = 3 \times 2 - 2 \times 3{,}5 + 1 = 6 - 7 + 1 = 0$, donc le point B appartient à E. $3 \times x_C - 2 \times y_C + 1 = 0$, donc le point C appartient à E et $3 \times x_D - 2 \times y_D + 1 = -6$, donc le point D n'appartient pas à E.

2. a.



b. On conjecture que les points A, B et C sont alignés. $\overrightarrow{AB}(1 ; 1{,}5)$ et $\overrightarrow{AC}(-1 ; -1{,}5)$, on obtient alors que $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires, les points A, B et C sont donc alignés.

3. a. $\overrightarrow{AN}(x - 1 ; y - 2)$. N appartient à la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires ;

ce qui équivaut à $(x-1)\times 1{,}5-(y-2)\times 1=0$, soit à $1{,}5x-y+0{,}5=0$.

b. En multipliant par 2, les deux membres de l'égalité précédente, on obtient $3x-2y+1=0$ et on retrouve la relation définissant l'ensemble E qui est donc la droite (AB).

4. a. Lorsque la valeur de la variable c est changée, la droite correspondante est transformée en une droite parallèle.

b. Il suffit de prendre $c=-0{,}5$, $c_1=1$ et $c_2=0{,}25$.

c. Il suffit de prendre $a=-1{,}5$, $a_1=3$ et $a_2=0{,}75$.

Les trois relations obtenues sont toutes différentes mais en multipliant la relation obtenue pour (d) par -2, et celle de (d_3) par 4, on obtient la relation de (d_2).

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 **1.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{DC}$.

2. $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{HD}$.

3. Le point D.

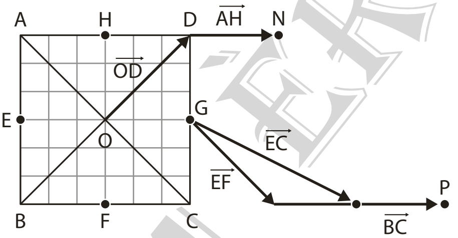
2 **1.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.

2. $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{OF}$.

3 **1.** $\vec{u}=\overrightarrow{CE}$.

2. $\vec{v}=\overrightarrow{DB}$.

4



5 **1.** $\vec{u}(3\,;1)$, $\vec{v}(4\,;0)$ et $\vec{w}(1\,;-2)$.

2. $\overrightarrow{AB}(3\,;-2)$.

3. A$(-5\,;\,4)$, B$(-2\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A)$, soit $\overrightarrow{AB}(3\,;-2)$.

4. C$(1\,;3)$.

6 **1.** $\overrightarrow{AB}(6\,;7)$ et $\overrightarrow{CD}(6\,;7)$.

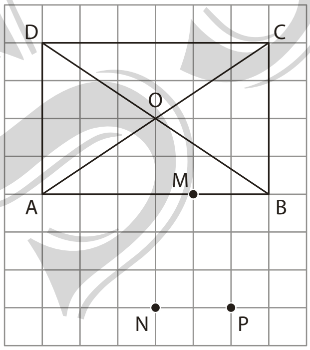
2. ABDC est un parallélogramme car $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

7 **1.** $\vec{u}+\vec{v}(3\,;6)$ et $\vec{u}-\vec{v}(-5\,;2)$.

2. $\frac{1}{2}\vec{u}\left(-\frac{1}{2}\,;\,2\right)$ et $-\frac{3}{2}\vec{v}(-6\,;-3)$.

8 $y=-1$, $t=-3$, $x=-\frac{3}{4}$, $k=\frac{3}{2}$ et $z=-\frac{5}{2}$.

9



10 **1.** $\|\vec{u}\|=5$.

2. $\|\vec{v}\|=10$, $\|\vec{w}\|=\frac{15}{4}$.

11 **1.** $\vec{v}=2\vec{u}$ et $\vec{w}=-\frac{5}{3}\vec{u}$.

2. $-2\times 9-(-7)\times 3=3$, donc $\vec{z}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.

12 $x=-\frac{21}{2}$.

13 $\vec{a}=\vec{v}+2\vec{u}$, $\vec{b}=-\vec{v}+4\vec{u}$, $\vec{c}=-\frac{3}{2}\vec{v}-\vec{u}$, $\vec{d}=3\vec{v}-2\vec{u}$.

14 **4.** $-x+4y+8=0$.

5. $0{,}5x-2y=4$.

15 **1.** A$(1\,;-1)$.

2. B$(10\,;-7)$.

16 **1.** $\overrightarrow{AB}(3\,;2)$.

17 **1.** (d_1) : $y=2x+1$; (d_2) : $y=-\frac{1}{3}x+5$ et (d_3) : $y=-3x+5$.

2. $\vec{u}_1(1\,;2)$, $\vec{u}_2(3\,;-1)$ et $\vec{u}_3(1\,;-3)$.

18 **1.** (d_1) : $\vec{u}_1(1\,;3)$, $m=3$.

2. (d_2) : $\vec{u}_2(1\,;1)$, $m=1$.

3. (d_3) : $\vec{u}_3(0\,;1)$, pas de coefficient directeur.

4. (d_4) : $\vec{u}_4(1\,;0)$, $m=0$.

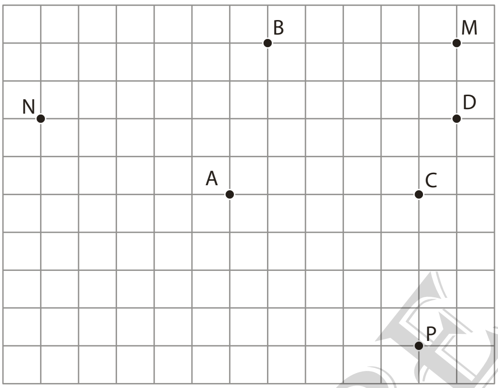
POUR S'ENTRAÎNER

19 **1.** $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{ED}$; $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CE}$.
2. $\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DF}$.

20 **1.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ puisque ABCD est un parallélogramme et $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}$ car DCEF est un losange.
On déduit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$.
2. ABEF est un parallélogramme.

21 **1.** BDFE est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DF}$.
ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.
2. $\overrightarrow{KE}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}$.
3. KEFA est un parallélogramme.

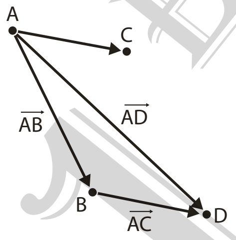
22



23 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

24 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$, donc $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{DC}$, donc BCDE est un parallélogramme.

25 **1.**



2. $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}$.

26 **1.** $\overrightarrow{AB}(1\ ;-1)$.
2. $\overrightarrow{AB}(9\ ;-8)$.
3. $\overrightarrow{AB}\left(-\dfrac{1}{6}\ ;-2\right)$.

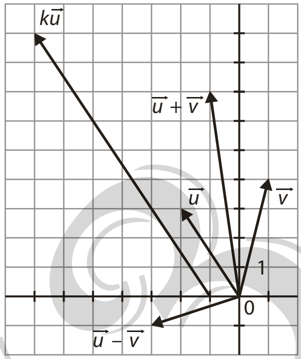
27 **1.** $\overrightarrow{AB}(6\ ;1)$.
2. $\overrightarrow{DC}(6\ ;\ 1)$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, donc ABCD est un parallélogramme.

28 **1.** $\overrightarrow{AB}(-3\ ;6)$.
2. D(6 ; –3).

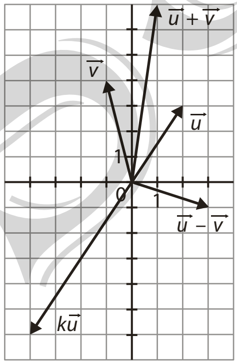
29 $\overrightarrow{AB}(1\ ;9)$; $\overrightarrow{BC}(-4\ ;-13)$; $\overrightarrow{CD}(-1\ ;7)$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(0\ ;16)$; $3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}(-1\ ;14)$; $3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CD}(-3\ ;28)$.

30 **1.** $x=-19$ et $y=10$.
2. $x=-\dfrac{25}{3}$ et $y=\dfrac{14}{3}$.

31 **1.**



2.



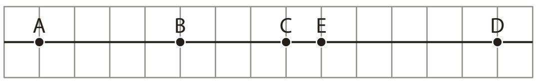
32 $\vec{u}+\vec{v}(3\ ;-1)$; $3\vec{u}-2\vec{v}(4\ ;-13)$; $2\vec{u}+3\vec{v}-\vec{w}(11\ ;-2)$.

33 **1.** N(8 ; 4).
2. P(–14 ; 4).

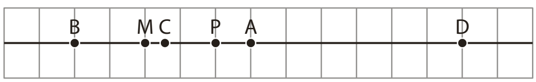
34 **1.** $\overrightarrow{AB}(-6\ ;-2)$; $\overrightarrow{AC}(-1\ ;-3)$; $\overrightarrow{BC}(5\ ;-1)$.
2. M(–7 ; –3).
3. N(1 ; –3).
4. P(13 ; 1) (Erreur d'énoncé : il faut lire $\overrightarrow{CP}$ et non pas $\overrightarrow{CN}$).

35 **1.** M(7 ; 6).
2. N(7 ; –1).

36 **1.** $\overrightarrow{AC}=\dfrac{7}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}=\dfrac{13}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
2.

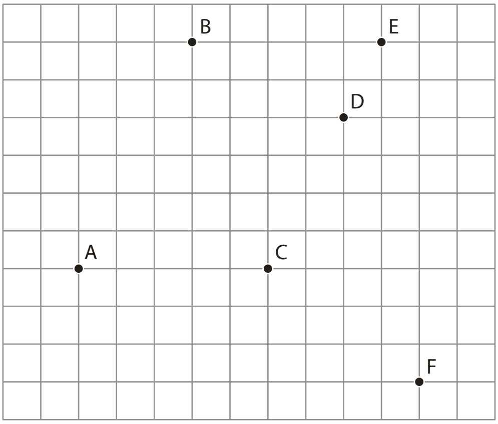


37 **1.**

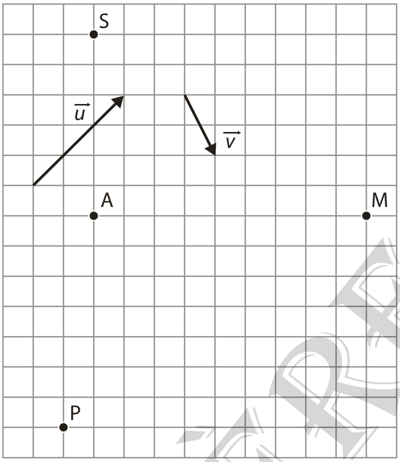


2. $x=\dfrac{5}{2}$ et $y=\dfrac{1}{4}$.

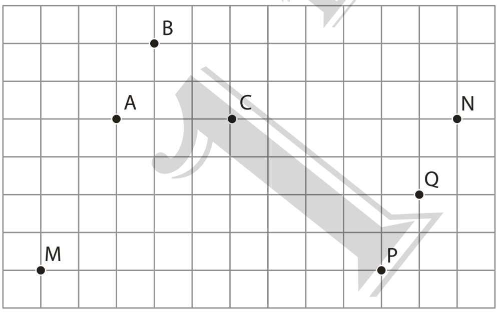
38



39



40



42 Faux, ABMC est « croisé ».

43 Faux, $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$ équivaut à $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$, soit $C = B$.

44 Vrai, on a $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, soit $2\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{GA}$ et $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}$.

45 Faux, $\overrightarrow{AB}(9\,;2)$.

46 Faux, M(3 ; –6).

47 Vrai.

48 $\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

49 $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$.

50 $\|\vec{u}\| = \sqrt{29}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{53}$.

51 $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

52 **1.**

Saisir X
Saisir Y
N prend la valeur $\sqrt{X^2+Y^2}$
Afficher N

2.

TI	CASIO
PROGRAM:EX52 :Prompt X :Prompt Y :√(X²+Y²)→N :Disp N	======EX52 ====== ?→X↵ ?→Y↵ √(X²+Y²)→N↵ N◢

53 $\overrightarrow{AB}(1\,;-3)$ et $\overrightarrow{CD}(1\,;-3)$, donc ABDC est un parallélogramme, puis $AD = BC = \sqrt{50}$, donc ABDC est un losange.

54 $\overrightarrow{AB}(-3\,;3)$ et $AB = 3\sqrt{2}$.

55 $\overrightarrow{AB}(11\,;-4)$ et $AB = \sqrt{129}$.

56 $\overrightarrow{AB}(3\,;3)$ et $AB = 3\sqrt{2}$.

57 $AB = BC = \sqrt{10}$, donc ABS est isocèle en B.

58 **1.** $AB = \sqrt{13}$, $AC = 2\sqrt{13}$ et $BC = \sqrt{65}$.
2. $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

59 **1.** $\overrightarrow{AB}(2\,;-3)$, $\overrightarrow{CD}(2\,;-3)$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et ABDC est un parallélogramme.
2. $AB = \sqrt{13}$ et $AC = \sqrt{13}$.
3. ABDC est un losange.

61 **1.** Faux, contre-exemple : $\vec{u}(4\,;3)$ et $\vec{v}(5\,;0)$.
2. Énoncé réciproque vrai : si $\vec{u} = \vec{v}$ évident et $\|-\vec{u}\| = |-1|\,\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$.

62 Faux, $\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$.

63 Faux, $\vec{u}(1\,;1)$, $\vec{v} = -2\vec{u}(-2\,;-2)$, $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{2}$ et $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$.

64 Vrai. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, on a $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $AC \leqslant AB + BC$.

65 Notons $c = x_{\vec{u}}\,y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}\,y_{\vec{u}}$.
1. $c = -1$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. $c = 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
3. $c = 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

66 **1.**

```
Saisir X
Saisir Y
Saisir A
Saisir B
C prend la valeur X×B–A×Y
Si C = 0
Afficher « vecteurs colinéaires »
Sinon
Afficher « vecteurs non colinéaires »
```

2.

TI	CASIO
Prompt X Prompt Y Prompt A Prompt B X*B–A*Y↦C If C=0 Then Disp “VECTEURS COLINEAIRES” Else DISP “VECTEURS NON COLINEAIRES” END	? ↦X↲ ? ↦Y↲ ? ↦A↲ ? ↦B↲ X*B–A*Y↦C↲ If C=0↲ Then “ VECTEURS COLINEAIRES”↲ Else “ VECTEURS NON COLINEAIRES”↲ IfEnd

67 **1.** $t = -\dfrac{8}{3}$.

2. $4y + 3x - 5 = 0$.

68 **1.** Vrai : $\vec{u} = k\vec{v}$ avec $k = 1$.

2. Faux : $\vec{u}(1\ ;3)$ et $\vec{v}(2\ ;6)$ colinéaires mais pas égaux.

69 **1.** $\overrightarrow{AC}(-11\ ;2)$ et $\overrightarrow{BD}(2\ ;-3)$ non colinéaires.

2. $\overrightarrow{AC}(-1\ ;-2)$ et $\overrightarrow{BD}(-4\ ;-8)$ colinéaires.

3. $\overrightarrow{AC}(-8\ ;-24)$ et $\overrightarrow{BD}(10\ ;30)$ colinéaires.

70 **1.** $\overrightarrow{AB}(-3\ ;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(6\ ;4)$, $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.

2. A,B et C sont alignés.

71 $\overrightarrow{AB}(3\ ;0)$ et $\overrightarrow{AC}(3\ ;4)$: points non alignés.

72 $\overrightarrow{AB}(-12\ ;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(6\ ;1)$: points alignés.

73 $\overrightarrow{AB}(12\ ;5)$ et $\overrightarrow{AC}(-7\ ;-3)$: points non alignés.

74 $\overrightarrow{AB}(-4\ ;4)$ et $\overrightarrow{AC}(0\ ;4)$: points non alignés.

75 $\overrightarrow{AB}(-124\ ;124)$ et $\overrightarrow{AC}(3\sqrt{2} - 120\ ;-3\sqrt{2} + 120)$: points alignés.

76 $y = 15$.

77 **1.**

```
Saisir X
Saisir Y
Saisir S
Saisir T
Saisir U
Saisir V
C prend la valeur (S–X)×(V–Y)–(U–X)×(T–Y)
Si C=0
Afficher « les points sont alignés »
Sinon
Afficher « les points ne sont pas alignés »
```

2.

TI	CASIO
Prompt X Prompt Y Prompt S Prompt T Prompt U Prompt V (S–X)×(V–Y)–(U–X)×(T–Y)→C If C=0 Then Disp “LES POINTS SONT ALIGNES” Else DISP “LES POINTS NE SONT PAS ALIGNES” END	?→X↲ ?→Y↲ ?→S↲ ?→T↲ ?→U↲ ?→V↲ (S–X)*(V–Y)–(U–X)*(T–Y)→C↲ IF C=0↲ Then “LES POINTS SONT ALIGNES”↲ Else “LES POINTS NE SONT PAS ALIGNES”↲ IfEnd

78 **1.** $\overrightarrow{AB}(2\ ;4)$, $\overrightarrow{CD}(3\ ;6)$ et $2 \times 6 - 3 \times 4 = 0$, donc les vecteurs sont colinéaires.

2. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

79 $\overrightarrow{BC}(21\ ;42)$, (OA) et (BC) sont parallèles.

80 $\overrightarrow{BC}(21\ ;-43)$, (OA) et (BC) ne sont pas parallèles.

81 $\overrightarrow{BC}(-10\ ;-30)$, (OA) et (BC) sont parallèles.

82 $\overrightarrow{BC}(-9\ ;-16)$, (OA) et (BC) sont parallèles.

83 $y = 12$.

84 $y = 0$.

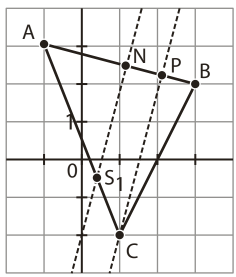
85 $y = \dfrac{7}{3}$.

86 **1.** D(10 ; 2).

2. E(4 ; –1).

3. $\overrightarrow{BD}(8\ ;4)$, $\overrightarrow{BE}(2\ ;1)$, $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BE}$, donc les points B, D et E sont alignés.

88 **1.**



2. $N\left(1\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$, $P\left(2\ ;\ \dfrac{9}{4}\right)$, $S\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right)$.

3. Voir figure.

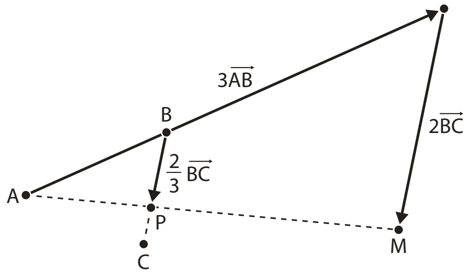
4. $\overrightarrow{PC}\left(-1\ ;\ -\dfrac{17}{4}\right)$, $\overrightarrow{SN}\left(-\dfrac{2}{3}\ ;\ -\dfrac{17}{6}\right)$

et $(-1) \times \left(-\dfrac{17}{6}\right) - \left(-\dfrac{2}{3}\right)\left(-\dfrac{17}{4}\right) = 0$.

89 $\vec{a} = 1{,}5\vec{u} - \vec{v}$; $\vec{b} = -0{,}5\vec{u} - 2\vec{v}$; $\vec{c} = 2\vec{u}$; $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$; $\vec{z} = -\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{t} = -3\vec{v}$.

90 $\vec{a} = 1{,}5\vec{u} + 0{,}5\vec{v}$; $\vec{b} = -\vec{u} - 4\vec{v}$; $\vec{c} = 2\vec{u} + 2\vec{v}$; $\vec{w} = \vec{u} + 3\vec{v}$; $\vec{z} = -\vec{u}$; $\vec{t} = 0{,}5\vec{u} - 2{,}5\vec{v}$.

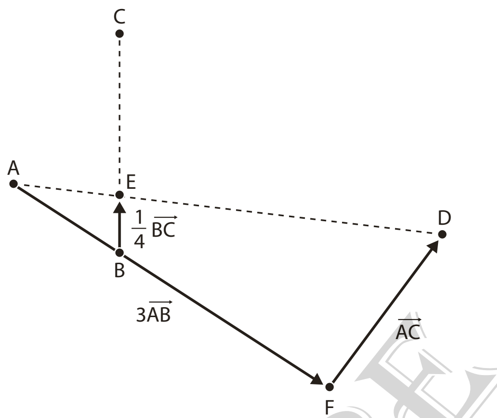
91 **1.**



2. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

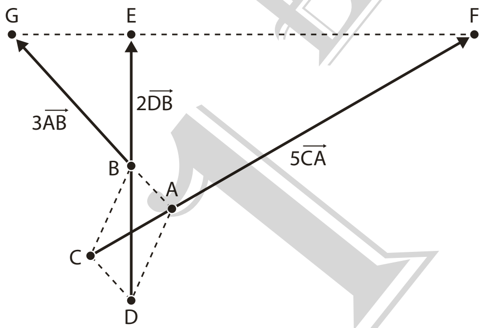
3. $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AP}$, donc A, M et P sont alignés.

92 **1.**



2. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
A, D et E sont donc alignés.

93 **1.**



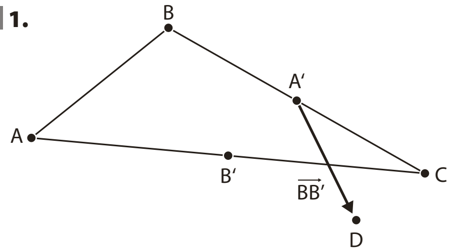
2. $\overrightarrow{EF} = -6\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{EF} = -3\overrightarrow{EG}$.
E, F et G sont donc alignés.

94 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$; par conséquent $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

95 **1.** B est le milieu de [AE].

2. D est le milieu de [FC] donc $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DC}$. Or $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$ et BEDF est un parallélogramme.

96 **1.**



2. $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{BB'}$ donc BB'DA' est un parallélogramme et $\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{BA'}$. Or $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{A'C}$, donc $\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{A'C}$, donc A'CDB' est un parallélogramme.

97 **1.** Vrai.

2. « Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, alors les points A, B, C et D ne sont pas alignés ». On peut se servir de cette contraposée pour justifier que des points ne sont pas alignés.

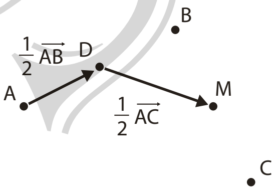
3. Non, par exemple si ABCD est un parallélogramme non aplati.

98 **1.** $\overrightarrow{IA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

99 $\overrightarrow{IL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{JK}$.

100 **1.**

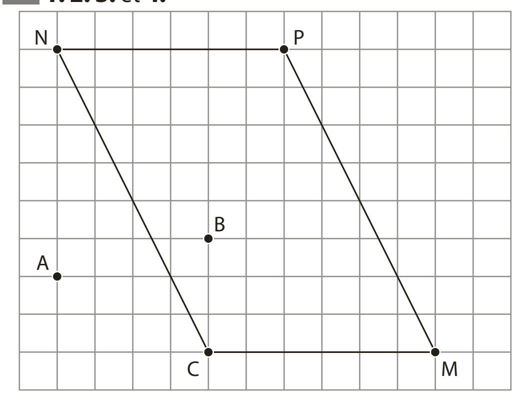


2. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, donc M est le milieu de [BC].

102 **1.** Faux.

2. Vrai si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, alors $\|\overrightarrow{AI}\| = \|\overrightarrow{IB}\|$.

103 **1. 2. 3.** et **4.**



5. $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} - \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CM}$, donc NCMP est un parallélogramme.

104 **1.** $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

2. a. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

b. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

c. A, E et C sont alignés.

3. a. $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

4. $\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

5. $\overrightarrow{BF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$, donc $F \in (BK)$.

105 Vrai, $\vec{v} = -0{,}5\vec{u}$.

106 Vrai, propriété du cours.

107 Faux, $\overrightarrow{AB}(1\,;3)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;8)$ ne sont pas colinéaires.

108 Faux, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\,;\,\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;3)$ ne sont pas colinéaires.

109 d_1 : $A_1(-2\,;3)$, $B_1(2\,;6)$ et $\vec{u}_1(4\,;3)$.
d_2 : $A_2(0\,;-2)$, $B_2(2\,;2)$ et $\vec{u}_2(2\,;4)$.
d_3 : $A_3(-3\,;0)$, $B_3(0\,;1)$ et $\vec{u}_3(3\,;1)$.
d_4 : $A_4(0\,;2)$, $B_4(2\,;0)$ et $\vec{u}_4(2\,;-2)$.
d_5 : $A_5(0\,;-3)$, $B_5(1\,;-3)$ et $\vec{u}_5(1\,;0)$.
d_6 : $A_6(2\,;1)$, $B_6(2\,;2)$ et $\vec{u}_6(0\,;1)$.

110 $\overrightarrow{AB}(2\,;5)$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB).

111 $\overrightarrow{AB}(-4\,;10)$ donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB).

112 $\overrightarrow{AB}(6\,;1)$ donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB).

113 $\overrightarrow{AB}(0\,;3)$ donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB).

114 $\overrightarrow{AB}(8\,;0)$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB).

114 $\overrightarrow{AB}(8\,;-4)$ donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB).

116 $-4x + 5y + 14 = 0$.

117 $3x + y + 3 = 0$.

118 $y - 1 = 0$.

119 $-x + y = 0$.

120 $x - 2 = 0$.

121 $x + 2y - 6 = 0$.

122 **1.** $m = -3$. **2.** $m = \frac{1}{4}$. **3.** $m = 2$.
4. $m = \frac{5}{9}$. **5.** Pas de coefficient directeur. **6.** $m = 0$.

123 **1.**

Saisir *X*
Saisir *Y*
Saisir *U*
Saisir *V*
C prend la valeur *V*×*X*–*U*×*Y*
Afficher « les coefficients *A*, *B* et *C* d'une équation *AX*+*BY*+*C*=0 sont »
Afficher –*V*
Afficher *U*
Afficher *C*

2.

TI	CASIO
Prompt X Prompt Y Prompt U Prompt V V*X–U*Y→C PAUSE "LES COEFFICIENTS D'UNE EQUATION AX+BY+C=0 SONT" DISP "A=" DISP –V DISP "B=" DISP U DISP "C=" DISP C	?→X↲ ?→Y↲ ?→U↲ ?→V↲ V*X –U*Y→C↲ "LES COEFFICIENTS A,B ET C D'UNE EQUATION AX+BY+C=0 SONT" –V◢ U◢ C◢

124 $-2x + y + 3 = 0$.

125 $x - 3y - 2 = 0$.

126 $x - y = 0$.

127 $x - 4 = 0$.

128 $y - 7 = 0$.

129 **1.** (d_2). **2.** (d_3). **3.** (d_6).
4. (d_4). **5.** (d_5). **6.** (d_1).

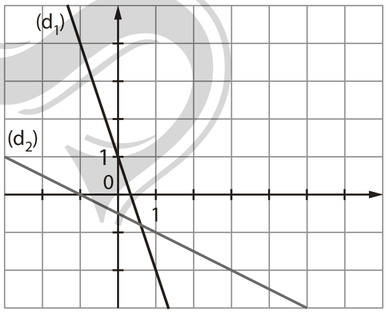
130 $A \notin (d)$.

131 $A \notin (d)$.

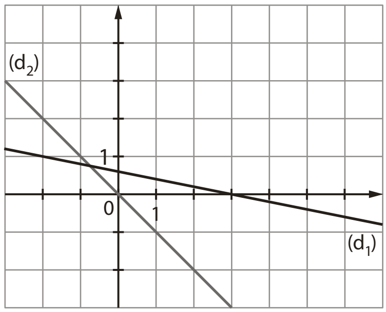
132 $A \in (d)$.

133 $A \in (d)$.

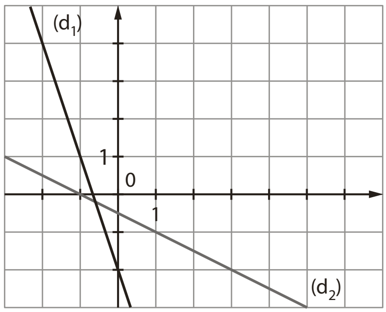
134 **1.**



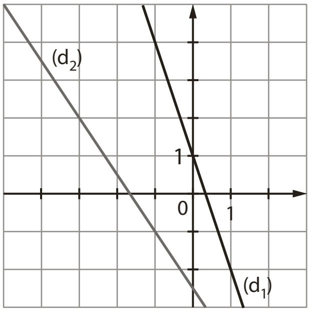
135 **1.**



136 **1.**



137 **1.**



138 $y = 0$.

139 $7x - 3y - 44 = 0$.

140 $x - y = 0$.

141 $x - y + 3 = 0$.

142 $\vec{u}(3\,;2)$.

143 $\vec{u}(0\,;1)$.

144 $\vec{u}(1\,;7)$.

145 $\vec{u}(-2\,;-1)$.

146 $\vec{u}(1\,;0)$.

147 $\vec{u}\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

148 (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

149 (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

150 (d_1) et (d_2) sont parallèles.

151 (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

152 $2x + y - 3 = 0$.

153 $x + 2y - 1 = 0$.

154 $x - 1 = 0$.

155 $y - 1 = 0$.

156 **1.** $A'(7\,;2)$ et $B'\left(3\,;\,\dfrac{7}{2}\right)$.

2. $(AA') : y = 2$; $(BB') : \dfrac{9}{2}x + 6y - \dfrac{69}{2} = 0$.

3. $G(5\,;2)$, $\overrightarrow{AG}(4\,;0)$, $\overrightarrow{AA'}(6\,;0)$, donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

158 Faux : $A(0\,;3) \in (d)$ mais $A \notin (d')$.

159 Faux : $\vec{v}(-1\,;5)$ est un vecteur directeur de (d), et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

160 $3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, donc $3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, soit $8\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AG} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}$.

161 $M(1\,;3)$; $N(1\,;39)$; $P(-2\,;21)$.

162 $\overrightarrow{AB}(4\,;3)$, $\overrightarrow{DC}(4\,;3)$ et $AB = AD = 5$, donc ABCD est un losange.

163 $\overrightarrow{AB}(3\,;2)$, $\overrightarrow{AC}\left(-\dfrac{3}{4}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{AC}$ et A, B et C sont alignés.

164 A′ milieu de [BC]. $A'\left(6\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$ et $(AA') : -\dfrac{1}{2}x + 2y - 2 = 0$.

165 $3x - 7y + 15 = 0$.

POUR FAIRE LE POINT

1 A et D ; **2** B ; **3** B et C ; **4** B ; **5** B ; **6** B ; **7** A, C et D ; **8** A et D ; **9** C ; **10** B ; **11** B.

POUR APPROFONDIR

166 **1.** $A(0\,;0)$; $B(-1\,;0)$; $C(0\,;1)$; $B'\left(0\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$; $C'\left(\dfrac{1}{3}\,;\,0\right)$.

2. a. Les coordonnées de B′ et C′ vérifient l'équation donnée.

b. $(BC) : x + y - 1 = 0$.

c. $A'(3\,;-2)$.

3. a. $\Delta_1 : y + 2 = 0$; $\Delta_2 : x - 3 = 0$; $\Delta_3 : x + y = 0$.

b. $E(2\,;-2)$ et $F(3\,;-3)$.

4. $\overrightarrow{B'E}\left(2\,;\,-\dfrac{9}{4}\right)$ et $\overrightarrow{C'F}\left(\dfrac{8}{3}\,;\,-3\right)$.

$2 \times (-3) - \dfrac{8}{3} \times \dfrac{-9}{4} = -6 + 6 = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{B'E}$ et $\overrightarrow{C'F}$ sont colinéaires, et les droites (B′E) et (C′F) sont parallèles.

167 **1.** $Q(0\,;3)$ et $R(5\,;0)$.

2. $(BC) : x + y - 1 = 0$.

3. $(QR) : 3x + 5y - 15 = 0$.

4. $P(-5\,;6)$.

5. $A'(5\,;3)$; $B'(-1\,;6)$ et $C'(-5\,;8)$.

6. $\overrightarrow{A'B'}(-6\,;3)$, $\overrightarrow{A'C'}(-10\,;5)$, d'où $-6 \times 5 - (-10) \times 3 = 0$, donc $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont colinéaires, et A′, B′ et C′ sont alignés.

168 **1.** $\overrightarrow{AB}(3\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(9\,;3)$, soit $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. A,B et C sont donc alignés. A′, B′ et C′ sont des points de la droite d'équation $x = 2$, donc sont alignés.

2. a. $(AC') : 3x + 7y - 1 = 0$ et $(A'C) : -6x + 7y + 14 = 0$.

b. $E\left(\dfrac{5}{3}\,;\,\dfrac{-4}{7}\right)$.

3. $(BC') : x + y - 3 = 0$, $(B'C) : x - y - 3 = 0$ et $F(3\,;0)$.

4. $\overrightarrow{AD}\left(\dfrac{11}{5}\,;\,-\dfrac{11}{5}\right)$; $\overrightarrow{A'B}(1\,;4)$,

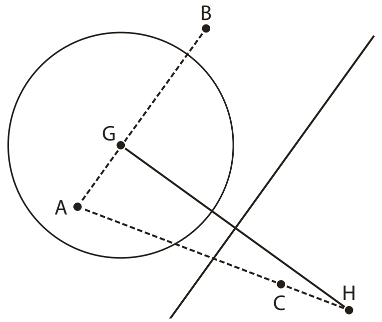
d'où $\overrightarrow{A'B} = 5\overrightarrow{A'D}$ donc $D \in (A'B)$.

5. $\overrightarrow{DE}\left(\dfrac{22}{15}\,;\,\dfrac{22}{35}\right)$, $\overrightarrow{DF}\left(\dfrac{14}{5}\,;\,\dfrac{6}{5}\right)$.

D'où $\dfrac{22}{15} \times \dfrac{6}{5} - \dfrac{14}{5} \times \dfrac{22}{35} = \dfrac{44}{25} - \dfrac{44}{25} = 0$.

Donc D, E et F sont alignés.

169



1. a. $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$, donc $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$,
soit $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

b. Voir figure.

c. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}$
$=3\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{MG}$.

d. $\mathscr{E}_1$ est le cercle de centre G et de rayon 2.

e. Voir figure.

2. a. $\overrightarrow{HA}-4\overrightarrow{HC}=\vec{0}$, donc $\overrightarrow{HA}-4\overrightarrow{HA}-4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$,
soit $-3\overrightarrow{HA}-4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{AH}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. Voir figure.

c. $\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}-4\overrightarrow{MH}-4\overrightarrow{HC}=-3\overrightarrow{MH}$.

d. $\mathscr{E}_2$ est la médiatrice du segment [GH].

e. Voir figure.

170 **1.** $\overrightarrow{\Omega P}=\overrightarrow{\Omega H}+\overrightarrow{HP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OH}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{HA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

2. $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA'}$; $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA'}$;
$\overrightarrow{\Omega P}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OH}-2\overrightarrow{OA'})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA'}$
$=\overrightarrow{O\Omega}-\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{A'\Omega}=-\overrightarrow{\Omega A'}$.

3. $\overrightarrow{\Omega R}=-\overrightarrow{\Omega C'}$; $\overrightarrow{\Omega R}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{\Omega Q}=-\overrightarrow{\Omega B'}$ et $\overrightarrow{\Omega Q}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

4. $R=\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$. On a $\overrightarrow{\Omega P}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, donc $\Omega\mathrm{P}=\dfrac{R}{2}$
et comme $\overrightarrow{\Omega P}=-\overrightarrow{\Omega A'}$, on déduit que $\Omega\mathrm{A'}=\dfrac{R}{2}$, donc P et A′ appartiennent à Γ. On démontre de la même façon que R, C′, Q et B′ appartiennent à Γ.

5. a. $\mathrm{PA_1A'}$ est rectangle a $\mathrm{A_1}$, donc $\mathrm{A_1}$ appartient au cercle de diamètre [PA′] soit à Γ.

b. On procède de la même façon pour les points $\mathrm{B_1}$ et $\mathrm{C_1}$.

171 **1.** (BC) : $x+y-1=0$.

2. a. A, B et D sont alignés et A et B sont distincts. A, C et E sont alignés et A et C sont distincts.

b. D(a ; 0) et E(0 ; b).

c. Les coordonnées de D et de E vérifient l'équation.

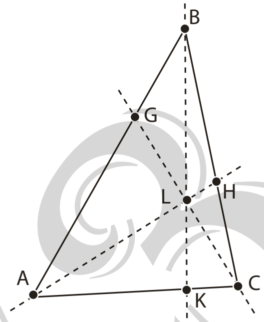
d. Comme (DE) et (BC) ne sont pas parallèles, les couples (1 ; 1) et (b ; a) ne sont pas proportionnels, donc $1\times a-b\times 1\neq 0$, soit $a\neq b$.

3. $\mathrm{F}\left(\dfrac{ab-a}{b-a}\ ;\ \dfrac{b-ab}{b-a}\right)$.

4. $\mathrm{M_1}\left(\dfrac{a}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{M_2}\left(\dfrac{ab-a}{2(b-a)}\ ;\ \dfrac{b-ab}{2(b-a)}\right)$ et $\mathrm{M_3}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{b}{2}\right)$.

5. $\overrightarrow{M_1M_2}\left(\dfrac{a^2-a}{2(b-a)}\ ;\ \dfrac{a-ab}{2(b-a)}\right)$ et $\overrightarrow{M_1M_3}\left(\dfrac{1-a}{2}\ ;\ \dfrac{b-1}{2}\right)$
donc $\overrightarrow{M_1M_2}=\dfrac{-a}{b-a}\overrightarrow{M_1M_3}$. Les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ étant colinéaires, $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$ et $\mathrm{M_3}$ sont alignés.

172



1. a. Voir figure.

b. $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}$, donc $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GB}$,
soit $\vec{0}=\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}$.

2. a. $2\overrightarrow{HB}+3\overrightarrow{HB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, donc $5\overrightarrow{HB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$,
soit $\overrightarrow{BH}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.

b. Voir figure.

3. a. $\overrightarrow{AK}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

b. Voir figure.

4. a. $\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{LA}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, donc
$6\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
et $\overrightarrow{AL}=\dfrac{2}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{6}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b. Voir figure.

5. a. $\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{LB}=\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{LG}+2\overrightarrow{GB}$
$=3\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{LG}$.

b. On obtient $3\overrightarrow{LG}+3\overrightarrow{LC}=\vec{0}$, soit $\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{LC}=\vec{0}$, L est donc le milieu de [GC].

6. a. $2\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=5\overrightarrow{LH}$.

b. On obtient $\overrightarrow{LA}+5\overrightarrow{LH}=\vec{0}$, soit $\overrightarrow{LA}=-5\overrightarrow{LH}$, donc A, L et H sont alignés.

7. $\overrightarrow{LA}+3\overrightarrow{LC}=4\overrightarrow{LK}$, donc $2\overrightarrow{LB}+4\overrightarrow{LK}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{LB}=-2\overrightarrow{LK}$, L appartient à la droite (KB).

8. Les droites sont concourantes en L.

173 **1.** A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(1 ; 1) et D(0 ; 1).

2. a. E(0 ; 3), F(1 ; 3), G(–2 ; 0) et H(–2 ; 1).

b. $\overrightarrow{EH}(-2\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{FG}(-3\ ;\ -3)$ et $\overrightarrow{AC}(1\ ;\ 1)$. Ces vecteurs sont colinéaires donc les droites (EH), (FG) et (AC) sont parallèles.

3. a. (AC) : $x-y=0$.

b. E(0 ; –2) et H(5 ; 1). Les coordonnées de ces points vérifient l'équation donnée.

c. I(–5 ; –5).
d. F(1 ; –2) et G(5 ; 0), donc $\overrightarrow{FI}(-6\,;-3)$ et $\overrightarrow{FG}(4\,;2)$. On a $-6\times 2-4\times -3=0$, donc $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires et $I\in(FG)$.
e. (EH), (FG) et (AC) sont concourantes en I.
4. E(0 ; b), F(1 ; b), G(a ; 0) et H(a ; 1).
5. Les coordonnées de E et de H vérifient l'équation proposée.
6. a. Les couples $(1-b\,;-a)$ et $(1\,;-1)$ ne sont pas proportionnels car $(1-b)\times(-1)-1\times -a=-1+b+a\neq 0$, donc les droites (AC) et (EH) sont sécantes.
b. $M\left(\dfrac{ab}{a+b-1}\,;\,\dfrac{ab}{a+b-1}\right)$.
Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 06S_exercice173.xws (Xcas) et 06S_exercice173.dfw (Derive)
c. $\overrightarrow{FG}(a-1\,;-b)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;1)$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (FG) et (AC) sont sécantes.
De même, pour les droites (FG) et (EH) puisque $\overrightarrow{EH}(a\,;1-b)$ et $(a-1)(1-b)-a\times(-b)=a+b-1\neq 0$.
$\overrightarrow{FM}\left(\dfrac{ab-a-b+1}{a+b-1}\,;\,\dfrac{-b^2+b}{a+b-1}\right)$ et $\overrightarrow{FG}(a-1\,;-b)$.
En appliquant la condition de colinéarité, on démontre que ces deux vecteurs sont colinéaires, ce qui justifie que M est un point de (FG).
7. $a+b=1$, donc $b=1-a$. On obtient $\overrightarrow{EH}(a\,;a)$, $\overrightarrow{FG}(a-1\,;a-1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;1)$. Ces trois vecteurs sont colinéaires, donc les droites (EH), (FG) et (AC) sont parallèles.

174 **1. a.** Les coordonnées des points E et D vérifient l'équation donnée.
b. $\Delta_1 : (2-b)x-y=0$.
c. $F\left(\dfrac{1}{2-b}\,;1\right)$.
2. a. $(EC) : (2-b)x-y+2b-2=0$
et $\Delta_2 : (b-2)x-y+4-2b=0$.
b. $G(1\,;2-b)$ et $H\left(\dfrac{3-2b}{2-b}\,;1\right)$.
3. F et H appartiennent à la droite d'équation $y=1$.
E et G appartiennent à la droite d'équation $x=1$.
4. Par construction, EFGH est un parallélogramme. Et $EH^2=\left(\dfrac{1-b}{2-b}\right)^2+(1-b)^2$; $EF^2=\left(\dfrac{b-1}{2-b}\right)^2+(1-b)^2$, soit $EH=EF$ et EFGH est un losange.
5. $EG=|2-b-b|=|2-2b|=2b-2$ car $b>2$.
$FH=\left|\dfrac{2-2b}{2-b}\right|=\dfrac{2b-2}{b-2}$.
6. $\mathscr{A}=\dfrac{EG\times FH}{2}=\dfrac{(2b-2)^2}{2b-4}$.
7. a. $f'(x)=\dfrac{2(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$.
Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 06S_exercice174.xws (Xcas) et 06S_exercice174.dfw (Derive)
b. f' est du signe de $x-3$, donc f est décroissante sur $]2\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$.
c. f admet un minimum lorsque $x=3$.
8. E(1 ; 3).
9. EG = 4 = FH, donc EFGH est un carré.

175 **1. a.** A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(0 ; 1), $P\left(\dfrac{-1}{a-1}\,;\,\dfrac{a}{a-1}\right)$, $Q\left(0\,;\,\dfrac{-1}{b-1}\right)$ et $R\left(\dfrac{c}{c-1}\,;0\right)$.
b. Les coordonnées de P et de A vérifient l'équation proposée pour (PA). De même que les points B et Q pour la droite (BQ) et C et R pour la droite (CR).
2. Si (PA) et (BQ) sont parallèles, alors $a(1-b)-1\times 1=0$, soit $a-ab-1=0$, donc $ca-cab-c=0$, donc $abc=ca-c$.
Si (PA) et (CR) sont parallèles, alors $ac-c+1=0$, donc $ca-c=-1$ et on obtient $abc=-1$.
3. $I\in(PA)$ donc $y_0=-ax_0$ (R_1). $I\in(BQ)$ donc $x_0+(1-b)y_0-1=0$ et en substituant la relation précédente, on obtient $(1+ab-a)x_0=1$ (R_2). $I\in(CR)$ donc $(c-1)x_0+cy_0-c=1$ en substituant y_0 à l'aide de la relation R_1, on obtient $(c-1-ac)x_0-c=0$, puis en multipliant chaque membre par $1+ab-a$ et en utilisant (R_2), $c-1-ac-(1-a+ab)c=0$ et en développant on obtient $abc=-1$.
4. $abc=-1$ donc $c=\dfrac{-1}{ab}$.
a. (AP) et (BQ) sont sécantes, donc $a(1-b)-1\neq 0$, soit $a-ab-1\neq 0$.
Pour (AP) et (CR) :
$$ac-(c-1)=\frac{-1}{b}+\frac{1}{ab}+1=\frac{-a+1+ab}{ab}\neq 0,$$
donc (AP) et (CR) sont sécantes.
Pour (CR) et (BQ) :
$$c-(c-1)(1-b)=bc+1-b=\frac{-1}{a}+1-b=\frac{-1+a-ab}{a}\neq 0,$$
donc (CR) et (BQ) sont sécantes.
Soit $I(x_0\,;y_0)$ le point d'intersection de (AP) et (BQ), comme à la question **3**, on a $y_0=-ax_0$ et $(1-a+ab)x_0=1$.
D'autre part :
$$(c-1)x_0+cy_0-c=\frac{-1-ab+a}{ab}x_0+\frac{1}{ab}=0$$
car $(-1-ab+a)x_0=-1$. Donc $I\in(CR)$.
b. $abc=-1$ si, et seulement si, les droites (PA), (BQ) et (CR) sont deux à deux parallèles, ou concourantes.

176 **1.** A et A′ sont deux points (distincts) de (d_1), $\overrightarrow{AA'}$ est un vecteur directeur de d_1 et comme $O\in(d_1)$, il existe a tel que $\overrightarrow{OA'}=a\overrightarrow{AA'}$. De même pour les deux autres égalités.

2. $a\overrightarrow{OA} + (1 - a)\overrightarrow{OA'} = a\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} - a\overrightarrow{OA'}$
$= a\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{OA'} = a\overrightarrow{A'A} + a\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$.

De même avec les deux autres égalités.

3. a. $a\overrightarrow{OA} + (1 - a)\overrightarrow{OA'} = a\overrightarrow{OB} + (1 - a)\overrightarrow{OB'}$,
donc $a(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) + (1 - a)(\overrightarrow{B'O} + \overrightarrow{OA'}) = a\overrightarrow{BA} + (1 - a)\overrightarrow{B'A'} = \vec{0}$.

b. Si $a = 0$, on obtient $\overrightarrow{B'A'} = \vec{0}$, donc colinéaire à $\overrightarrow{BA}$, sinon $\overrightarrow{BA} = \dfrac{1 - a}{a}\overrightarrow{B'A'}$ donc les deux vecteurs sont colinéaires.

c. Le résultat précédent est absurde car (BA) et (B′A′) sont sécantes, d'où $a \neq b$.

4. a. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \left(\dfrac{a}{a - b} - 1\right)\overrightarrow{OA} - \dfrac{b}{a - b}\overrightarrow{OB}$
$= \dfrac{b}{a - b}\overrightarrow{OA} - \dfrac{b}{a - b}\overrightarrow{OB} = \dfrac{b}{a - b}\overrightarrow{BA}$.

Donc A, B et M sont alignés.

b. $(a - b)\overrightarrow{OM} = (a - b)\overrightarrow{OA} + (a - b)\overrightarrow{AM} = (a - b)\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{BA}$
$= a\overrightarrow{OA} - b\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{BO} + b\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{OA} - b\overrightarrow{OB}$
$= (a - 1)\overrightarrow{OA'} - (b - 1)\overrightarrow{OB'}$.

c. À l'aide de la question précédente, on obtient $(a - 1)\overrightarrow{A'M} = (b - 1)\overrightarrow{B'M}$. Or comme $a \neq b$ l'un au moins est différent de 1, donc $\overrightarrow{A'M}$ et $\overrightarrow{B'M}$ sont colinéaires et A, B et M alignés.

d. M = I, donc $\overrightarrow{OI} = \dfrac{a}{a - b}\overrightarrow{OA} - \dfrac{b}{a - b}\overrightarrow{OB}$ et $(a - b)\overrightarrow{OI} = a\overrightarrow{OA} - b\overrightarrow{OB}$.

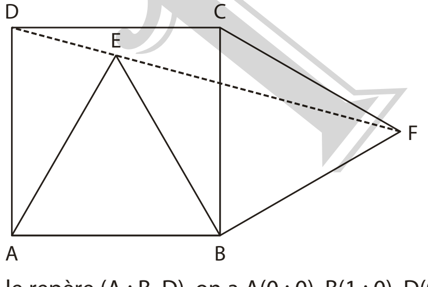
5. Pour J : $(c - a)\overrightarrow{OJ} = c\overrightarrow{OC} - a\overrightarrow{OA}$.
Pour K : $(b - c)\overrightarrow{OK} = b\overrightarrow{OB} - c\overrightarrow{OC}$.

6. a. $(a - b)\overrightarrow{OI} + (c - a)\overrightarrow{OJ} + (b - c)\overrightarrow{OK} = \vec{0}$.

b. L'égalité précédente donne $a\overrightarrow{JI} + b\overrightarrow{IK} + c\overrightarrow{KJ} = \vec{0}$, puis $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{c - b}{b - a}\overrightarrow{JK}$. Ce qui permet de conclure que I, J et K sont alignés.

Prises d'initiatives

177 Correctif : il faut lire que le triangle BFC est équilatéral et non pas BFE.



Dans le repère (A ; B, D), on a A(0 ; 0), B(1 ; 0), D(0 ; 1), $E\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.

Donc $\overrightarrow{DE}\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$, $\overrightarrow{DF}\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$.

On a $\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 0$,

d'où la colinéarité de $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$, et l'alignement des points D, E et F.

178 C′ est le milieu de [AB] et de [RC$_1$], donc ARC$_1$A est un parallélogramme et $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{RB}$.

A′ est le milieu de [BC] et de [RA$_1$], donc RBA$_1$C est un parallélogramme et $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{CA_1}$.

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{CA_1}$, donc AC$_1A_1$C est un parallélogramme, les diagonales [C$_1$C] et [AA$_1$] se coupent en leur milieu Ω.

B′ est le milieu de [AC] et de [RB$_1$], donc ARCB$_1$ est un parallélogramme et $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{B_1C}$.

On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{B_1A_1}$, donc ABA$_1B_1$ est un parallélogramme, le milieu Ω de [AA$_1$] est aussi celui de [BB$_1$].

(AA$_1$), (BB$_1$) et (CC$_1$) sont concourantes en Ω.

179 On se place dans le repère (A ; B, D). A(0 ; 0), B(1 ; 0), D(0 ; 1), C(c ; 1) avec $c > 0$ puisque $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens.

(BD) : $y = -x + 1$ et (AC) : $x - cy = 0$ donc $I\left(\dfrac{c}{c + 1} ; \dfrac{1}{c + 1}\right)$.

(BC) : $x + (1 - c)y - 1 = 0$ et (AD) : $x = 0$ donc $O\left(0 ; \dfrac{1}{1 - c}\right)$.

Notons M$_1$ le milieu de [DC] et M$_2$ le milieu de [AB], on a $M_1\left(\dfrac{c}{2} ; 1\right)$ et $M_2\left(\dfrac{1}{2} ; 0\right)$.

$\overrightarrow{OM_1}\left(\dfrac{c}{2} ; \dfrac{c}{c - 1}\right)$, $\overrightarrow{OM_2}\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{c - 1}\right)$ et $\overrightarrow{OI}\left(\dfrac{c}{c + 1} ; \dfrac{2c}{c^2 - 1}\right)$.

On peut vérifier que ces vecteurs sont colinéaires en remarquant par exemple qu'ils sont tous colinéaires à $\vec{u}\left(1 ; \dfrac{2}{c - 1}\right)$. On déduit que la droite (OI) coupe [DC] et [AB] en leurs milieux.

180 Dans le repère (A ; B, D), A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(1 ; 1), D(0 ; 1) et $M\left(1 ; \dfrac{1}{2}\right)$.

(BD) : $y = -x + 1$ et (AM) : $y = \dfrac{1}{2}x$, donc $I\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3}\right)$.

(AC) : $y = x$ et (DM) : $y = \dfrac{-1}{2}x + 1$, donc $J\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{IJ}\left(\dfrac{1}{3} ; 0\right)$ et $\overrightarrow{AD}(1 ; 0)$ donc $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{IJ}$, d'où (AD) et (IJ) sont parallèles et AD = 3IJ.

F Activités TICE

TP 1 La droite d'Euler

Dans ce TP, on utilise un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer des propriétés des trois points remarquables du triangle que sont le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité. Ces propriétés sont ensuite démontrées pour finalement arriver au très classique résultat de l'alignement de ces trois points.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 06S_TP1.ggb (Geogebra) et 06S_TP1.g2w (Geoplan).

A. Construction et conjecture

1. Pour Geogebra : on pourra au préalable supprimer les axes en cliquant sur le bouton droit de la souris, puis en décochant « Axes ». On utilise ensuite l'icone de la barre des menus pour créer les points A, B et C, puis pour créer le triangle ABC en utilisant l'icône. Par défaut, ce triangle sera nommé poly1, le renommer ABC.

Pour Geoplan : pour créer les points A, B et C, choisir le menu : Créer | Point | Point libre | Dans le plan.

Pour créer le triangle ABC, choisir le menu : Créer | Ligne | Polygone | Polygone défini par ses sommets.

2. a. Pour Geogebra : cliquer sur l'icône « médiatrice » puis sur le segment correspondant pour créer la médiatrice d'un segment. Le point O est construit comme l'intersection des deux médiatrices obtenues.

Pour Geoplan : utiliser le menu : Créer | Ligne | Droite(s) | Médiatrice.

Le point O est obtenu soit en utilisant le menu : Créer | Point | Intersection de deux droites, soit en utilisant Créer | Point | Centre (divers) | Cercle circonscrit.

b. Pour Geogebra : on construit deux hauteurs en utilisant le menu « droites perpendiculaires » qui permet de tracer la perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné.

Pour Geoplan : choisir le menu Point | Centre (divers) | Orthocentre.

c. Pour Geogebra : saisir `G= CentreGravité[ABC]`.

Pour Geoplan : choisir le menu Créer | Point | Centre (divers) | Centre de gravité.

3. On peut conjecturer que les points O, G et H sont alignés.

4. On conjecture que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

B. Caractérisation vectorielle de l'orthocentre

1. Pour Geogebra : saisir

`K=O+vecteur[O,A]+vecteur[O,B]+vecteur[O,C]`.

Pour Geoplan : construire le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ en utilisant le menu : Créer | Vecteur | Expression vectorielle puis construire le point K à l'aide du menu : Créer | Point | Point image par | Translation(vecteur).

On peut conjecturer que K est confondu avec H.

2. a. $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{OA'}$ puisque $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$, A′ étant le milieu de [BC].

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{OA'}$ étant colinéaires, (AK) et (OA′) sont parallèles.

c. (OA′) est la médiatrice de [BC], donc est perpendiculaire à (BC), donc (AK) est également perpendiculaire à (BC).

3. On a comme précédemment $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{OB'}$ avec B′ milieu de [AC]. Ce qui prouve que (BK) est parallèle à (OB′) qui est la médiatrice de [AC] donc perpendiculaire à celle-ci. On déduit alors que (BK) et (AC) sont également perpendiculaires.

4. (BK) et (AK) sont deux hauteurs du triangle ABC, leur intersection K est l'orthocentre de ABC, c'est-à-dire H et on déduit que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

C. Caractérisation vectorielle du centre de gravité

1. Pour Geogebra : après avoir construit le point A′ milieu de [BC], saisir `P= A+2/3*vecteur[A,A']`.

Pour Geoplan : utiliser le menu : Créer | Point | Point image par | Translation(vecteur).

On conjecture que P est confondu avec G.

2. a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{AA'}$.

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}.$$

b. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC'} + \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{PC'} + \overrightarrow{C'B} = 2\overrightarrow{PC'}$

car $\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} = \vec{0}$ puisque C′ est le milieu de [AB].

c. On obtient $2\overrightarrow{PC'} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{PC'}$, donc les points P, C et C′ sont alignés.

3. P appartient au deux droites (AA′) et (CC′) médianes du triangle ABC, donc le point P est confondu avec le centre de gravité G, donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

D. Démonstration de l'alignement de O, G et H

1. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$
$= 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{OG}$.

2. Lorsque le triangle ABC est équilatéral.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires, donc O, G et H sont alignés.

4. a. H est confondu avec A et O est le milieu de [BC].

b. La droite d'Euler est dans ce cas la médiane issue de A du triangle ABC.

TP 2 Le théorème de Ménélaüs d'Alexandrie

Dans ce TP, on utilise un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer, dans une première partie, un résultat attribué au Grec Ménélaüs d'Alexandrie. Dans une seconde partie, nous proposons de démontrer ce résultat dans un cas particulier, le cas général étant démontré dans la dernière partie.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 06S_TP2.ggb (Geogebra) et 06S_TP2.g2w (Geoplan).

A. Construction et conjecture

1. Avec Geogebra : construire les points A, B et C à l'aide de la barre des menus, puis les droites (AB), (AC) et (BC) à l'aide du menu droite définie par deux points. Les droites prennent par défaut les noms *a*, *b* et *c*, il faut les renommer pour éviter une définition récursive que le logiciel refusera dans les questions suivantes puisque ces noms seront utilisés pour d'autres variables.

Avec Geoplan : pour créer les points A, B et C, choisir le menu : Créer Point Point libre Dans le plan.

Les droites sont créées avec le menu Créer Ligne Droite(s) Définies par 2 points.

2. a. Avec Geogebra : utiliser l'icône de création d'un point puis cliquer sur la droite (AB).

Avec Geoplan : utiliser le menu Créer Point Point libre Sur une droite.

b. $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{PB}$ est non nul, donc il existe un réel a tel que $\overrightarrow{PA} = a\overrightarrow{PB}$.

c. Avec Geogebra : saisir `a=RapportColinéarité[P,B,A]`.

Avec Geoplan : choisir le menu : Créer Numérique Calcul géométrique Abscisse d'un point sur une droite puis créer l'affichage en suivant le menu Créer Affichage Variable numérique déjà définie.

a est négatif si P appartient au segment [AB].

a ne peut pas être nul car P est différent de A.

a ne peut pas être égal à 1 car A est différent de B.

3. a. et b. On procède comme précédemment.

4. a. Sur Geogebra : il suffit de saisir `abc=a*b*c`.

Sur Geoplan : choisir le menu Créer Numérique Calcul algébrique puis créer l'affichage comme précédemment.

b. On trace la droite (PN) comme à la question **1**.

c. Oui, il est possible d'obtenir P, N et M alignés.

d. On conjecture que l'alignement des points P, N et M équivaut à $abc = 1$.

B. Étude dans un cas particulier

1. a. $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$ donne $2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$,

soit $2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AML} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b. M(2 ; –1).

c. $\overrightarrow{PA} = \frac{a}{1-a}\overrightarrow{AB}$.

d. $P\left(\frac{-a}{1-a} ; 0\right)$. $\overrightarrow{PM}\left(2 - \frac{-a}{1-a} ; -1-0\right)$

soit $\overrightarrow{PM}\left(\frac{2-a}{1-a} ; -1\right)$ (et non pas $\overrightarrow{PM}\left(\frac{2-a}{1-a} ; 1\right)$, comme indiqué dans l'énoncé).

2. a. $N\left(0 ; \frac{1}{1-b}\right)$.

b. $\overrightarrow{PN}\left(0 - \frac{-a}{1-a} ; \frac{1}{1-b} - 0\right)$ soit $\overrightarrow{PN}\left(\frac{a}{1-a} ; \frac{1}{1-b}\right)$.

3. a. $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\frac{2-a}{1-a} \times \frac{1}{1-b} - \frac{a}{1-a} \times (-1) = 0$, ce qui équivaut à $\frac{2-ab}{(1-a)(1-b)} = 0$, soit à $ab = 2$.

b. Oui, car si $c = \frac{1}{2}$, $abc = 1$ équivaut à $ab = 2$.

C. Cas général

1. $\overrightarrow{PM}\left(\frac{1-ac}{(1-c)(1-a)} ; \frac{-c}{1-c}\right)$.

2. $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires si, et seulement si :

$$\frac{1-ac}{(1-c)(1-a)} \times \frac{1}{1-b} - \frac{a}{1-a} \times \frac{-c}{1-c} = 0,$$

ce qui équivaut à $\frac{1-abc}{(1-c)(1-a)(1-b)} = 0$, soit à $abc = 1$.

CHAPITRE

7

Trigonométrie

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Trigonométrie Cercle trigonométrique. Radian. Mesure d'un angle orienté, mesure principale.	• Utiliser le cercle trigonométrique, notamment pour : – déterminer les cosinus et sinus d'angles associés ; – résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x : $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$.	L'étude des fonctions cosinus et sinus n'est pas un attendu du programme.

B Notre point de vue

Nous avons rappelé, au début du cours, l'idée, déjà vue en Seconde, de l'enroulement de la droite réelle autour du cercle trigonométrique. Une animation sur ce sujet est disponible sur le manuel numérique enrichi. Après avoir rappelé la définition du cosinus et du sinus d'un réel, nous avons défini le radian à partir du cercle trigonométrique.
Nous avons introduit la notion de mesures d'un angle orienté de deux vecteurs et défini la mesure principale. En trigonométrie, les propriétés des angles associés sont énoncées. Les méthodes de résolution des équations trigonométriques élémentaires sont données.
Les propriétés des angles orientés sont données sans démonstration. Elles concernent les caractérisations des vecteurs colinéaires ou des vecteurs orthogonaux, ainsi que la relation de Chasles pour les angles orientés, dont quelques conséquences sont énoncées.
Il est fait recours au cercle trigonométrique aussi souvent qu'il est nécessaire, en particulier pour établir les relations entre sinus et cosinus des angles associés, ce qui est traité au moyen des symétries.
Il en est de même pour la résolution des équations trigonométriques.
Nous avons fait le choix de donner des **énoncés de cours** simples illustrés d'exemples ou de figures.
Les savoir-faire sont constitués d'exercices élémentaires, applications immédiates du cours.
Le savoir-faire 6, aborde, de manière élémentaire, l'utilisation des angles orientés en géométrie, le point de départ étant souvent l'étude des angles géométriques de la configuration étudiée.
Les exercices sont variés, avec au début quelques exercices simples s'appuyant sur des situations de polygones inscrits dans le cercle trigonométrique.
De nombreux exercices permettent aux élèves de s'entraîner à la résolution des équations trigonométriques.
Quelques exercices plus difficiles, mettent en œuvre des méthodes utilisant les relations entre angles associés.
Dans la rubrique « Pour approfondir », quelques exercices permettent de démontrer des propriétés des configurations de base, telles que la somme des angles orientés d'un triangle, des propriétés de parallélisme ou d'orthogonalité. Certains exercices comportent des références historiques.
L'utilisation des **TICE** a été développée à plusieurs endroits dans le chapitre.

– Pour les calculatrices, nous avons présenté les instructions qui peuvent permettre de contrôler la résolution d'équations trigonométriques élémentaires. L'exercice 160, plus difficile, conduit à l'élaboration d'un algorithme, puis d'un programme, donnant la mesure principale d'un angle, dont une mesure est connue.

– Pour les logiciels, nous avons indiqué plusieurs utilisations d'un logiciel de géométrie dynamique, dans les activités d'introduction du chapitre et dans les deux TP en fin de chapitre. Il s'agit chaque fois de conjecturer des propriétés des configurations étudiées.

Dans la page « **Chercher avec méthode** », l'énoncé choisi permet de mettre en œuvre plusieurs des méthodes introduites dans le chapitre, pour la résolution des équations trigonométrique, en particulier l'utilisation du cercle trigonométrique.

Les notions abordées dans le chapitre 7

1. Le cercle trigonométrique
2. Mesures d'un angle orienté de vecteurs
3. Angles associés
4. Trigonométrie

C Avant de commencer

Se tester avec des QCM

Le QCM et les exercices proposés dans cette page permettent de faire le point sur les configurations et les angles géométriques et sur les propriétés du cercle trigonométrique étudiées en Seconde.

1 A et C ; **2** A ; **3** C ; **4** B ; **5** D.

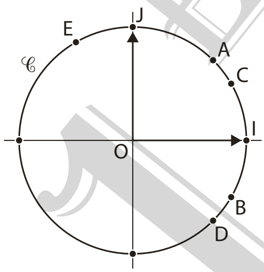
Se tester avec des exercices

6 **1.** A : $\frac{\pi}{3}$; B : $\frac{3\pi}{4}$; C : $-\frac{\pi}{6}$.

2. $\overset{\frown}{IB} = \frac{3\pi}{4}$; $\overset{\frown}{IC} = \frac{\pi}{6}$.

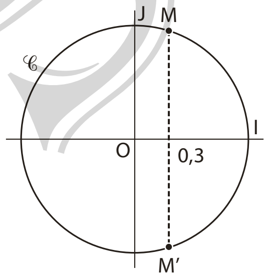
3. $\widehat{AOB} = 75°$; $\widehat{AOC} = 90°$.

7

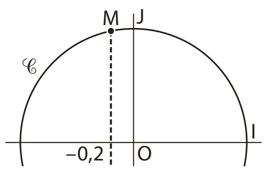


8 **a.** $\frac{3\pi}{4}$; **b.** $\frac{\pi}{3}$; **c.** $\frac{2\pi}{3}$; **d.** $\frac{5\pi}{6}$.

9 Ce sont les points M et M′ de la figure ci-dessous.



10 **1.**



2. M$(-0{,}2 ; \sqrt{0{,}96})$.

D Activités

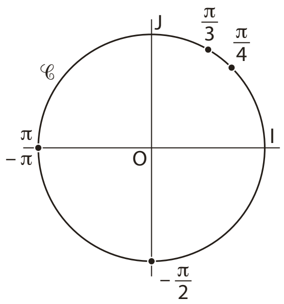
Activité 1 Enroulement et cercle trigonométrique

On rappelle dans cette activité l'enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique, permettant ainsi de repérer les points de ce cercle.

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 07S_activite1.ggb (Geogebra).

1. Le point A de 𝒞 d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ coïncide avec le point J car la longueur de $\overset{\frown}{IJ}$ est égale à $\frac{\pi}{2}$.

2. On obtient la figure suivante :



3. On peut associer au point J′ les réels $\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

4. Au point I′, on peut associer le réel $-\pi$. À partir du point I′ si l'on effectue k tours (dans le sens positif si k est positif, dans le sens négatif si k est négatif), on revient sur le point I′. Donc à tout réel $-\pi + k2\pi$, on peut associer le point I′.

Activité 2 Longueur d'un arc de cercle et mesure des angles

Il s'agit dans cette activité d'introduire une nouvelle mesure d'unité d'angles, le radian.

1. On obtient le tableau suivant :

Mesure de $\widehat{AOB}$ (en degrés)	360°	180°	90°	45°	60°	105°
Longueur ℓ de $\overset{\frown}{AB}$ pour $r = 1$.	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$

2. Pour passer de la première ligne du tableau à la seconde, le coefficient de proportionnalité est $\frac{\pi}{180}$.

Pour passer de la deuxième ligne du tableau à la première, le coefficient de proportionnalité est $\frac{180}{\pi}$.

3. a. On obtient respectivement $\frac{\pi}{4}$ radian et $\frac{7\pi}{36}$ radians.

b. On obtient respectivement 60° et 150°.

Activité 3 Déplacement sur une piste circulaire

On se propose dans cette activité d'introduire les mesures d'un angle orienté de vecteurs à partir de déplacements sur un cercle.

1. À la fin de l'énoncé de cette question, il faut donner un réel associé au point H et non au point B.

On a $\widehat{AOB} = \widehat{AOH} = \frac{\pi}{4}$ radian.

Au point B, on associe le réel $\frac{\pi}{4}$.

Au point H, on associe le réel $-\frac{\pi}{4}$.

2. Les points d'arrivée sont respectivement C, F, B et E.

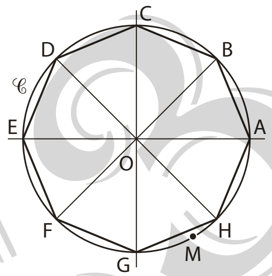
3. Les points d'arrivée sont respectivement C, H, G et E.

4. Pour aller de D à A dans le sens positif, la longueur du trajet le plus court est $\frac{5\pi}{4}$. Donc la mesure correspondante de $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})$ est $\frac{5\pi}{4}$ radians.

5. Pour aller de H à B dans le sens positif, la longueur du trajet le plus court est $\frac{\pi}{2}$ m. Donc la mesure correspondante de $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OB})$ est $\frac{\pi}{2}$ radians.

6. On peut observer que $\frac{17\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 3 \times 2\pi$.

D'où la position du point M sur le cercle :

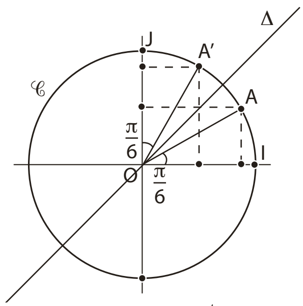


Activité 4 Angles associés

Il s'agit dans cette activité de préparer les formules des angles associés.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 07S_activite4-1.ggb et 07S_correctionactivite4.ggb (Geogebra).

1. On obtient la figure suivante :



Les coordonnées de A sont $\left(\cos\frac{\pi}{6}\ ;\ \sin\frac{\pi}{6}\right)$, soit $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

2. Voir la figure précédente.

On obtient $\frac{\pi}{6}$ pour mesure de $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OJ})$ par symétrie par rapport à Δ.

En utilisant la relation de Chasles pour les angles orientés, on a :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OA'}) + k2\pi.$$

D'où une mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA'})$: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$, soit $\frac{\pi}{3}$.

3. Par suite $A'\left(\cos\frac{\pi}{3}\ ;\ \sin\frac{\pi}{3}\right)$, soit $A'\left(\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On observe que l'abscisse de A est égale à l'ordonnée de A′ et que l'ordonnée de A est égale à l'abscisse de A′.

4. Une mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'})$ est $\frac{\pi}{2} - \alpha$

car $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM'}) + k2\pi$.

En outre une mesure de $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM'})$ est $-\alpha$, car M′ est le symétrique de M par rapport à Δ.

5. On observe que les colonnes A et D sont identiques.

On peut donc conjecturer que :

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Les colonnes B et C sont identiques.

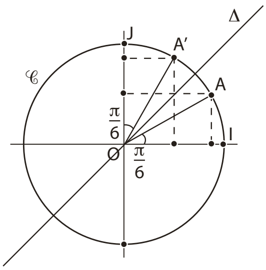
On peut donc conjecturer que $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

E Exercices

Dans tous les exercices, k est un entier.

POUR DÉMARRER

1 **1.** On obtient la figure suivante :



2 Pour A : $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{3}$; pour B : $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{14\pi}{3}$;
pour C : $\frac{5\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

3 $\frac{5\pi}{3}$ et $-\frac{7\pi}{3}$.

4 Les réels sont de la forme $\frac{3\pi}{5} + k2\pi$.

5 $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{5\pi}{2} = 0$.

6 On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

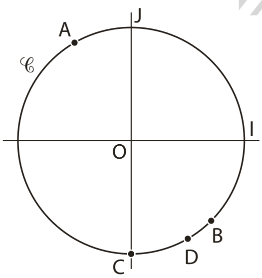
Si $\cos x = 0{,}8$ alors $\sin^2 x = 1 - 0{,}8^2 = 0{,}36$.

Comme $0 < x < \pi$, $\sin x > 0$, donc $\sin x = 0{,}6$.

7 **a.** $\frac{\pi}{2}$ radian. **b.** $\frac{\pi}{6}$ radian. **c.** $\frac{\pi}{4}$ radian.
d. π radians. **e.** $\frac{3\pi}{4}$ radian.

8 **a.** 45°. **b.** 72°. **c.** 22,5°. **d.** 67,5°. **e.** 120°.

9 On a la figure suivante :



10 Dans la numérotation des corrigés page 362 : lire **10** au lieu de **11**.

$$-\frac{7\pi}{4} ; \frac{9\pi}{4} ; \frac{17\pi}{4} ; -\frac{15\pi}{4}$$

11 **a.** $\frac{2\pi}{5}$. **b.** $\frac{4\pi}{5}$. **c.** $\frac{2\pi}{5}$. **d.** $-\frac{4\pi}{5}$.

12 $\frac{13\pi}{4}$.

13 $-\frac{\pi}{3}$ est la mesure principale.

Autres mesures : $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

14 $-\frac{\pi}{6}$ est la mesure principale.

Autres mesures : $\frac{11\pi}{6}$ et $-\frac{13\pi}{6}$.

15 **a.** $\frac{6\pi}{5}$. **b.** $\frac{\pi}{6}$.

16 $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

et $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

17 **a.** $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

b. $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

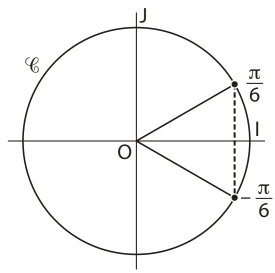
18 $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

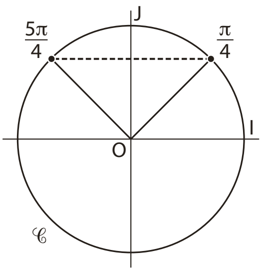
$\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

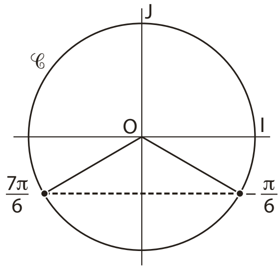
19 **a.** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.



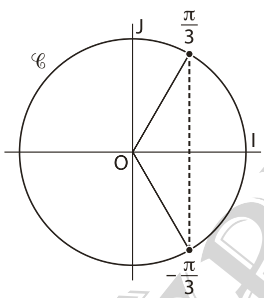
b. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$.



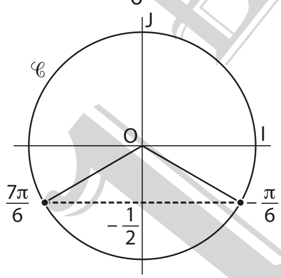
c. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.



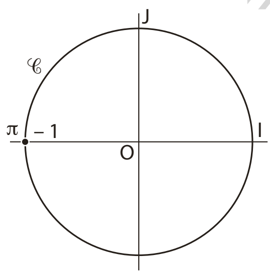
20 **a.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$.



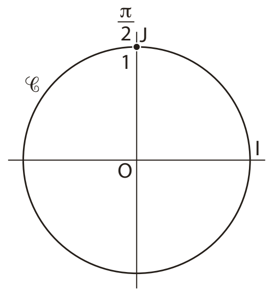
b. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$



21 **a.** $x = \pi + k2\pi$.

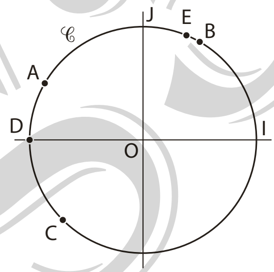


b. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.



POUR S'ENTRAÎNER

22 On obtient la figure suivante :



23 Dans la numérotation des corrigés à la fin du manuel page 362 : lire **23** au lieu de **20**.

Pour I : $k2\pi$. Pour A : $\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Pour B : $\frac{2\pi}{3} + k2\pi$. Pour I' : $\pi + k2\pi$.

Pour D : $-\frac{2\pi}{3} + k2\pi$. Pour E : $-\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

24 Pour A : $\frac{7\pi}{6} + k2\pi$. Pour B : $\frac{11\pi}{6} + k2\pi$.

25 Ce sont les réels $\frac{22\pi}{5}$ et $-\frac{8\pi}{5}$.

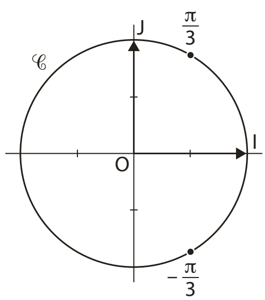
26 $-\frac{2\pi}{3}$; en effet $-\frac{8\pi}{3} + 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$ et $-\pi < -\frac{2\pi}{3} < \pi$.

27 **1.** $-\frac{9\pi}{4} + k2\pi$.

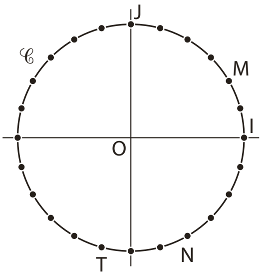
2. $-\frac{\pi}{4}$.

3. $\frac{7\pi}{4}$.

28 Faux, les deux points sont distincts :



Exercices 29 à 31 : il est plus approprié de traiter ces exercices avec la figure suivante :



29 Faux, ils sont de la forme $\dfrac{2\pi}{5} + k2\pi$.

30 Faux.

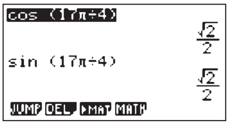
31 Faux.

32 Les coordonnées de A sont $\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, soit $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

33 **1.** $\cos\dfrac{17\pi}{4} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2 \times 2\pi\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $\quad \sin\dfrac{17\pi}{4} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2 \times 2\pi\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

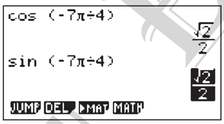
2. Avec la calculatrice :



34 **1.** $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $\quad \sin\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Avec la calculatrice :

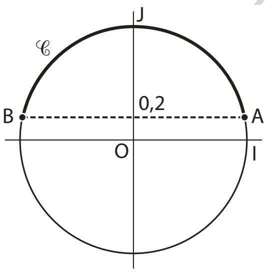


36 **1.** Si $\pi < b < \dfrac{3\pi}{2}$, alors $\cos b < 0$.

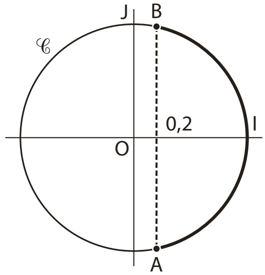
Donc $\cos b = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. Si $\dfrac{3\pi}{2} < b < 2\pi$, alors $\cos b < 0$. Donc $\cos b = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

37 **1.** et **2.** On obtient les points A et B et la figure suivante :



38 **1.** et **2.** On obtient les points A et B et la figure suivante :



39 **a.** $\cos k2\pi = 1$ et $\sin k2\pi = 0$.

b. $\cos(2k+1)\pi = -1$ et $\sin(2k+1)\pi = 0$.

c. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

40 Vrai.

41 Vrai.

42 Faux : si $x = \dfrac{\pi}{2}$, alors $2x = \pi$; $\cos 2x = \cos\pi = -1$ et $2\cos x = 2\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

43 Pour 25° : $\dfrac{5\pi}{36}$ radian.

44 Pour $\dfrac{7\pi}{24}$: 52,5 degrés.

45 **a.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **b.** $\dfrac{\pi}{3}$. **c.** $\dfrac{5\pi}{36}$. **d.** $\dfrac{7\pi}{6}$. **e.** $\dfrac{5\pi}{18}$.

46 **a.** 150°. **b.** 108°. **c.** 157,5°. **d.** 15°.
e. Environ 171,9°.

47 Pour le triangle équilatéral : $\dfrac{\pi}{3}$ radian.
Pour le triangle rectangle et isocèle : $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$ radian.

48 **a.** 2. **b.** $\dfrac{\pi}{8}$.

49 Faux, on a $\pi \times d = 180 \times \alpha$.

50 Faux : un angle de 1 radian mesure $\dfrac{180}{\pi}$ degrés, soit environ 57,295 degrés.

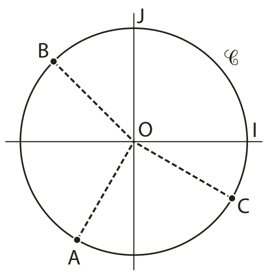
51 Vrai.

52 Par lecture graphique, on obtient respectivement :

$$\frac{3\pi}{4}\ ;\ -\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{\pi}{2}.$$

53 **a.** S coïncide avec P.
b. S coïncide avec N.
c. S coïncide avec N.

54 On obtient la figure suivante :



55 $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{11\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$.

56 $-\frac{2\pi}{5}$; $-\frac{12\pi}{5}$; $\frac{8\pi}{5}$; $\frac{18\pi}{5}$.

57 $\frac{5\pi}{8}$; $-\frac{11\pi}{8}$; $-\frac{27\pi}{8}$; $-\frac{43\pi}{8}$.

58 **a.** Oui, car $\alpha - \beta = 20 \times 2\pi$.

b. Non, car $\alpha - \beta$ n'est pas un multiple entier de 2π.

c. Oui, car $\alpha - \beta = 15 \times 2\pi$.

59 On a respectivement $-\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$.

60 Vrai.

61 **1.** Vrai.

2. Vrai.

3. Vrai.

62 On a $\frac{107\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 9 \times 2\pi$.

La mesure principale del'angle est donc $-\frac{\pi}{6}$.

63 **a.** $\frac{2\pi}{5}$. **b.** π.

64 **a.** π ; 3π ; $-\pi$.

b. $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

65 **a.** $-\frac{\pi}{3}$. **b.** $-\frac{5\pi}{7}$. **c.** $-\frac{3\pi}{4}$.

66 **a.** $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

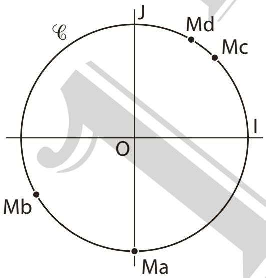
b. $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$.

67 **a.** $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$.

b. $\frac{5\pi}{8}$; $-\frac{11\pi}{8}$.

68 **a.** $-\frac{\pi}{2}$. **b.** $-\frac{5\pi}{6}$. **c.** $\frac{\pi}{4}$. **d.** $\frac{\pi}{3}$.

Les points correspondants, sur le cercle trigonométrique, sont respectivement Ma, Mb, Mc et Md :



69 Vrai.

70 Vrai.

71 Faux : la mesure principale est $-\frac{2\pi}{3}$,

car $\frac{28\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 5 \times 2\pi$ et $-\pi < -\frac{2\pi}{3} \leqslant \pi$.

72 Faux : la mesure principale pour $\frac{71\pi}{5}$ est $\frac{\pi}{5}$ et pour $-\frac{24\pi}{5}$, elle est égale à $-\frac{4\pi}{5}$.

73 Les mesures principales sont respectivement :

a. $-\frac{\pi}{2}$. **b.** $-\frac{\pi}{3}$. **c.** $-\frac{\pi}{3}$. **d.** $-\frac{2\pi}{3}$. **e.** $-\frac{2\pi}{3}$.

74 On utilise la relation de Chasles :

$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + k2\pi$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Comme $-\pi < \frac{5\pi}{6} \leqslant \pi$, la mesure principale de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ est $\frac{5\pi}{6}$.

De même la mesure principale de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ est $\frac{7\pi}{12}$.

On a $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}) + k2\pi$

$= \frac{\pi}{3} + \pi + k2\pi = \frac{4\pi}{3} + k2\pi.$

La mesure principale de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DB})$ est $-\frac{2\pi}{3}$.

75 **a.** $\frac{2\pi}{3}$. **b.** $\frac{\pi}{4}$. **c.** $\frac{\pi}{6}$. **d.** $\frac{\pi}{5}$.

76 En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) + k2\pi.$

$= \frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{12} + k2\pi = \pi + k2\pi.$

Les points A, E et C sont donc alignés.

77 On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + k2\pi$.

Or une mesure de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est $-\frac{\pi}{6}$. La mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ est donc $\frac{5\pi}{6}$.

De même $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}) + k2\pi$.

La mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$ est $-\frac{\pi}{2}$.

Celle de $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB})$ est égale à $-\frac{\pi}{2}$.

On a $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) + k2\pi$.

La mesure principale de $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$ est donc égale à $-\frac{\pi}{3} + \pi$, soit $\frac{2\pi}{3}$.

79 On obtient :

$(\vec{v}, \vec{u}) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$

$(\vec{u}, -\vec{v}) = \frac{\pi}{6} + \pi + k2\pi = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

et $(-\vec{u}, -\vec{v}) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

80 **a.** Les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$$

On a $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v}) + k2\pi$

$= \frac{\pi}{4} + \pi + k2\pi = \frac{5\pi}{4} + k2\pi.$

b. $\vec{u}$ et $3\vec{u}$ sont colinéaires, de même sens, de même que $\vec{v}$ et $2\vec{v}$.

Donc $(3\vec{u}, 2\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + k2\pi = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

On a $(-2\vec{u}, -4\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + k2\pi = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

$\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ étant colinéaires et de sens contraires, on a :

$(2\vec{v}, -2\vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}) + \pi + k2\pi$

$= \frac{\pi}{4} + \pi + k2\pi = \frac{3\pi}{4} + k2\pi.$

81 **a.** $(\vec{u}, -\vec{v}) = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

b. $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

c. $(3\vec{v}, 2\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi.$

d. $(-\vec{w}, -\vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}) = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi.$

82 Correctif : il faut démontrer que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires (au lieu de $\vec{u}$ et $\vec{w}$).

En utilisant la relation de Chasles :

$$(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{w})$$
$$= -\frac{61\pi}{10} - \frac{119\pi}{10} = -18\pi = -9 \times 2\pi.$$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de même sens.

83 **a.** $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v})$

$$= \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}.$$

D'où $(\vec{u}, -\vec{v}) = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi.$

b. $(\vec{u}, 3\vec{u}) = k2\pi.$

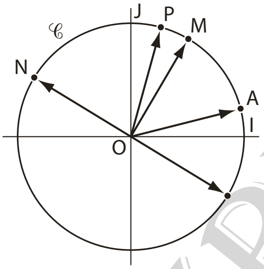
c. $(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{w}) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{12}.$

D'où $(\vec{v}, \vec{w}) = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi.$

d. $(-2\vec{w}, -5\vec{v}) = (\vec{w}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{w}).$

D'où $(\vec{v}, \vec{w}) = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi.$

84 **1.** On obtient la figure suivante :



2. On utilise la relation de Chasles :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) + k2\pi$$
$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + k2\pi.$$

La mesure principale de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

De même $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) + k2\pi$

$$= \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + k2\pi.$$

La mesure principale de $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM})$ est $-\dfrac{\pi}{12}$.

De même, la mesure principale de $(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{ON})$ est π et celle de $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP})$ est égale à $-\dfrac{5\pi}{12}$.

85 Vrai.

86 Vrai.

87 Faux, car $(2\vec{u}, -3\vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) + k2\pi.$

88 Faux : la mesure principale est $-\dfrac{\pi}{4}$,

car $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi.$

89 **1.** $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

2. $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}.$

$\cos\dfrac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

3. $\sin\dfrac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}.$

$\cos\dfrac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

90 **1.** $\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

2. Pour les sinus, on trouve successivement :

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pour les cosinus, on trouve successivement :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

91 $\sin\dfrac{9\pi}{10} = m$ et $\sin\dfrac{11\pi}{10} = -m.$

$\dfrac{4\pi}{10} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{10}$, donc $\cos\dfrac{4\pi}{10} = \sin\dfrac{4\pi}{10} = m.$

$\cos\dfrac{6\pi}{10} = -m$, car $\dfrac{6\pi}{10} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{10}.$

92 $A = -\cos x.$ $B = -\cos x.$ $C = -\cos x.$
$D = -\sin x.$ $E = \sin x.$ $F = \sin x.$

93 $A = \sin x.$ $B = -\sin x.$ $C = -\sin x.$
$D = -\cos x.$ $E = \cos x.$ $F = -\cos x.$

94 $\sin x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos x - \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$= \sin x - \sin x + \cos x - \cos x$$
$$= 0.$$

96 $\dfrac{13\pi}{8} = \pi + \dfrac{5\pi}{8}$ et $\dfrac{11\pi}{8} = \pi + \dfrac{3\pi}{8}$,

donc $\sin\dfrac{3\pi}{8} = -\sin\dfrac{11\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{8} = -\sin\dfrac{13\pi}{8}.$

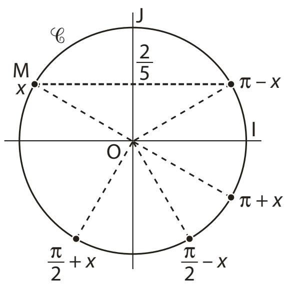
Par suite $A = 0.$

$\dfrac{9\pi}{10} = \pi - \dfrac{\pi}{10}$ et $\dfrac{3\pi}{5} = \pi - \dfrac{2\pi}{5}$

donc $\cos\dfrac{9\pi}{10} = -\cos\dfrac{\pi}{10}$ et $\cos\dfrac{3\pi}{5} = -\cos\dfrac{2\pi}{5}.$

Par suite $B = 0.$

97 **1.** et **2.**



3. Puisque $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, $\cos x \leqslant 0.$

Donc $\cos^2 x = 1 - \dfrac{4}{25} = \dfrac{21}{25}$; par suite $\cos x = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}.$

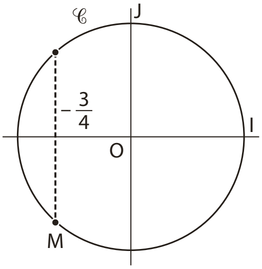
4. a. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\dfrac{2}{5}.$ **b.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}.$

c. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{2}{5}.$ **d.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}.$

e. $\cos(\pi + x) = \dfrac{\sqrt{21}}{5}.$ **f.** $\cos(\pi - x) = \dfrac{\sqrt{21}}{5}.$

g. $\sin(\pi + x) = -\dfrac{2}{5}$. **h.** $\sin(\pi + x) = \dfrac{2}{5}$.

98 **1.**



2. On a $\sin x = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

3. a. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. **b.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\dfrac{3}{4}$.

c. $\cos(\pi + x) = \dfrac{3}{4}$. **d.** $\cos(\pi - x) = \dfrac{3}{4}$.

e. $\sin(\pi + x) = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. **f.** $\sin(\pi - x) = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

99 Faux : $\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\cos\dfrac{3\pi}{4}$.

100 Faux.

101 Faux, x et $\pi - x$ ont même sinus et des cosinus opposés.

102 Faux, ils ont des cosinus opposés.

103 Faux : $\cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

104 L'équation $\sin x = \sin\dfrac{2\pi}{3}$ est équivalente à

$x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ ou $x = \pi - \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$.

Les solutions dans $]-\pi\,;\pi]$ sont donc $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.

105 L'équation $\cos x = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ est équivalente à

$x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$.

Les solutions dans $]-\pi\,;\pi]$ sont donc $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$.

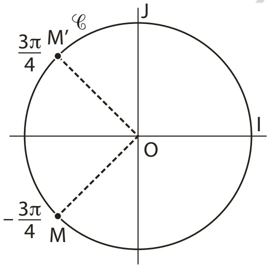
106 On sait que $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, donc l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ équivaut à l'équation $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$.

Par suite $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

Les solutions dans $]-\pi\,;\pi]$ sont donc $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.

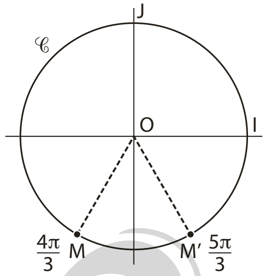
107 Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont $-\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ et $\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$.

Dans I, les solutions sont $-\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.



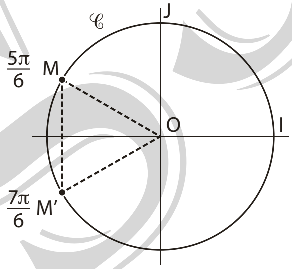
108 Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont $-\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ et $\dfrac{5\pi}{3} + k2\pi$.

Dans I, les solutions sont $\dfrac{4\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$.



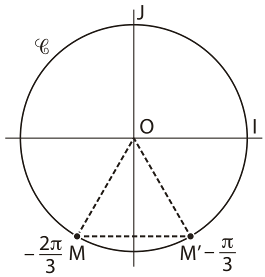
109 Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont $\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ et $-\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Dans I, les solutions sont $\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{7\pi}{6}$.



110 Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont $\dfrac{4\pi}{3} + k2\pi$ et $-\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

Dans I, les solutions sont $-\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{2\pi}{3}$.



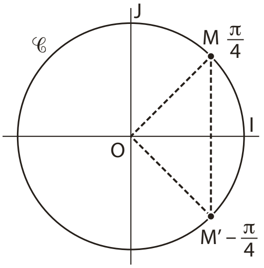
111 L'équation $2\sin x - 1 = 0$ équivaut à l'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Dans $[0\,;2\pi[$, les solutions sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$; dans $[2\pi\,;4\pi[$, les solutions sont $\dfrac{13\pi}{6}$ et $\dfrac{17\pi}{6}$.

(La correction en fin de manuel est erronée.)

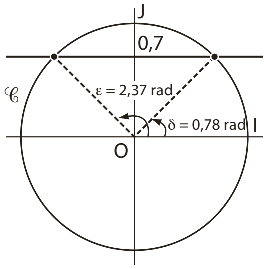
112 L'équation $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solutions $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$ dans $[0\,;\pi]$ et $\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ et $\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ dans $\mathbb{R}$.

113 Dans $[0\,;2\pi[$, les solutions sont $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$.

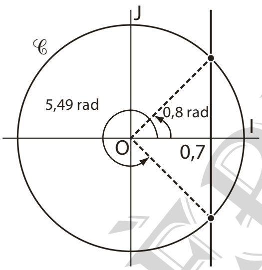
Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont $\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ et $-\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$.



114 L'équation admet les mêmes solutions dans $[0\,;\pi]$ et dans $[0\,;2\pi]$: 0,78 et 2,37.



115 L'équation admet 0,8 pour solution dans $[0\,;\pi]$ et dans $[0\,;2\pi]$, elle admet deux solutions : 0,8 et 5,49.



116 On sait que $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, donc l'équation $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ équivaut à $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$.

En utilisant la propriété traduisant l'égalité des cosinus, l'équation équivaut donc à :

$$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \text{ ou } x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi.$$

Soit $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ ou $x=k2\pi$.

On peut donc conclure que l'équation $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ a pour solutions 0 et $\frac{2\pi}{3}$ dans $]-\pi\,;\pi]$.

117 On observe que $4\cos^2 x-1=(2\cos x-1)(2\cos x+1)$.

L'équation $4\cos^2 x-1=0$ équivaut donc à l'équation :

$$(2\cos x-1)(2\cos x+1)=0,$$

soit $2\cos x-1=0$ ou $2\cos x+1=0$.

On résout séparément les deux équations obtenues :

$2\cos x-1=0$ équivaut à $\cos x=\frac{1}{2}$, donc $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$.

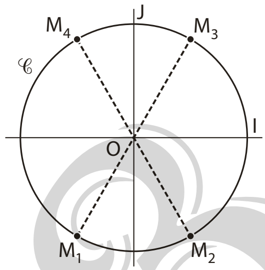
Par suite $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$.

$2\cos x+1=0$ équivaut à $\cos x=-\frac{1}{2}$, donc $\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$.

Par suite $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ ou $x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi$.

Dans $]-\pi\,;\pi]$, les solutions sont : $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

Les points M_1, M_2, M_3 et M_4 du cercle $\mathscr{C}$ sont associés aux solutions de l'équation.



119 Puisque $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, l'équation $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à l'équation $\sin 2x=\sin\frac{\pi}{4}$, soit $2x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$ ou $2x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi$, c'est-à-dire $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{8}+k\pi$.

On donne à k différentes valeurs.

Pour $k=0$, on a $x=\frac{\pi}{8}$ ou $x=\frac{3\pi}{8}$.

Pour $k=1$, on a $x=\frac{9\pi}{8}$ ou $x=\frac{11\pi}{8}$.

Pour $k=2$, on retrouve les mêmes infinités de solutions que pour $k=0$.

Pour $k=-1$, on retrouve les mêmes infinités de solutions que pour $k=1$.

Dans $\mathbb{R}$, $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solutions :

$$\frac{\pi}{8}+k2\pi\,;\ \frac{3\pi}{8}+k2\pi\,;\ \frac{9\pi}{8}+k2\pi\,;\ \frac{11\pi}{8}+k2\pi.$$

120 On observe que $2\cos^2 x-\cos x=\cos x(2\cos x-1)$.

L'équation $2\cos^2 x-\cos x=0$ équivaut donc à l'équation $\cos x(2\cos x-1)=0$ soit $\cos x=0$ ou $2\cos x-1=0$.

On résout séparément les deux équations.

$\cos x=0$ équivaut à $\cos x=\cos\frac{\pi}{2}$.

Par suite $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

$2\cos x-1=0$ équivaut à $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$.

Par suite $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$.

Dans $\mathbb{R}$, $2\cos^2 x-\cos x=0$ a pour solutions :

$$\frac{\pi}{2}+k2\pi\,;\ -\frac{\pi}{2}+k2\pi\,;\ \frac{\pi}{3}+k2\pi\,;\ -\frac{\pi}{3}+k2\pi.$$

121 L'équation $(2\cos x-\sqrt{3})(\cos x-1)=0$ équivaut à $2\cos x-\sqrt{3}=0$ ou $\cos x-1=0$.

$2\cos x-\sqrt{3}=0$ équivaut à $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$.

Par suite $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$.

$\cos x-1=0$ équivaut à $\cos x=\cos 0$. Par suite $x=k2\pi$.

Dans $[0\,;\pi]$, l'équation $(2\cos x-\sqrt{3})(\cos x-1)=0$ a pour solutions : 0 et $\frac{\pi}{6}$.

122 On observe que :
$$2\sin^2 x - 1 = (\sqrt{2}\sin x - 1)(\sqrt{2}\sin x + 1).$$
L'équation $2\sin^2 x - 1 = 0$ équivaut donc à l'équation $(\sqrt{2}\sin x - 1)(\sqrt{2}\sin x + 1) = 0$, soit $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ ou $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$.
$\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ équivaut à $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$.
Par suite $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.
$\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$ équivaut à $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
Par suite $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$.
Dans $]-\pi\,;\pi]$, l'équation $2\sin^2 x - 1 = 0$ a pour solutions :
$$-\frac{3\pi}{4}\,;-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{3\pi}{4}.$$

123 L'équation $4\cos^2 x - 3 = 0$ équivaut à $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$ ou $\cos x = \frac{5\pi}{6}$.
Les solutions de l'équation, dans $\mathbb{R}$, sont :
$$-\frac{\pi}{6} + k2\pi\,;-\frac{5\pi}{6} + k2\pi\,;\frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ et } \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$$

124 L'équation $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à :
$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin\frac{\pi}{4}.$$
Par suite $\frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $\frac{\pi}{6} - x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.
On obtient $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$ ou $x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi$.
Dans $[0\,;2\pi]$, les solutions de l'équation sont $\frac{17\pi}{12}$ et $\frac{23\pi}{12}$.

125 L'équation $\cos x = \cos 3x$ a pour solutions les réels $x = k\pi$ et $x = k\frac{\pi}{2}$.
Soit $k2\pi\,;\frac{\pi}{2} + k2\pi\,;\pi + k2\pi$ et $\frac{3\pi}{2} + k2\pi$.

126 L'équation $2\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ équivaut à l'équation $\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$. Cette équation admet deux solutions dans $]-\pi\,;\pi]$: $-\frac{2\pi}{15}$ et $\frac{8\pi}{15}$.

127 On utilise la propriété traduisant l'égalité des sinus. L'équation $\sin 2x = \sin x$ équivaut à $2x = x + k2\pi$ ou $2x = \pi - x + k2\pi$. On obtient $x = k2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.
En donnant à k les valeurs 0, 1 et –1, on obtient les solutions de l'équation dans $]-\pi\,;\pi]$: $0\,;\frac{\pi}{3}\,;\pi$ et $-\frac{\pi}{3}$.

128 **1.** L'énoncé est faux, se reporter à la propriété traduisant l'égalité des cosinus. L'énoncé réciproque est :
« Si $x = y + k2\pi$ alors $\cos x = \cos y$ ».
Cet énoncé est vrai.
2. L'énoncé est vrai. L'énoncé réciproque est :
« Si $x = y + k2\pi$, alors $\cos x = \cos y$ et $\sin x = \sin y$ ».
Cet énoncé est vrai.
3. L'énoncé est faux, se référer à la propriété traduisant l'égalité des sinus. L'énoncé réciproque est :
« Si $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, alors $\sin x = \frac{1}{2}$ ».
Cet énoncé est vrai.
4. L'énoncé est faux. L'énoncé réciproque est :
« Si $\sin y = -\sin x$ et $\cos y = -\cos x$, alors $y = -x + k2\pi$ ».
Cet énoncé est faux.

129 Faux. En effet, en général $\sin 2x \neq 2\sin x$.

130 Faux. En effet, l'équation équivaut à l'équation $\sin x = \frac{5}{4}$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

131 Il faut lire $3\cos^2 x - 1 = 0$ au lieu de $3\cos^2 x + 1 = 0$.
L'énoncé est vrai.

133 Faux. On remplace x par $-\frac{53\pi}{15}$. On obtient une égalité fausse.

134 Vrai.

135 **a.** $\frac{\pi}{2}$. **b.** $\frac{\pi}{2}$. **c.** 0.

136 **a.** $(\overrightarrow{KN}, \overrightarrow{KM}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.
b. $(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{MQ}) = \pi + k2\pi$.
c. $(\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{NQ}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

137 **1.** Puisque $0 < \frac{\pi}{5} < \pi$, $\sin\frac{\pi}{5} > 0$.
En outre $\cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5} = 1$.
On en déduit que $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - m^2}$.
On sait que $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{\pi}{5} = -m$.
De même, $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{\pi}{5} = -m$.
On a $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - m^2}$.
De même, $\sin\frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5} = -\sqrt{1 - m^2}$.
2. $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$ et $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}$.
Donc $\sin\frac{3\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5} = m$
et $\cos\frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - m^2}$.
On a $\sin\frac{7\pi}{10} = \sin\left(\frac{7\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5} = m$
et $\cos\frac{7\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5} = -\sqrt{1 - m^2}$.

138 L'équation $\cos x + 1 = 0$ admet une solution unique dans $]-\pi\,;\pi]$: π. Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont les réels de la forme $(2k + 1)\pi$.

139 **a.** $\sin(7\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$.
b. $\cos(13\pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$.
c. $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(x - 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.
d. $\sin(-3\pi - x) = \sin(-\pi - x) = -\sin(\pi + x) = \sin x$.
e. $\cos(\pi + x) + \sin(\pi - x) = -\cos x + \sin x$.

POUR FAIRE LE POINT

1 Pour la réponse C, il faut lire $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ et non $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. La bonne réponse est C.

2 B et C ; **3** A ; **4** C ; **5** B ; **6** A et B ; **7** C ;

8 Pour la réponse D, il faut lire $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos x$ et non $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$. Les bonnes réponses sont A et D.

9 Pour la réponse D, il faut lire deux solutions dans $[12\pi ; 13\pi]$ et non une solution dans $[12\pi ; 13\pi]$.
La bonne réponse est D.

10 A, B et D.

POUR APPROFONDIR

140 **a.** Il faut lire $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})$ au lieu de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
On a $\widehat{DAO} = \widehat{ADO} = \frac{\pi}{9}$, donc $\widehat{AOD} = \pi - \frac{2\pi}{9} = \frac{7\pi}{9}$.
Par suite, la mesure principale de $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})$ est $\frac{7\pi}{9}$.
b. (OE) est la bissectrice de $\widehat{AOD}$. Donc la mesure principale de $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE})$ est $\frac{7\pi}{18}$.
c. Le triangle EOD est isocèle, donc $\widehat{OED} = \frac{11\pi}{36}$.
Par suite la mesure principale de $(\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{ED})$ est $\frac{11\pi}{36}$.
d. (OE) est la bissectrice de $\widehat{AED}$, donc $\widehat{AED} = \frac{11\pi}{18}$.
Par suite $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}) = \frac{11\pi}{18} + k2\pi$.
En utilisant les propriétés des angles orientés, on obtient une mesure de $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{ED})$: $-\frac{29\pi}{18}$.
Or $-\frac{29\pi}{18} = -\frac{7\pi}{18} + 2\pi$. La mesure principale de $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{ED})$ est donc $-\frac{7\pi}{18}$.

141 **1.** Le triangle AMO est rectangle en M, donc $\sin\widehat{AOM} = \frac{AM}{OI}$. Par suite $\sin\frac{\alpha}{2} = AM$.
Or $AM = \frac{1}{2}AB$, donc $AB = 2\sin\frac{\alpha}{2}$.
2. Si $\alpha = 60°$, le triangle OAB est équilatéral de côté 1.
Par suite $1 = 2\sin 30°$ et donc $\sin 30° = \frac{1}{2}$.
3. a. $\left(46 + \frac{53}{60} + \frac{40}{60^2}\right) : 120 \approx 0{,}3908$.
Le résultat lu dans la table, à la ligne 46, fournit une approximation du sinus de l'angle moitié, à savoir 23°.
On obtient donc $\sin 23° \approx 0{,}3908$. Avec une calculatrice, on obtient : 0,3907 à 0,0001 près.
c. Pour sin 1°, on lit dans la table, à la ligne 2 : 3 – 5 – 40 ; c'est-à-dire $\left(3 + \frac{5}{60} + \frac{40}{60^2}\right) : 120 \approx 0{,}0258$.
Avec une calculatrice, on obtient $\sin 1° \approx 0{,}0175$.
Pour sin 5°, on lit dans la table, à la ligne 10 : 10 – 27 – 32 ; c'est-à-dire $\left(10 + \frac{27}{60} + \frac{32}{60^2}\right) : 120 \approx 0{,}0872$.
Avec une calculatrice, on obtient $\sin 5° \approx 0{,}0872$. On obtient la même approximation à 0,0001 près.

142 On a $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + k2\pi$
$= \beta - \alpha + k2\pi$.
En outre $(3\overrightarrow{AD}, -5\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) + \pi + k2\pi$
$= \pi + \alpha - \beta + k2\pi$.
a. $\frac{23\pi}{12}$ et $-\frac{11\pi}{12}$.
b. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.
c. $-\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{7\pi}{5}$.

143 En utilisant la relation de Chasles, on obtient :
$(\vec{v}, \vec{t}) = (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{t}) + k2\pi$.
$= \frac{\pi}{10} - \frac{4\pi}{5} - \frac{3\pi}{10} + k2\pi = -\pi + k2\pi$.
$= -\pi + k2\pi$.
Les droites (d_2) et (d_4) sont donc parallèles.

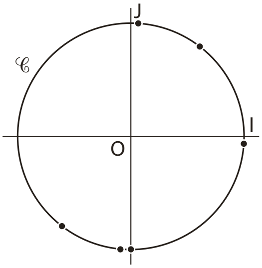
144 On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC})$ dans le parallélogramme ABCD. Donc :
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = k2\pi.$$

145 $\sin\frac{13\pi}{8} = \sin\left(\pi + \frac{5\pi}{8}\right) = -\sin\frac{5\pi}{8}$
et $\sin\frac{11\pi}{8} = \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = -\sin\frac{3\pi}{8}$.
Par suite $\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{11\pi}{8} + \sin\frac{13\pi}{8} = 0$.

146 $\cos\frac{16\pi}{15} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{15}\right) = -\cos\frac{\pi}{15}$;
$\cos\frac{17\pi}{30} = \cos\left(\pi - \frac{13\pi}{30}\right) = -\cos\frac{13\pi}{30}$.
Par suite :
$\cos\frac{\pi}{15} + \cos\frac{13\pi}{30} + \cos\frac{17\pi}{30} + \cos\frac{16\pi}{15}$
$= \cos\frac{\pi}{15} + \cos\frac{13\pi}{30} - \cos\frac{13\pi}{30} - \cos\frac{\pi}{15}$
$= 0$.

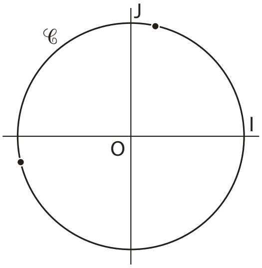
147 On a $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
a. $\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\frac{4\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
b. $\cos\frac{6\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\frac{6\pi}{5} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
c. $\cos\frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$
et $\sin\frac{3\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
d. $\cos\frac{7\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$
et $\sin\frac{7\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

148 **1.** Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont $\frac{7\pi}{24} + k2\pi$; $\frac{31\pi}{24} + k2\pi$; $-\frac{\pi}{48} + k2\pi$; $\frac{23\pi}{48} + k2\pi$; $\frac{47\pi}{2} + k2\pi$ et $\frac{71\pi}{48} + k2\pi$.
Dans $]-\pi ; \pi]$, les solutions sont :
$$\frac{7\pi}{24} ; -\frac{17\pi}{24} ; -\frac{\pi}{48} ; -\frac{\pi}{2} ; \frac{23\pi}{48} \text{ et } -\frac{25\pi}{48}.$$



2. Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont : $\dfrac{5\pi}{12} + k2\pi$ et $\dfrac{13\pi}{12} + k2\pi$.

Dans $]-\pi\,;\pi]$, les solutions sont $\dfrac{5\pi}{12}$ et $-\dfrac{11\pi}{12}$.



3. Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont : $\dfrac{\pi}{18} + k2\pi\,;\ \dfrac{13\pi}{18} + k2\pi\,;$
$\dfrac{25\pi}{18} + k2\pi\,;\ -\dfrac{5\pi}{18} + k2\pi\,;\ \dfrac{7\pi}{18} + k2\pi$ et $\dfrac{19\pi}{18} + k2\pi$.

Dans $]-\pi\,;\pi]$, les solutions sont :

$$\frac{\pi}{18}\,;-\frac{23\pi}{18}\,;-\frac{11\pi}{18}\,;-\frac{5\pi}{18}\,;\frac{7\pi}{18}$$

$$\text{et } -\frac{17\pi}{18}.$$

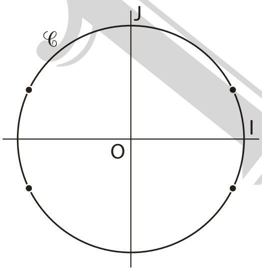
4. Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont :

$$\frac{\pi}{7} + k2\pi\,;-\frac{\pi}{7} + k2\pi\,;\ \frac{6\pi}{7} + k2\pi$$

$$\text{et } -\frac{6\pi}{7} + k2\pi.$$

Dans $]-\pi\,;\pi]$, les solutions sont :

$$\frac{\pi}{7}\,;-\frac{\pi}{7}\,;\frac{6\pi}{7} \text{ et } -\frac{6\pi}{7}.$$

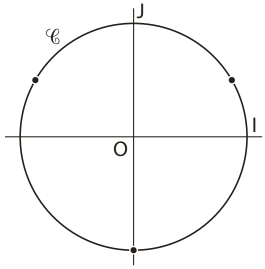


5. Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont :

$$\frac{\pi}{6} + k2\pi\,;\ \frac{5\pi}{6} + k2\pi \text{ et } \frac{3\pi}{2} + k2\pi.$$

Dans $]-\pi\,;\pi]$, les solutions sont :

$$\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6} \text{ et } -\frac{\pi}{2}.$$



149 **1.** L'équation $\cos x = \sin x$ équivaut à l'équation $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ qui a pour solutions les réels :

$$\frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ et } \frac{5\pi}{4} + k2\pi.$$

2. L'équation $\sin 2x = \cos x$ équivaut à l'équation $\sin 2x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ qui a pour solutions les réels :

$$\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ \frac{5\pi}{6} + k2\pi \text{ et } \frac{3\pi}{2} + k2\pi.$$

3. L'équation $\cos 3x = \sin x$ équivaut à l'équation $\cos 3x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$. Les solutions sont les réels :

$$-\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ \frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ \frac{\pi}{8} + k2\pi,\ \frac{5\pi}{8} + k2\pi \text{ et } \frac{9\pi}{8} + k2\pi.$$

4. L'équation $\sin 3x = -\sin 2x$ équivaut à l'équation $\sin 3x = \sin(-2x)$. Les solutions sont les réels :

$$\frac{k2\pi}{5} \text{ et } (2k+1)\pi.$$

5. L'équation $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 1$ équivaut à l'équation $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 1$, soit encore à l'équation $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$. Les solutions sont les réels :

$$-\frac{\pi}{12} + k2\pi \text{ et } \frac{7\pi}{12} + k2\pi.$$

150 **1.** $(\cos x + \sin x + 1)^2 = 2(1 + \cos x + \sin x + \cos x \sin x)$.

2. On obtient l'égalité en développant le second membre.

3. L'équation proposée équivaut à :

$$1 + \cos x = 0 \text{ ou } 1 + \sin x = 0.$$

Les solutions dans $[0\,;2\pi[$ sont π et $\dfrac{3\pi}{2}$.

151 **a.** On pose $S = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

On a $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) + k2\pi$,

donc $S = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) + \pi + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + k2\pi$
$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \pi + k2\pi$
$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) + \pi + k2\pi$.

Donc on a $S = \pi + k2\pi$.

b. La somme des angles d'un triangle est égale à $\pi + k2\pi$.

152 **1.** Une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ est $\dfrac{3\pi}{10}$. C'est aussi une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

2. Une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\dfrac{\pi}{5}$.

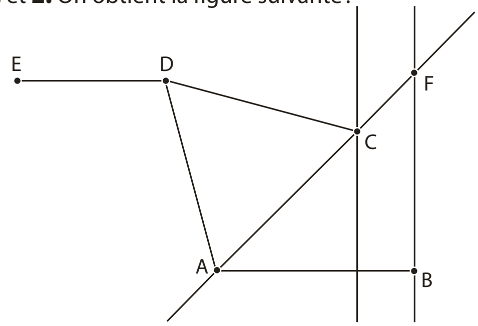
Une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est $\dfrac{2\pi}{5}$.

153 On obtient les mesures suivantes :
pour $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) : -\dfrac{3\pi}{8}$; pour $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) : \dfrac{5\pi}{8}$;
pour $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) : -\dfrac{3\pi}{8}$.

154 Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

155 Question 1. c. à la dernière ligne, lire $-\dfrac{13\pi}{12}$ et non $-\dfrac{13\pi}{2}$.

1. et **2.** On obtient la figure suivante :



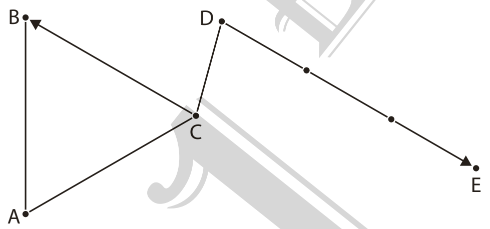
3. En utilisant les propriétés des angles orientés, on a :

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BF}) + k2\pi$$
$$= \pi + \frac{\pi}{4} - \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} + k2\pi$$
$$= -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

Donc les droites (BA) et (BF) sont perpendiculaires.
On démontrerait de même que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

4. Le triangle ABF est un triangle rectangle et isocèle d'où : $BF = 4$ et $AF = 4\sqrt{2}$.
On obtient $BC = 8 \sin \dfrac{\pi}{8}$.

156 **1.**



2. On utilise les propriétés des angles orientés. On a :

$$(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + k2\pi$$
$$= -\frac{5\pi}{12} + \frac{3\pi}{4} - \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi = -\pi + k2\pi.$$

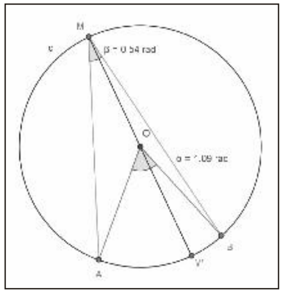
Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de sens contraires.
En outre le triangle ABC est équilatéral. On a :

$$DE = 3CD = \frac{3}{2}\,CA = \frac{3}{2}CB.$$

On en déduit que $\overrightarrow{DE} = -\dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{CB}$.

157 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :***
07S_exercice157.ggb (Geogebra)
et 07S_exercice157.g2w (Geoplan).

1. On obtient la figure suivante :



En déplaçant le point M sur le cercle $\mathscr{C}$, on peut conjecturer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + k2\pi$.

2. On sait que le triangle OAM est isocèle, de sommet O et qu'une mesure de la somme des angles d'un triangle est π. On utilise les propriétés des angles orientés. Par suite :
$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi$
Donc $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = \pi - (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})$.
Or $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OA}, -\overrightarrow{OM})$
$= \pi + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \pi - (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})$.
Par suite $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) + k2\pi$.
De même $2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM'}) + k2\pi$.

3. On a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OB}) + k2\pi$
$= 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + k2\pi$
$= 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + k2\pi$.

158 On a :

$$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CM}) + k2\pi$$
$$= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + k2\pi = -\pi + k2\pi.$$

Puisque CMNP est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{PN}$.
Donc $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{PN}) = -\pi + k2\pi$. Les droites (AE) et (NP) sont donc parallèles.

159 **1.** On note que les triangles EAD et EFC sont isocèles.
a. $(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}) = \dfrac{\pi}{6}$. **b.** $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EC}) = -\dfrac{\pi}{4}$.
c. $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = -\dfrac{5\pi}{12}$.

2. On a $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EF}) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EC}) + (\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EF})$
$= \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \pi$.
Donc les points A, E et F sont alignés.

160 **A. 1.** On a $\dfrac{25\pi}{6} = \alpha + k2\pi$ avec $-\pi < \alpha \leqslant \pi$.
Donc $\alpha = \dfrac{25\pi}{6} - k2\pi$.
Ainsi $-\pi < \dfrac{25\pi}{6} - k2\pi \leqslant \pi$.
D'où $-\dfrac{31\pi}{6} < -k2\pi \leqslant -\dfrac{19\pi}{6}$ et donc $\dfrac{19}{12} \leqslant k < \dfrac{31}{12}$.

2. On a $1 < \dfrac{19}{12} < 2 < \dfrac{31}{12}$. k est entier, donc $k = 2$.
C'est le seul entier de l'intervalle $\left[\dfrac{19}{12}\ ;\ \dfrac{31}{12}\right[$.

Par suite $k = \mathrm{E}\left(\dfrac{19}{12}\right) + 1$. D'où $\alpha = \dfrac{25\pi}{6} - 4\pi$.

La mesure principale de $\dfrac{25\pi}{6}$ est donc $\dfrac{\pi}{6}$.

B. 1. Si α est la mesure principale correspondant à a mesure d'angle quelconque, alors $a = \alpha + 2k\pi$ avec $-\pi < \alpha \leqslant \pi$. Par suite $-\pi < \alpha - 2k\pi \leqslant \pi$. En utilisant les propriétés des inégalités, on obtient :

$$\frac{a}{2\pi} - \frac{1}{2} \leqslant k < \frac{a}{2\pi} + \frac{1}{2},$$

soit aussi $\dfrac{a}{2\pi} - \dfrac{1}{2} \leqslant k < \left(\dfrac{a}{2\pi} - \dfrac{1}{2}\right) + 1$.

2. Il y a un seul entier dans l'intervalle $\left[\dfrac{a}{2\pi} - \dfrac{1}{2} \,;\, \left(\dfrac{a}{2\pi} - \dfrac{1}{2}\right) + 1\right[$ qui a pour amplitude 1.

Par suite si $\dfrac{a}{2\pi} - \dfrac{1}{2}$ est entier, alors $k = \dfrac{a}{2\pi} - \dfrac{1}{2}$.

Si $\dfrac{a}{2\pi} - \dfrac{1}{2}$ n'est pas entier, alors $k = \mathrm{E}\left(\dfrac{a}{2\pi} - \dfrac{1}{2}\right) + 1$.

3. On a $\alpha = a - 2k\pi$, avec l'entier k trouvé dans la question précédente.

4. Voici un algorithme donnant une approximation de la mesure principale d'un angle dont une mesure est donnée.

Initialisation
- Saisir A

Traitement
- B prend la valeur $\dfrac{A}{2\pi} - \dfrac{1}{2}$
- Si E(B) = B
- Alors K prend la valeur B
- Sinon K prend la valeur E(B) + 1.
- Fin Si
- A prend la valeur A – 2Kπ

Sorties
- Afficher K
- Afficher A.

5. On obtient les programmes suivants :

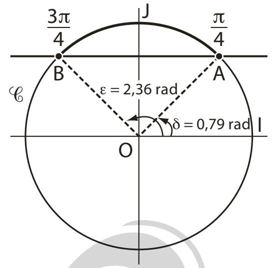
TI	CASIO
PROGRAM:MESPRINC :Input A :A/(2π)-1/2→B :If partEnt(B)=B :Then :B→K :Else	======MESPRINC====== ?→A↵ A÷(2π)-1÷2→B↵ If Int B=B↵ Then B→K↵ Else Int (B)+1→K↵ IfEnd↵ TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
:partEnt(B)+1→K :End :A-2K*π→A :Disp K :Disp A	======MESPRINC====== Else Int (B)+1→K↵ IfEnd↵ A-2K×π→A↵ K◢ A◢ TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR

6. On contrôle les résultats de la partie A :

TI	CASIO
prgmMESPRINC ?25π/6 2 .5235987756 Fait π/6 .5235987756	? 25π÷6 2 0.5235987756 - Disp -

161 **1. a.** Dans $]-\pi\,;\pi]$, l'équation $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ a pour solutions $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

b. et **c.** On obtient la figure suivante :

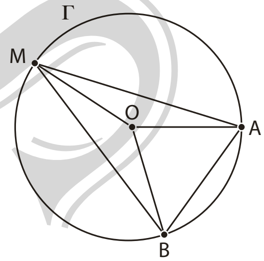


d. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{2}\sin x - 1 \geqslant 0$ dans $]-\pi\,;\pi]$ est $\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

2. a. $\left[\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$; **b.** $\left]-\pi\,;-\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}\,;\,\pi\right]$;

c. $\left]-\pi\,;\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}\,;\,\pi\right]$; **d.** $\left[-\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

162 **A. 1.**



Les triangles MOA et MOB sont isocèles.

On a $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}) + 2k\pi$

et $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO}) + 2k\pi$.

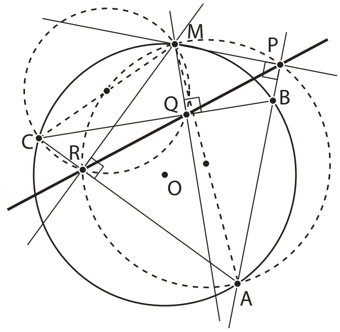
2. a. et **b.** Les égalités sont obtenues en utilisant la propriété de la somme des angles d'un triangle.

c. L'égalité est obtenue en utilisant la relation de Chasles.

3. On a $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + 2k\pi$
$= 2(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) + 2k\pi$.

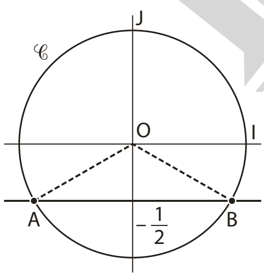
D'où l'égalité $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) + 2k\pi$.

B. On a la figure suivante :



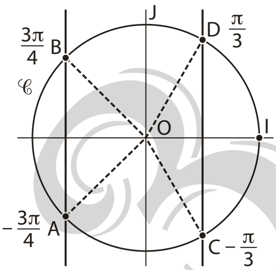
1. Les angles $\widehat{CRM}$ et $\widehat{CQM}$ sont droits, donc les points sont sur le cercle de diamètre [CM].
On peut donc utiliser la propriété démontrée dans la question **A. 3**.
On a donc $2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ}) = 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CQ}) + 2k\pi$.
2. Les angles $\widehat{ARM}$ et $\widehat{APM}$ sont droits, donc les points sont sur le cercle de diamètre [AM].
On peut donc utiliser la propriété démontrée dans la question **A. 3**.
On a donc $2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RP}) = 2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) + 2k\pi$.
3. Les points B, A, M et C sont des points du même cercle Γ.
On peut donc utiliser la propriété démontrée dans la question **A. 3**.
On a donc $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}) + 2k\pi$.
4. On utilise la relation de Chasles :
$$\begin{aligned}2(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) &= 2(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RM}) + 2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ}) + 2k\pi\\ &= 2(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}) + 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CQ}) + 2k\pi\\ &= 2(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB})\\ &\qquad + 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CQ}) + 2k\pi.\end{aligned}$$
Les points A, B et P sont alignés ; de même les points C, B et Q sont alignés.
Par suite $2(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CQ}) = 2k\pi$.
On en déduit que :
$$\begin{aligned}2(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) &= 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}) + 2k\pi\\ &= 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}) + 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}) + 2k\pi = 2k\pi.\end{aligned}$$
D'où $(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) = k\pi$.
On peut donc conclure que les points P, Q et R sont alignés.

163 **1.** L'équation a pour solutions 1 et $-\frac{1}{2}$.
2. a. On pose $X = \sin x$. On a donc $-1 \leqslant X \leqslant 1$. L'équation (E) devient l'équation $2X^2 - X - 1 = 0$.
b. On a $X = 1$ ou $X = -\frac{1}{2}$.
On est donc conduit à résoudre, dans $]-\pi\,;\pi]$, les deux équations $\sin x = 1$ et $\sin x = -\frac{1}{2}$.
Les solutions sont $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$. Elles sont représentées par les points J, A et B du cercle trigonométrique.



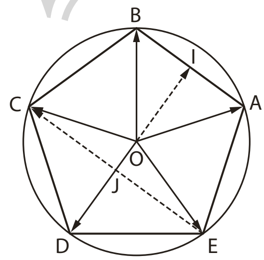
Les solutions, dans $\mathbb{R}$, sont les réels :
$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

2. a. En remarquant que $(2\sqrt{2} + 2)^2 = 12 + 8\sqrt{2}$, on peut conclure que les solutions de l'équation
$X^2 + 2(\sqrt{2} - 1)X - \sqrt{2} = 0$ sont $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{1}{2}$.
b. Pour résoudre (E′), on pose $X = \cos x$, avec $-1 \leqslant X \leqslant 1$.
Les solutions de (E′) sont donc obtenues en résolvant les deux équations $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos x = \frac{1}{2}$.
Dans $]-\pi\,;\pi]$, les solutions sont : $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.
c.



3. En posant $X = \sin x$ avec $-1 \leqslant X \leqslant 1$, l'équation donnée devient $X^2 + X - 2 = 0$, équation qui a pour solutions -2 et 1. La première solution ne convient pas.
On doit donc résoudre l'équation $\sin x = 1$, qui admet 1 comme seule solution dans $]-\pi\,;\pi]$.
Dans $]-\pi\,;\pi]$, l'équation $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$ admet pour solution unique 1.

164 Les mesures des angles sont données en radians.



1. a. Le triangle AOB est isocèle de sommet O.
On a $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{5}$. Donc $\widehat{ABO} = \frac{3\pi}{10}$. On a $\widehat{BOD} = \frac{4\pi}{5}$.
b. On obtient pour mesures principales :
$(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \frac{3\pi}{10}$; $(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{5}$ et $(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$.
2. En utilisant la relation de Chasles :
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EC}) &= (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DE}) + (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EC}) + k2\pi\\ &= (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DE}) - (\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{DE}) + k2\pi\\ &= (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DE}) - (\pi + (\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED})) + k2\pi\\ &= -\frac{3\pi}{10} - \frac{6\pi}{5} + k2\pi = -\frac{3\pi}{2} + k2\pi.\end{aligned}$$
Par suite une mesure de $(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DE})$ est $\frac{\pi}{2}$.
3. a. Soit I le milieu de [AB]. On a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$.
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}) &= (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) + k2\pi\\ &= \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} + k2\pi = \pi + k2\pi.\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires. Il en est donc de même des vecteurs $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$.

Si J est le milieu de [EC], alors $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OJ}$.

On a $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) + k2\pi$

$$= -\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} + k2\pi = k2\pi.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OJ}$ sont colinéaires.

Il en est de même des vecteurs $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OD}$.

b. La somme vectorielle $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ est une somme de 3 vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{OD}$.

Elle est donc colinéaire à $\overrightarrow{OD}$.

4. En considérant les milieux de [BC] et de [DA], on démontre de même que $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{OE}$.

5. Il existe donc deux réels x et x' tels que

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OD}$ et

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=x'\overrightarrow{OE}$. Par suite $x\overrightarrow{OD}=x'\overrightarrow{OE}$.

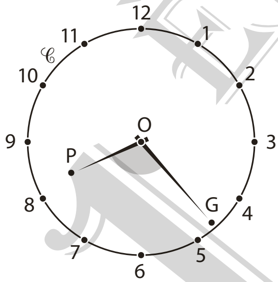
Comme les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$ ne sont pas colinéaires, $x = x' = 0$.

On peut donc conclure que :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}.$$

Prises d'initiatives

165 On appelle O le centre du cadran de l'horloge, et A le point du cercle correspondant à minuit ou à midi. On désigne par t un instant quelconque, exprimé en heures, entre minuit et midi (on a donc $0 \leqslant t \leqslant 12$). L'extrémité de la petite aiguille est appelée P, celle de la grande aiguille est appelée G.



Les aiguilles sont alignées en sens opposés lorsque $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OG}) = \pi + 2k\pi$.

Elles se déplacent dans le sens négatif. Soit α une mesure, en radians, de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$. Pour 12 heures, la mesure de l'angle est -2π. Il y a proportionnalité entre les temps et les mesures α. Par suite $\dfrac{t}{12} = \dfrac{\alpha}{-2\pi}$.

D'où $\alpha = -\dfrac{\pi}{6}\,t$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = -\dfrac{\pi}{6}\,t + 2k\pi$.

Soit β une mesure, en radians de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG})$. Pour 60 minutes, la mesure de l'angle est -2π. Le temps t exprimé en minutes est égal à 60 t. Il y a proportionnalité entre les temps et les mesures β. Par suite $\dfrac{60t}{60} = \dfrac{\beta}{-2\pi}$.

D'où $\beta = -2\pi t$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}) = -2\pi t + 2k\pi$.

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OG}) = (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}) + 2k\pi$

$$= \frac{\pi}{6}\,t - 2\pi t + 2k\pi.$$

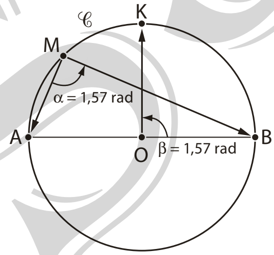
D'où $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OG}) = -\dfrac{11\pi}{6}t + 2k\pi$.

Les valeurs de t pour lesquelles les aiguilles sont alignées en sens opposés sont solutions de l'équation $-\dfrac{11\pi}{6}t = \pi + 2k\pi$, soit $t = -\dfrac{6}{11} - \dfrac{12k}{11}$.

En donnant à k les valeurs $-1, -2, \ldots, -11$, on obtient les heures cherchées :

0 h 32 min 43 s ; 1 h 38 min 11 s ; 2h 43 min 38 s ; 3 h 49 min 5 s ; 4 h 54 min 32 s ; 6 h ; 7 h 5 min 27 s ; 8 h 10 min 54 s ; 9 h 16 min 22s ; 10 h 21 min 49 s ; 11 h 27 min 16 s.

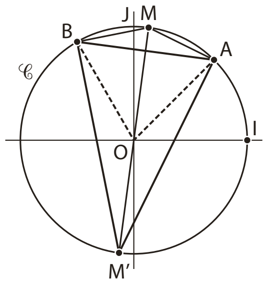
166



Puisque $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, le triangle MAC est rectangle en M. Le point M appartient donc au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] privé des points A et B. Soit K le point du cercle $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OK}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Comme l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est un angle droit direct, l'ensemble des points M est le demi-cercle de diamètre [AB], contenant le point K.

167



Les points M cherchés appartiennent à la médiatrice de [AB] et au cercle trigonométrique. Il ya donc deux points. Soit M le point d'ordonnée positive et soit M' le deuxième point. M' est le symétrique de M par rapport à O. On a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) + k2\pi$.

Puisque A est le point associé à $\dfrac{\pi}{4}$ et B le point associé

à $\frac{2\pi}{3}$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

D'où $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} + k2\pi$. (OM) est la bissectrice de $\widehat{AOB}$, donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{5\pi}{24} + k2\pi$.

Par suite $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) + k2\pi$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{24} + k2\pi = \frac{11\pi}{24} + k2\pi\,.$$

On a $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) + k2\pi$

$$= \frac{11\pi}{24} + \pi + k2\pi = \frac{35\pi}{24} + k2\pi\,.$$

Les points du cercle trigonométrique tels que le triangle ABM soit isocèle sont les points associés aux réels $\frac{11\pi}{24}$ et $-\frac{13\pi}{24}$ (en effet $\frac{35\pi}{24} = 2\pi - \frac{13\pi}{24}$).

168 On se propose de déterminer un algorithme donnant la mesure, en radians, de l'angle géométrique formé par les aiguilles d'une horloge, à un temps exprimé en minutes. On suppose que ce temps est compris entre 0 h 00 min et 12 h 00 min. On reprend les notations de l'exercice 165. On note β une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OG})$ La mesure cherchée est donc la mesure de l'angle géométrique $\widehat{POG}$, c'est-à-dire la valeur absolue de la mesure principale α de β. Pour un temps déterminé, notons H le nombre d'heures et M le nombre de minutes.

On a l'algorithme suivant :

Initialisation
Saisir H, M
Traitement
T prend la valeur H + $\frac{M}{60}$
β prend la valeur $-\frac{11\pi}{6}$T
Calculer α
Sortie
Afficher $|a|$

Pour le calcul de α, on pourra se reporter à l'exercice 160.

169 Si $\sin x + \cos x = 1$, alors $(\sin x + \cos x)^2 = 1$.

Donc $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$.

On en déduit que $\sin x \cos x = 0$. On est donc conduit à résoudre les deux équations $\sin x = 0$ et $\cos x = 0$.

La première équation a pour solutions les réels $2k\pi$ et les réels $\pi + 2k\pi$.

La deuxième équation a pour solutions les réels $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et les réels $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

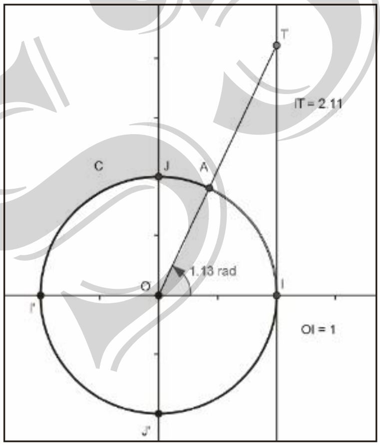
Les réels $\pi + 2k\pi$ ne sont pas solutions de l'équation $\sin x + \cos x = 1$, car alors $\cos x = -1$ et $\sin x + \cos x = -1$.

Les réels $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ne sont pas solutions de l'équation $\sin x + \cos x = 1$, car alors $\sin x = -1$ et $\sin x + \cos x = -1$.

Les autres solutions trouvées conviennent.

On peut donc conclure que l'équation $\sin x + \cos x = 1$ a pour solutions dans $\mathbb{R}$, les réels $2k\pi$ et les réels $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

170



L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de conjecturer le résultat.

On trouve comme approximation du réel x la mesure principale de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$, soit 1,13 radian.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :
07S_exercice170.ggb (Geogebra)
et 07S_exercice170.g2w (Geoplan).

F Activités TICE

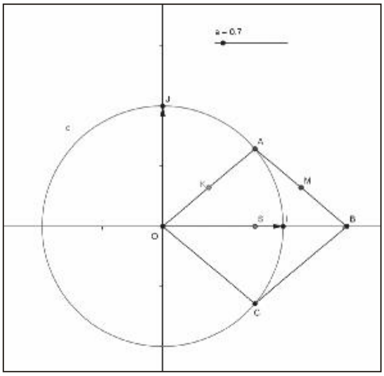
TP 1 Losange articulé

On se propose, ici, de mettre en évidence des ensembles de points construits à partir d'un losange dont les sommets vérifient certaines contraintes.

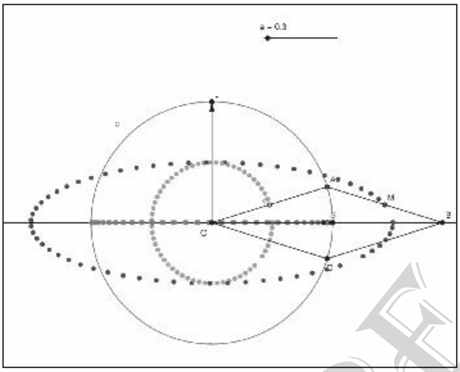
Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :
07S_TP1.ggb (Geogebra) et 07S_TP1.g2w (Geoplan).
07S_correctionTP1A.ggb, 07S_correctionTP1A2.ggb
et 07S_correctionTP1B.ggb (Geogebra).
07S_corrrectionTP1A.g2w (Geoplan).

Partie A

1. *Il est possible de partir directement du fichier 07S_TP1.ggb ou 07S_TP1.g2w pour ne pas faire cette construction.*



2.



On observe que le point S appartient au diamètre [I'I] du cercle. K appartient à un cercle de centre O, de rayon $\frac{1}{2}$. Le point M appartient à une ellipse de centre O.

Partie B

1. a. On a A(cos a ; sin a).

b. C est le symétrique de A par rapport à (OI), donc C(cos a ; –sin a).

2. K est le milieu de [OA], donc $K\left(\frac{1}{2}\cos a\ ;\ \frac{1}{2}\sin a\right)$.

S est le milieu de [AC], donc S(cos a ; 0).

B est le symétrique de O par rapport à S, donc B(2cos a ; 0).

3. M est le milieu de [AB], donc $M\left(\frac{3}{2}\cos a\ ;\ \frac{1}{2}\sin a\right)$.

4. a. L'abscisse de B est égale à 2cos a.

Comme $-1 \leqslant \cos a \leqslant 1$, la valeur maximale de la distance OB est 2.

Le point B appartient à un segment porté par (II') centré en O et de longueur 4.

b. Le point S a pour coordonnées (cos a ; 0) donc S est un point du segment [II'].

5. a. $OK = \frac{1}{2}\ OA$.

b. Par suite $OK = \frac{1}{2}$ car [OA] est un rayon du cercle.

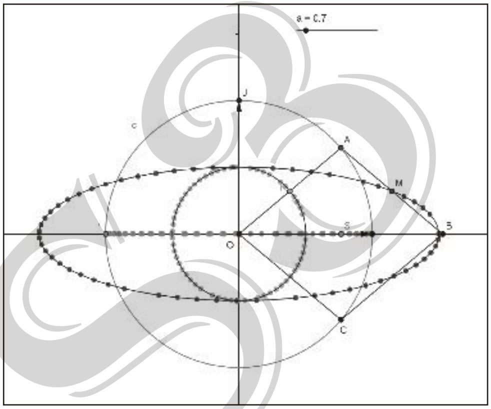
Le point K appartient au cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.

6. a. On a $\cos a = \frac{2}{3}x$ et $\sin a = 4y$.

b. On sait que $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, donc les coordonnées de M vérifient l'équation $\frac{4}{9}x^2 + 16y^2 = 1$.

c. Le point M appartient à une ellipse de centre O.

On obtient les tracés suivants :



TP 2 Secteur circulaire d'aire ou de périmètre fixé

Dans ce TP, on étudie les variations de l'aire ou du périmètre d'un secteur angulaire, en fonction de l'angle de ce secteur, dans deux situations : le périmètre est fixé ou l'aire est fixée.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :
07S_TP2.ggb (Geogebra) et 07S_TP2.g2w (Geoplan). 07S_correctionTP2B.ggb et 07S_correctionTP2B.ggb (Geogebra), 07S_correctionTP2C.xws (Xcas) et 07S_correctionTP2C.dfw (Derive).

Partie A

1. Le périmètre cherché est égal à $2 + \frac{\pi}{2}$ (en cm).

Son aire est $\frac{\pi}{4}$ (en cm²).

2. L'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ a pour longueur aR, donc le périmètre P du secteur angulaire est $2R + aR$.

Ainsi $P = (2 + a)R$.

3. L'aire S étant proportionnelle à la mesure de l'angle au centre, on a $\frac{2\pi}{a} = \frac{\pi R^2}{S}$.

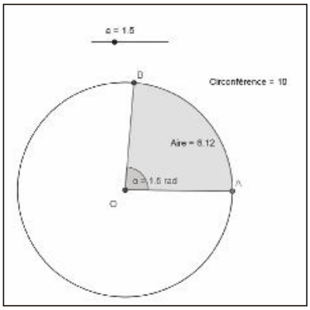
On en déduit que $S = \frac{a}{2}R^2$.

Partie B

Les fichiers 07S_TP2.ggb (Geogebra) et 07S_TP2.g2w (Geoplan) peuvent être donnés aux élèves pour gagner du temps en ne faisant pas la construction.

1. a. $R = \dfrac{10}{2+a}$.

On obtient le tracé suivant :



On peut conjecturer que la valeur de a telle que l'aire soit maximale est égale à 2 (radians).

L'aire S est alors voisine de 6,25 cm^2.

b. Pour toute autre valeur de P, on trouve $a = 2$.

2. a. $R = \dfrac{P}{2+a}$.

b. On a $S = \dfrac{a}{2} R^2 = \dfrac{a}{2} \dfrac{P^2}{(2+a)^2}$, d'où :

$$g(a) = \frac{1}{2} P^2 \times \frac{a}{(2+a)^2} = \frac{1}{2} = P^2 \times f(a)$$

avec $f(a) = \dfrac{a}{(2+a)^2}$.

c. La fonction f est de la forme d'un quotient.

On a donc $f'(a) = \dfrac{2-a}{(2+a)^3}$.

Sur l'intervalle $[0\,;2\pi[$, $(2+a)^3$ est un réel positif. Donc $f'(a)$ a même signe que $2 - a$.

D'où $f'(a) \geqslant 0$ sur $[0\,;2]$ et $f'(a) \leqslant 0$ sur $[2\,;2\pi[$.

La fonction f est donc croissante sur $[0\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;2\pi[$.

d. Comme $\dfrac{1}{2} P^2$ est un réel positif, la fonction g a les mêmes variations que la fonction f.

L'aire du secteur angulaire est maximale lorsque $a = 2$ radians. Ce résultat ne dépend pas de la valeur choisie pour P. L'aire est alors égale à $\dfrac{P^2}{16}$.

Si $P = 10$ cm, alors $S = 6{,}25$ cm^2.

Partie C

1. R est un réel positif, donc $R = \sqrt{\dfrac{2S}{a}}$.

2. On sait que $P = (2+a)R$, donc $P = (2+a)\sqrt{\dfrac{2S}{a}} = h(a)$.

$$h(a) = \sqrt{2S} \times \frac{2+a}{\sqrt{a}} = \sqrt{2S} \times \sqrt{\frac{1}{f(a)}} .$$

La fonction h n'est pas définie pour 0.

3. Le réel $\sqrt{2S}$ est positif. Le sens de variation de la fonction h est le même que celui de la fonction $\sqrt{\dfrac{1}{f}}$.

La fonction f est positive. On sait que f est croissante sur $[0\,;2[$ et décroissante sur $[2\,;2\pi[$.

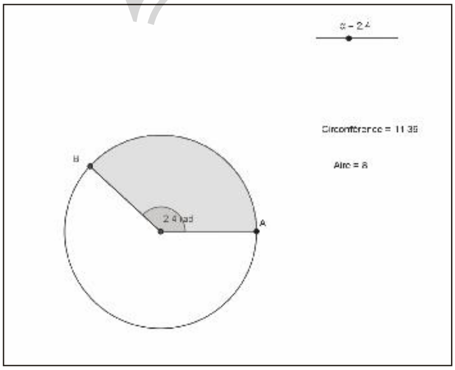
Donc $\dfrac{1}{f}$ est décroissante sur $]0\,;2[$ et croissante sur $[2\,;2\pi[$. La fonction racine carrée étant croissante sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit que la fonction h est décroissante sur $]0\,;2[$ et croissante sur $[2\,;2\pi[$.

Elle admet donc un minimum pour $a = 2$.

On peut donc conclure que le périmètre est minimal pour $a = 2$ radians. Ce résultat ne dépend pas de la valeur choisie pour S. Le périmètre est alors égal à 4 $\sqrt{S}$ (en cm).

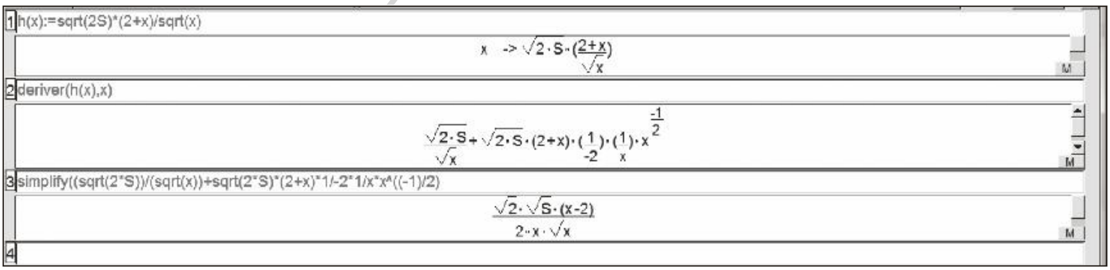
Compléments

a. Comme dans la partie B, une recherche préalable peut être faite à l'aide d'un logiciel de géométrie. Voici la figure obtenue dans le cas où l'aire S est égale à 8 cm^2. Dans ce cas $P = 8\sqrt{2} \approx 11{,}31$ cm pour $a = 2$ radians.



b. Dans l'étude du sens de variation de la fonction h, on peut utiliser un logiciel de calcul formel pour calculer la dérivée h'. L'écran obtenu avec Xcas est ci-dessous.

TP2 Partie C



CHAPITRE

8 Le produit scalaire

A Le programme

Le chapitre consacré au produit scalaire est, de manière logique, placé après ceux consacrés à la géométrie plane et à la trigonométrie puisque le produit scalaire va mobiliser le calcul vectoriel, la définition de la norme d'un vecteur et le cosinus d'un angle non orienté.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Produit scalaire dans le plan Définition, propriétés.	• Calculer le produit scalaire de deux vecteurs par différentes méthodes : – projection orthogonale ; – analytiquement ; – à l'aide des normes et d'un angle ; – à l'aide des normes. • Choisir la méthode la plus adaptée en vue de la résolution d'un problème.	▣ Il est intéressant de démontrer l'égalité des expressions attachées à chacune de ces méthodes. ▣ La démonstration du théorème de la médiane fournit l'occasion de travailler le calcul vectoriel en lien avec le produit scalaire.

B Notre point de vue

Pour construire ce chapitre, nous avons tenu compte du fait que la notion de « Travail d'une Force » n'est plus au programme de la classe de Première S en physique et que, d'autre part , il est écrit dans les commentaires du programme *« qu'il est intéressant de démontrer l'égalité des expressions attachées à chacune des méthodes permettant de calculer le produit scalaire de deux vecteurs »*. Ainsi, nous avons choisi de définir le produit scalaire de deux vecteurs à l'aide de l'expression $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\cdot\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$. En effet, à partir de cette définition, il est possible de démontrer toutes les autres expressions du produit scalaire. Nous terminons le cours par le théorème de la médiane dont la démonstration *« fournit l'occasion de travailler le calcul vectoriel en lien avec le produit scalaire »*. Après une série d'exercices où il s'agit de calculer des produits scalaires par des méthodes variées, nous proposons des exercices dans lesquels le produit scalaire apparaît clairement comme étant un nouvel outil pour calculer des longueurs, des angles et démontrer une orthogonalité. Dans les exercices d'approfondissement, il est souvent possible d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer des propriétés, que l'on démontre ensuite en utilisant le produit scalaire de manière appropriée. Nous avons placé quelques problèmes de recherche de « lieux géométriques », parce qu'ils permettent de mettre en œuvre et de consolider l'outil « produit scalaire ». L'exercice proposé dans la rubrique « **Chercher avec méthode** » propose de démontrer une propriété liée à une configuration dans un triangle. Il est court, d'une difficulté raisonnable et peut être traité de différentes manières. La solution exposée montre que le produit scalaire, utilisé à bon escient, est un outil efficace et rapide.

Les TP proposés conduisent à utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer un ensemble de points ou étudier des configurations du plan. Le second TP aborde la notion de « puissance d'un point par rapport à un cercle ».

Les notions abordées dans le chapitre 8

1. Définition et expression analytique
2. Bilinéarité et expression avec le projeté orthogonal
3. Expression du produit scalaire avec norme et angles, théorème de la médiane

C Avant de commencer

Se tester avec des QCM

1 B ; **2** A ; **3** A et C. ; **4** B et D ;
5 B et C ; **6** C ; **7** A ; **8** B ; **9** A.

Se tester avec des exercices

10 **a.** Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.
b. Le point D tel que $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ est le quatrième sommet du parallélogramme BCDA. Comme le triangle ABC est rectangle et isocèle en B, BCDA est un carré.

11 Si $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$, alors $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BC}$. Ce qui signifie que C est le milieu de [EB].

D'autre part, $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}$, donc C est le milieu de [AF]. Le quadrilatère ABFE est donc un parallélogramme de centre C. Comme CA = CB (ABC est isocèle en C), ses diagonales sont égales, donc c'est un rectangle.

12 $\cos \widehat{BAD} = 0$.

$\cos \widehat{ACD} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ car $\widehat{ACD} = \dfrac{\pi}{4}$.

$\cos \widehat{CBE} = \dfrac{1}{2}$ car $\widehat{CBE} = \dfrac{\pi}{3}$.

$\widehat{DCE} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}$, donc $\cos \widehat{DCE} = -\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\widehat{CBE'} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$, donc $\cos \widehat{CBE'} = -\dfrac{1}{2}$.

D Activités

Activité 1 Calculs de longueurs

Il s'agit d'introduire la première expression du produit scalaire dans deux cas particuliers :

1. *Les points A, B et C sont alignés et B appartient au segment [AC] ;*

2. *ABC est rectangle en B.*

L'activité utilise la définition de la norme d'un vecteur : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$ et la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Dans la question **1. b.**, on écrit $AC^2 = (AB + BC)^2$ et $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| = AC^2$.

Activité 2 Dans un repère

Ici, on veut découvrir l'expression du produit scalaire de deux vecteurs définis par leurs coordonnées dans un repère orthonormé.
Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 08S_activite1.ggb (Geogebra).

1. On commence par un cas particulier. On calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$ à l'aide de la définition $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ et on obtient $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(34 - 20 - 10) = 2$.
On vérifie que $2 \times 3 + 4 \times (-1) = \vec{u}\cdot\vec{v}$.

2. On utilise maintenant un logiciel de géométrie dynamique (voir le ***fichier 08S_activité1.ggb***).
Aide pour utiliser le logiciel : on définit l'origine O du repère en saisissant : O = (0, 0). Pour définir A, on saisit A = (2, 4) ; idem pour B = (3, –1). On définit le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ avec l'icône . On fait de même pour $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Ensuite, on définit deux curseurs a et b à l'aide de l'icône a=2 et dans « Saisie », on écrit **M = (a,b)**.
On définit ainsi le vecteur $\vec{w}$ (icône) par $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$. Pour construire le point C tel que $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{w}$, on saisit **OC = vecteur[u] + vecteur[v]**.
Lorsque les curseurs a et b varient, les points M et C se déplacent. On affiche les longueurs OA, OM et OC à l'aide de l'icône cm.
On calcule et on affiche les réels $p = 2 \times a + 4 \times b$ et $q = \dfrac{1}{2} \times (OC^2 - OA^2 - OM^2)$ en écrivant dans « saisie » :
p= 2*a+4*b et q=0.5*(distance[O,A]^2+(distance……)……).

On peut ainsi constater que $p = q$, ce qui permet d'introduire l'expression du produit scalaire de deux vecteurs définis par leurs coordonnées dans un repère orthonormé.

Activité 3 Où l'on retrouve l'algèbre

L'objectif est de découvrir la bilinéarité du produit scalaire. On utilise ici l'expression du produit scalaire de deux vecteurs définis par leurs coordonnées dans un repère orthonormé.

1. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = (a+3)\times 2 + (b+1)\times(-2) = 2a - 2b + 4$;
$\vec{u}\cdot\vec{w} = 2a - 2b$ et $\vec{v}\cdot\vec{w} = 4$, d'où $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$.

2. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = (a+3)^2 + (b+1)^2 = a^2 + b^2 + 6a + 2b + 10$
$= (a^2 + b^2) + 10 + 2(3a + b)$,
soit $\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Activité 4 Avec une projection orthogonale

L'objectif est d'introduire l'expression du produit scalaire à l'aide du projeté orthogonal.
Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 08S_activite4.ggb (Geogebra).

1. Aide pour utiliser le logiciel : on utilise les icônes dont l'utilisation a été décrite dans l'activité 2. On définit les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AM}$. Pour calculer et faire afficher le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$, on saisit **p= u*v**.
On constate que lorsque H est fixe et que M se déplace sur la droite $\mathscr{D}$, le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est constant.
Lorsque H se déplace sur (AB), le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est positif si H appartient à la demi-droite [AB) d'origine A, négatif sinon.

2. La démonstration repose sur la relation de Chasles, la linéarité du produit scalaire et sur le fait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HM} = 0$, car (AB) et (HM) sont perpendiculaires. On en déduit que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$, ce qui permet de donner une autre expression du produit scalaire.

3. Cette question reprend les observations et les conclusions de la question **1. b**.

Activité 5 Le déplacement d'une luge

Il s'agit maintenant d'introduire la dernière expression du produit scalaire à l'aide des normes et du cosinus de l'angle.

1. Nous avons choisi d'utiliser la notion de « travail d'une force » (sans citer ce mot puisque cette notion n'est plus au programme en physique), parce qu'il nous semble que les élèves peuvent aisément comprendre que dans la situation présentée, certaines forces vont favoriser le déplacement, d'autres vont s'y opposer. On verra ainsi que lorsqu'un produit scalaire est positif, cela correspond à la situation où la force exercée contribue au déplacement de la luge ; lorsque le produit scalaire est négatif, la force s'y oppose. Dans la question **b.**, on peut généraliser en concluant que c'est la valeur de l'angle entre la force et le déplacement qui fait que la force favorise, s'oppose ou n'intervient pas sur le déplacement.

2. On calcule dans chacun des cas la quantité W.
$W_1 = AB$; $W_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$; $W_3 = 0$; $W_4 = \dfrac{-AB}{2}$; $W_5 = -AB$.
On vérifie que par exemple pour $\overrightarrow{F_2}$, $W_2 = \overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{AB}$.
En effet, $\overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{AB} = AH \times AB$ si H est le projeté orthogonal de l'extrémité de $\overrightarrow{F_2}$ sur (AB). On montre que $AH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (trigonométrie dans le triangle rectangle construit à l'aide du point H) et ainsi $W_2 = \overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{AB}$.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 **1.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(16 - 4 - 25) = -6{,}5$.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 35$.
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4$.

2 $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 10 + 36 + 1 = 47$, donc $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{47}$.
2. $\sqrt{93}$.

3 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0{,}5(64 - 36 - 16) = 6$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -16$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = -22$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA} = -22$; $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = 6$.

4 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0{,}5(48 - 16 - 16) = 6$; $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 8$.

5 $\vec{u}\cdot\vec{v} = 13$; $\vec{u}^{\,2} = 61$; $\vec{v}^{\,2} = 10$; $2\vec{u}\cdot\vec{v} = 26$.

6 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -23$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA} = 3$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = -9$.

7 **1.** Non. **2.** Oui. **3.** Oui.

8 **1.** $m = 4{,}8$. **2.** $m = -28$.
3. $(m - 9)(m + 2) - 4(m - 7) = 0$, soit $m = 1$ ou 10.

9 Soit A(1 ; 1), B(2 ; 3), C(–2 ; 1) et D(2 ; –1), alors $\overrightarrow{AB}(1\,;\,2)$ et $\overrightarrow{CD}(4\,;\,-2)$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 4 - 4 = 0$.
Donc (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

10 ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

11 MNP est un triangle rectangle en N.

12 $(2\vec{u} + 3\vec{v})\cdot(\vec{u} - \vec{v}) = 11$; $(-\vec{u} + \vec{v})\cdot(4\vec{u} + \vec{v}) = -37$; $(\vec{u} + 2\vec{v})^2 = 76$.

13 Si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8$, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -8$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -8$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8$.

14 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 36$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 20$; $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 45$.

15 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = -36$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 36$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$; $BC\cdot\overrightarrow{BD} = 36$.

16 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 25$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = -9$.

17 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 8$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -24$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 16$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -8$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} = 16$.

18 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 21$.

19 **1.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -9$. **2.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = 18\sqrt{3}$.

20 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 18$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = -18$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA} = 18$.

21 AB = 5.

22 **1.** $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GF} = \dfrac{13}{2}$. **2.** $GE = \sqrt{13}$ et $GF = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.
3. $\widehat{EGF} = \dfrac{\pi}{4}$.

POUR S'ENTRAÎNER

23 Si ABCD est un parallélogramme tel que AB = 5, AC = 9 et AD = 6, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}(81 - 25 - 36)$ car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 10$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA} = -25$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}(CB^2 - AB^2 - CA^2) = \dfrac{1}{2}(36 - 25 - 81) = -35$.
$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AD}\cdot(-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 10$.

24 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = 0{,}5(BC^2 - AB^2 - AC^2) = 0{,}5(9 - 16 - 36)$
$= -21{,}5$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -14{,}5$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC} = 5{,}5$.

25 **1.** BD = 12.
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0{,}5(16^2 - 10^2 - 10^2) = 28$;
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = -28$; $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD} = -28$; $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB} = -100$;
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} = 100$.

26 On utilise la commutativité de l'addition vectorielle.

27 Faux, si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

28 Faux, si $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$, alors $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux.

29 Faux car $(\vec{u}\cdot\vec{v})$ est un réel.

30 Vrai car $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$.

31 $\vec{u}(6 ; -2)$ et $\vec{v}(1 ; -3)$. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 6 + 6 = 12$; $\vec{u}^2 = 36 + 4 = 40$, $\vec{v}^2 = 1 + 9 = 10$; $-2\vec{u}\cdot\vec{v} = -2 \times (12) = -24$.

32 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -42$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA} = 8$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = -15$.

33

```
Afficher « le vecteur u a pour coordonnées »
Saisir a, b
Afficher « le vecteur v a pour coordonnées »
Saisir c, d
p prend la valeur ab + cd
Afficher « u·v = »
Afficher p
Fin
```

34 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$.

35 Le triangle EFG est rectangle isocèle en F.

36 ABCD est un losange.

37 $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$, on obtient H(35 ; 3).

38 Le centre a pour coordonnées $\left(2 ; \dfrac{3}{2}\right)$.
Le rayon est $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

40 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, soit $8(x - 5) + 6 = 0$.
On obtient $C\left(\dfrac{34}{8} ; 0\right)$.

41 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, soit $-24 + (2 - y)(-y) = 0$.
On obtient $y = 6$ ou $y = -4$. Donc B(0 ; 6) et B′(0 ; – 4).

42 $\vec{u}\cdot\vec{v} = -32$. $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux si $m = \dfrac{18}{5}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux si $m = 6$.

43

```
Afficher « le vecteur u a pour coordonnées »
Saisir a, b
Afficher « le vecteur v a pour coordonnées »
Saisir c, d
p prend la valeur ab + cd
Si p = 0
Alors afficher « les vecteurs u et v sont orthogonaux »
Sinon Afficher « ils ne sont pas orthogonaux »
Fin Si
```

44 **1.** Étant donné trois points A, B et C. Le point C appartient au cercle de diamètre [AB] si, et seulement si, le triangle ACB est rectangle en C ou bien si C est confondu avec A ou B, soit $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$.

2. On montre à l'aide des coordonnées que $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$.

45 On montre à l'aide des coordonnées que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

46 Faux car le produit scalaire est non nul.

47 Vrai car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$.

48 Vrai car $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP} = 0$.

49 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -10$;
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -10$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10$;
$\overrightarrow{BA}\cdot 2\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -20$ et $3\overrightarrow{AB}\cdot 4\overrightarrow{AC} = 12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 120$.

50 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 5 + 10 = 15$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA} = 15$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD} = -15$.

51 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = 0{,}5(100 - 36 - 42) = 11$, d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -11$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -11 = 0{,}5(AC^2 - 36 - 49)$,
d'où $AC^2 = -22 + 36 + 49$, soit $AC = \sqrt{63}$.

52 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}) = 25 - 16 = 9$.

53 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} = 9$, soit AB = 3.

55 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0{,}5(9 + 36 - 49) = -2$;
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = 0{,}5(49 + 9 - 36) = 11$; $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = 38$.

56 $(\vec{u}+\vec{v})^2 = 36 + 16 - 10 = 42$; $(\vec{u}-\vec{v})^2 = 36 + 16 + 10 = 62$;
$(\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} - \vec{v}) = 36 - 16 = 20$.

57 Comme $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB}$, il faut que ABDC soit un losange (parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires).

58 **2.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $BD = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$, d'où la démonstration.
3. $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$, d'où :
$BD^2 = 2(36 + 16) - 64 = 40$, d'où $BD = \sqrt{40}$.

59 Faux : $5\vec{u} \cdot \vec{v}$.

60 Faux : $4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

61 Vrai, voir l'exercice **57**.

62 BC est un triangle équilatéral de côté 5.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 5 \times \frac{1}{2} = 12{,}5$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 12{,}5$;
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = -12{,}5$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12{,}5$;
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot (-\overrightarrow{CB}) = -12{,}5$.

63 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} = 4$; $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = 10$; $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GH} = 10$;
$\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{HE} = 0$; $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{FG} = -10$.

64 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -25$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$; $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD} = -25$;
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -25$; $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{25}{2}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BO} = -12{,}5$.

65 Le côté du losange mesure $\sqrt{41}$.
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 50$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$;
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 41 - 50 = -9$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 41 + 8(-4) = 9$.

67 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ car si on nomme I le milieu de [BC], $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$, et (AI) et (BC) sont perpendiculaires.

68 $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} = -\frac{c^2}{4} + ab$ (on décompose, par exemple $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}$).

69 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AA'}$ car $\widehat{ADE} = 90°$.

70 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = AB^2$ car $\widehat{ABF} = 90°$ et de même $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = AC^2$.
$AB^2 + AC^2 = 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AF}$ car $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ (I est le milieu de [BC]).

72 Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
1. Cette proposition est vraie.
2. La réciproque de cette proposition est vraie : si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et A, B, C distincts, alors ABC est un triangle rectangle en A.
3. La contraposée de cette proposition est vraie : si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0$, alors ABC n'est pas rectangle en A puisque les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

73 1. Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB^2$.
Vrai car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
La réciproque est fausse, prendre par exemple un trapèze ABCD rectangle en A et B.
2. Si B appartient au segment [AC], alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$. Vrai par définition du produit scalaire lorsque les points sont alignés.
La réciproque est fausse : par exemple, C appartient au segment [AB].
3. Si H est l'orthocentre du triangle ABC, alors $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Vrai ainsi que la réciproque (définition et propriété de l'orthocentre d'un triangle).
4. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$. Faux, on a en fait :
$\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$, soit $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{v} - \vec{w}$.
Par contre, la réciproque est vraie.

74 L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par A.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

76 **1.** $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 25$. L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le symétrique de A par rapport à B.
2. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BA} = 10$. L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$.
3. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = -10$. L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H tel que $\overrightarrow{BH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

77 **1.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM}$ équivaut à $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.
L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (BC) passant par A.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ équivaut à $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ où I est le milieu de [BC]. L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AI) passant par A.

78 C'est le cercle de diamètre [AB].

79 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = MO^2 - OA^2$.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 9$ donne $MO^2 - 16 = 9$, soit $MO = 5$.
Cercle de centre O et de rayon 5.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -4$, alors $MO^2 - 16 = -4$, soit $MO = 2\sqrt{3}$.
Cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{3}$.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -40$, alors $MO^2 - 16 = -40$, soit $MO^2 = -24$.
Ensemble vide.

80 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = 12$. On obtient :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CI} = 0$ en décomposant $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$,
d'où orthogonalité de (AB) et (CI), ce qui prouve que les points B, C et I sont alignés.

81 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$ entraîne $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$. Vrai.

82 Faux : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

83 Vrai, à condition que B et C distincts. Le point C se projette sur B.

84 Vrai parce que le point M se projette à l'intérieur du segment [AB].

85 Faux car si I est le milieu, $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$.

86 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 7 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$.

87 $AB = 5$.

88 **1.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -15\sqrt{3}$; **2.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; **3.** $-18\sqrt{3}$; **4.** 3.

89 Pour construire les vecteurs $\vec{v}$ (il y en a deux dans chacun des cas), on détermine l'angle géométrique entre les deux vecteurs ; pour la construction, on utilise les angles orientés, d'où deux cas possibles.

1. $\frac{\pi}{3}$. **2.** $\frac{2\pi}{3}$. **3.** $\frac{5\pi}{6}$. **4.** $\frac{\pi}{4}$.

90 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 8$; $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = -8$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = -16$;
$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FC} = 16$; $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$.

91 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 2$; $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = -2\sqrt{3}$,
d'où $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OC} = 2\sqrt{3}$; $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC} = -2\sqrt{3} - 2$.

92 **1.** $\widehat{ACB}$ environ égal à 41° ; **2.** $\widehat{ACB}$ environ égal à 99°.

94 **1.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = 35$; $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 9$; $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC} = 14$;
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 10$; $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = 35$.
2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 35 - 10 + 14 - 13 = 26$.
3. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 13 + 10 = 23$, d'où $\widehat{ACB}$ environ égal à 33°.

95 **1.** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = 0{,}5(16 - 49 - 25) = -29$;
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0{,}5(25 - 49 - 16) = -20$;
$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(49 - 16 - 25) = 4$.
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 49 - 20 = 29$;
de même : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 49 - 29 = 20$.
3. On obtient $\widehat{ABC}$ environ égal à 44° ; $\widehat{BAC}$ environ égal à 34° et donc $\widehat{ABC}$ environ égal à 102°.

96 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10$;
$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = 25 + 16 - 20 = 21$, d'où $BC = \sqrt{21}$;
$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 16 - 10 = 6$.
D'où $\widehat{ACB}$ environ égal à 71°.

98 Il faut lire dans l'énoncé AC = 7 et non AC = 9.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0{,}5(49 - 16 - 25) = 4$, d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 + 16 = 20$.
$\widehat{BAC}$ environ égal à 44°.

99 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -24$ donc l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.

100 **1.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -13$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = 30$.
2. D'où $\widehat{BAC}$ environ égal à 111° et $\widehat{ABC}$ environ égal à 47°. On en déduit $\widehat{ABC}$ environ égal à 22°.

101 **1.** On peut construire deux triangles car $\cos\widehat{BAC} = 0{,}5$.
2. On obtient deux points C et C_1 symétriques par rapport à (AB) et $\widehat{BAC} = \widehat{BAC_1} = 60°$.

102 Même raisonnement qu'à l'exercice **101** et $\widehat{BAC} = 120°$.

103 Même raisonnement qu'à l'exercice **101** et $\widehat{BAC} \approx 132°$.

104 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 2$ donc $\widehat{ABC}$ est aigu, ce qui permet de dire que H appartient au segment [BC].
$BC = 5$, donc $BH = \frac{2}{5}$.

105 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

106 On obtient $OM^2 = 4$, $OM = 2$, d'où cercle de centre O et de rayon 2.

107 $AB^2 + AC^2 = 2IA^2 + \frac{1}{2}BC^2$ si I est le milieu de [BC], d'où $IA = \sqrt{18{,}25}$.
De même, si J est le milieu de [AB], $CJ = \sqrt{28}$.

108 La diagonale [AC] mesure $4\sqrt{7}$.

109 La proposition et sa réciproque sont vraies car un angle est obtus si, et seulement si, son cosinus est négatif.

110 **1.** La proposition est vraie car $\widehat{BAC} = 60°$. Donc la contraposée est vraie, c'est-à-dire : si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \neq \frac{1}{2}AB^2$, alors ABC n'est pas équilatéral.
Une proposition et sa contraposée sont équivalentes.
2. Faux. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}AB^2$ entraîne seulement que C se projette au milieu de [AB].

111 Vrai car $BC^2 = (2OB)^2 = 4OB^2$.

112 Vrai car $\cos\widehat{BAC}$ positif, donc l'angle est aigu.

113 Faux, il y en a deux (*cf.* exercice **101**).

114 On montre que $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{DJ} = 0$ en écrivant par exemple : $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})$.

115 On montre que $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ en décomposant $\overrightarrow{EF}$.
Par exemple : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$.
$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ si on pose $AB = a$.

116 **1.** $BI = BJ = a\frac{\sqrt{5}}{2}$. On utilise le théorème de Pythagore.
2. $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ} = \frac{5}{4}a^2\cos\widehat{IBJ}$. C'est une application directe du résultat précédent.
3. $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$
$= \frac{1}{4}(0 + a^2 + a^2 + 2a^2) = a^2$.
$\cos\widehat{IBJ} = \frac{4}{5}$, d'où $\widehat{IBJ}$ environ égal à 37°.

117 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MQ} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ})$
$= -MB \times MA + BN \times AQ = 0$.
On démontre de même que le quadrilatère MNPQ possède deux autres angles droits, donc c'est un rectangle. À l'aide du théorème de Pythagore, on prouve que deux côtés consécutifs sont égaux. Donc c'est un carré.

118 Avec la première expression :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(100 - 36 - 25) = -19{,}5$.

119 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3 \times 4 \times -\frac{\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$.

120 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 9 \times 6 = 54$.

121 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 12{,}5$.

122 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -12$.

123 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.

124 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10 \times 5 = 50$.

125 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6 \times 6 = 36$.

126 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}) = 4\times4\times0{,}5+16 = 24.$

127 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8\times4 = 32.$

128 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5\times5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}$.

129 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0.$

130 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0.$

131 **1.** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}(100-49-81) = -15$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC} = -49$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD} = -15$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}) = 15-49 = -34$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = 49-34 = 15.$

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2)$,
d'où $AC^2 = 30+49+81 = 160$; $AC = 4\sqrt{10}$.

132 On obtient $\widehat{BAC}$ environ égal à 14° et $\widehat{ABC}$ environ égal à 127°.

133 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18$; $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC} = -18$; $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CJ} = 13{,}5$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = -18.$

134 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}(64-25-25) = 7.$

$\cos\widehat{BOC} = \dfrac{7}{25}$ d'où $\widehat{BOC}$ environ égal à 74°.

135 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}) = \dfrac{a^2}{3}-\dfrac{a^2}{3} = 0.$

POUR FAIRE LE POINT

1 A ; **2** B ; **3** A, B et C ; **4** C et D ;
5 B et D ; **6** A ; **7** B, C et D ; **8** C ;
9 A, B et C ; **10** C et D ; **11** B et D.

10 Réponse B il faut lire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}AC^2$.

POUR APPROFONDIR

136 **1.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Donc $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$ et on déduit $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
On montre de même que $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$, donc G point de concours des médianes.
2. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG} = 18$; $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$; $\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{AC} = -9$;
$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BA} = -18$; $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{CA} = 18.$
3. $GA^2+GB^2+GC^2 = \dfrac{4}{9}(AI^2+BJ^2+CK^2)$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}+\ldots\right)$$
$$= \frac{4}{9}\left(\frac{3AB^2+3AC^2+3BC^2}{4}\right)$$
$$= \frac{AB^2+AC^2+BC^2}{3}.$$

Ici, on obtient $\dfrac{185}{3}$.

137 **1.** $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PE}$ car (PA) et (EB) sont perpendiculaires.
D'où $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OA}) = d^2-r^2$.
2. $\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{A'B} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB'})\cdot(\overrightarrow{A'P}+\overrightarrow{PB})$
$= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PB'}\cdot\overrightarrow{PA'}) = 0$
d'après la question précédente.

138 **1.** $k = 32$. **2.** $k = -64$.

139 **1.** $MA^2-MB^2 = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2-(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2 = 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AB}$.
2. a. Droite perpendiculaire à (AB) passant par B.
b. Droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de [IA].

140 **1.** $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ car $|(\vec{u}\cdot\vec{v})| = |\|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\cos(\vec{u}\cdot\vec{v})||$ et $|\cos(\vec{u}\cdot\vec{v})|$ est inférieur ou égal à 1.
2. $|(\vec{u}\cdot\vec{v})| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ si, et seulement si, cos = 1 ou –1, ce qui permet de dire que les vecteurs sont colinéaires.

141 **1.** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM'}$ car (AM') et (BM) sont perpendiculaires.
2. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'} = AB^2$ si (BM') et (AB) sont perpendiculaires.
La droite (BM') est tangente au cercle en B.

142 ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 08S_exercice 142 (Geogebra).***
Aide : on affiche le produit scalaire de deux vecteurs en saisissant : u*v.
Il semble que le produit scalaire est constant lorsque M parcourt le cercle.
1. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}) = MI^2-IA^2$. Or MI est égal au rayon du cercle et IA est constant. La conjecture est démontrée.
2. a. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$. Cercle de diamètre [AB].
b. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \dfrac{3}{4}a^2$. Cercle de centre I et de rayon a.
c. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -a^2$. Ensemble vide.
3. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$, soit $IM^2 = k+\dfrac{a^2}{4}$, donc si $k+\dfrac{a^2}{4}$ positif, c'est un cercle. Si $k+\dfrac{a^2}{4}$ nul, ensemble réduit à un point. Si $k+\dfrac{a^2}{4}$ négatif, ensemble vide.

143 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$, car AB = AE, AC = AF et $\widehat{BAF} = \widehat{CAE}$.
O montre que $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{EF} = 0$ en écrivant par exemple :
$\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}$ et on utilise la propriété démontrée précédemment.

144 On montre que $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DN} = 0$ en écrivant par exemple :
$\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM})$ et $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}$ et on utilise le fait que AM = AN et AD = AB.

145 Pour construire la figure avec Geogebra, on utilise entre autres l'icône pour tracer une droite perpendiculaire à une autre passant par un point donné.

On utilise également l'icône pour définir les points H et K comme points d'intersection de ces droites perpendiculaires à… avec les côtés du triangle.

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 08S_exercice145 (Geogebra).

Pour démontrer que $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Les segments [HK] et [AI] sont orthogonaux si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

146 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) \cdot (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC})$

$= -AB \times EB + BC \times BG = 0.$

147 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$

On en déduit que si M appartient à deux hauteurs d'un triangle, il appartient nécessairement à la troisième car $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ entraîne $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

148 Aide pour conjecturer la nature de l'ensemble décrit par I avec Geogebra

Les objets peuvent laisser une trace dans la vue Graphique quand ils sont déplacés. On utilise le Menu contextuel pour basculer vers Trace activée .
Ensuite, on modifie la construction de sorte que l'objet dont on a activé la trace change de position et laisse une trace.
Le point dont on veut créer le lieu doit dépendre du mouvement d'un point se déplaçant sur un objet (par exemple : ligne, segment, cercle).

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 08S_exercice 148 (Geogebra).

Si on pose M(x ; 0) et N(1 ; y) et comme D(0 ; 1), alors $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$ entraîne $x = y$.
Les coordonnées de N sont (1 ; x), celle de I $\left(\frac{x+1}{2} ; \frac{x}{2}\right)$, soit $y_I = x_I - \frac{1}{2}$.
Les points I appartiennent donc au segment d'équation $y = x - \frac{1}{2}$, avec x compris entre 0 et1.

149 Aide Geogebra : on trace la parabole en saisissant `y=x^2`.
Ensuite, on utilise les aides déjà présentées dans l'exercice **145**. Pour afficher la longueur du segment LN, on peut utiliser l'icône : cet outil donne la distance entre deux points, deux lignes, ou un point et une ligne et l'affiche sous forme d'un texte dynamique dans la vue Graphique.

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 08S_exercice 149 (Geogebra).

Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{2a^2}{a} = 2a$.
L'équation de la droite (AB) est donc $y = 2ax - a^2$.
Cette droite est tangente à la parabole en A.
Si N(0 ; y), alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$ entraîne $a^2 + (y - a^2)(-2a^2) = 0$, soit $y = \frac{1+2a^2}{2}$. Donc $N\left(0 ; \frac{1+2a^2}{2}\right)$.
Comme L a pour coordonnées (0 ; a^2), on en déduit que LN $= \frac{1}{2}$. Le segment [LN] a donc une longueur constante.

150 1. a. Pour montrer que $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = -AH^2$, on peut écrire $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC})$, d'où $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = HA^2 - AH^2 - AH + 0 = -AH^2$.

b. Alors $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC})$

$= \frac{1}{4}(HA^2 - AH^2) = 0.$

2. Soit O le milieu de [BC], on montre (avec le théorème des milieux) que OIAJ est un quadrilatère qui a trois angles droits, donc c'est un rectangle, et par conséquent le quatrième angle $\widehat{IOJ}$ est droit ; ce qui signifie que O appartient au cercle de diamètre [IJ]. Or, on sait que H appartient au cercle de diamètre [OA], donc, d'après ce qui précède au cercle de diamètre [IJ], (HI) est perpendiculaire à (HJ).

3. On a IJ $= \frac{z}{2}$ (théorème des milieux) ; HI $= \frac{y}{2}$ ([HI] est une médiane du triangle rectangle AHC) et de même HJ $= \frac{x}{2}$. On conclut en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore.

151 1. $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ car :

$$\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{4}(a^2 + 0 + 0 - a^2).$$

2. On montre de même que $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AR} = 0$, etc. et on en déduit que EFGH a trois angles droits, donc c'est un rectangle.

3. GF = GC, théorème des milieux dans le triangle CFD.

4. $MC^2 = \frac{5a^2}{4}$, soit $MC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

5. On montre que $GH = \frac{1}{2}BG$ (théorème des milieux) et que $GN = \frac{1}{2}FD$. D'où $BG = \frac{4}{5}\frac{a\sqrt{5}}{2}$ et $GH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.
Même démonstration pour GF.

6. Cette question reprend les conclusions des questions précédentes.

152 1. Le réel k tel que l'ensemble des points M tel $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = k$ est le cercle circonscrit au carré ABCD est $k = 0$.

2. a. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = MO^2 - \frac{a^2}{2}$.

b. $MO^2 - \frac{a^2}{2} = k$ si $MO^2 = k + \frac{a^2}{2}$. Pour que l'ensemble cherché soit le cercle inscrit dans le carré, il faut que $OM = \frac{a}{2}$, soit $k + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$. On obtient $k = -\frac{a^2}{4}$.

153 **Aide pour conjecturer la nature de l'ensemble décrit par I avec Geogebra :** voir l'exercice **148**.
Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 08S_exercice 153 (Geogebra).

1. Le lieu des points M semble être un cercle. La longueur IM est constante.

2. a. (OM) et (PQ) sont perpendiculaires car (OM) est la médiatrice de [PQ].

b. Dans le triangle OPM, $OP^2 = OM^2 + PM^2$.
Or $PM = MQ = MA$ (triangle rectangle PAQ, M milieu de [PQ]), donc $MA^2 + MO^2 = r^2$.

c. Théorème de la médiane dans AMO :
$MA^2 + MO^2 = 2IM^2 + \dfrac{AO^2}{2}$, donc $r^2 = 2IM^2 + \dfrac{AO^2}{2}$
et $IM^2 = \dfrac{2r^2 - AO^2}{4}$.

d. Le réel $\dfrac{2r^2 - AO^2}{4}$ est positif car comme A est intérieur au cercle : $OA < r$.

e. Conclusion : M parcourt le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\dfrac{2r^2 - AO^2}{4}}$.

3. On considère un point M quelconque de (Δ), donc $IM^2 = \dfrac{2r^2 - AO^2}{4}$ où I est le milieu de [OA].

a. Théorème de la médiane dans OMA :
$$MA^2 + MO^2 = 2IM^2 + \frac{AO^2}{2},$$
d'où $MA^2 + MO^2 = 2\left(\dfrac{2r^2 - AO^2}{4}\right) + \dfrac{AO^2}{2}$.
Donc $MA^2 + MO^2 = r^2$.
Par suite $OM^2 < r^2$ et M est à l'intérieur du disque de centre O et de rayon r.

b. OP = OQ et (OM) perpendiculaire à [PQ], alors (OM) est la médiatrice de [PQ] et ainsi M est le milieu de [PQ].
$OM^2 = OP^2 - PM^2$ (théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OPM) ; d'autre part, on sait que $MA^2 + MO^2 = r^2$.
Alors $MA^2 + OP^2 - PM^2 = r^2$.
Soit $MA^2 = MP^2$ puisque $OP = r$ et ainsi $MA = MP$.
On démontre de même que $MA = MQ$.
Ce qui prouve que le triangle PAQ est rectangle en A.
Le point M est donc un point du lieu.

c. Conclusion : le lieu est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\dfrac{2r^2 - AO^2}{4}}$.

154 **1.** On pose $BC = a$ et $NB = b$.
$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{NR} = (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM}).(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BR})$
$= 0 + CN \times NB - DC \times BR + BR^2$
$= (a - b)b - a(a - b) + (a - b)^2 = 0.$

2. Soit $B(a\,;0)$, $D(0\,;a)$, $C(a\,;a)$ et $M(x\,;x)$ (M appartient à la droite d'équation $y = x$).
On a alors $N(a\,;x)$ et $R(x\,;0)$. Soit $\overrightarrow{DM}(x\,;x - a)$ et $\overrightarrow{NR}(x - a\,;-x)$. On montre ainsi que $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{NR} = 0$.

155 **1.** $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Or $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$, soit $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$. On en déduit que les points A, A' et G sont alignés.

On montre de même que B, B' et G sont alignés.
Donc G est le point d'intersection de deux médianes ; c'est le centre de gravité de ABC.

2. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ or $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$, donc $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$. Or OA' est la médiatrice de [BC], donc (AH) est perpendiculaire à (BC) ; c'est donc la hauteur issue de A.
On montre de même que (BH) est la hauteur issue de B.
On en déduit que H est l'orthocentre du triangle ABC.

3. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.
On en déduit que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Ainsi, les points O, G, H sont alignés (droite d'Euler).

156 **1.** Comme (EF) et (FE) sont perpendiculaires, on a $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PE'}$.
Or $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PE'} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OE})\cdot(\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OE}) = PO^2 - r^2$.

2. $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PH})\cdot(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}) = \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AP}$.
Or $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{PC} = -\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} = r^2 - OP^2$
et $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{PA'}\cdot\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA'}\cdot\overrightarrow{PA} = PO^2 - r^2$.
D'où $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AP} = 0$ et $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.
Ce qui prouve (BH) est perpendiculaire à (AC). Or H appartient aussi à la hauteur issue de A. Ce qui nous permet de dire que H est l'orthocentre.
Conclusion : les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit à ce triangle.

Prises d'initiatives

157 On calcule de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CA}$.
$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}a^2$.
$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CA} = DE \times CA \times \cos\widehat{DFC} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \times a\sqrt{2} \times \cos\widehat{DFC}$.
Il vient $\cos\widehat{DFC} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, soit $\widehat{DFC} \approx 71°$.

158 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$ si I est le milieu de [AB].
De même $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CI^2 - IA^2$.
Alors $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ si $MI^2 - IA^2 = CI^2 - IA^2$.
Soit $MI = IC$. Le lieu des points M est donc le cercle de centre I et de rayon IC.

159 On a $AB = 4$. Donc, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = -8$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point H tel que $\overrightarrow{AH} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$.
On a de plus $AM = d$, d'où trois cas possibles. Si $d < 2$, pas de solution ; si $d = 2$, un seul point solution, le point H ; si $d > 2$, la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point H est solution.

160 Les médianes (BI) et (CJ) sont perpendiculaires si, et seulement si $GB^2 + GC^2 = BC^2$, en notant G le centre de gravité de ce triangle.

C'est-à-dire $\frac{4}{9}(BI^2 + CJ^2) = BC^2$

ou encore $BI^2 + CJ^2 = \frac{9}{4} BC^2$.

Or, en utilisant le théorème de la médiane, on peut écrire $BI^2 = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2}\right)$.

De même $CJ^2 = \frac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2}\right)$.

En ajoutant, on obtient :

$$BI^2 + CJ^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{BA^2}{2} + \frac{CA^2}{2} + 2BC^2\right) = \frac{9}{4}BC^2.$$

Soit $\left(\frac{BA^2}{4} + \frac{CA^2}{4} + BC^2\right) = \frac{9}{4}BC^2$.

Ce qui donne $BA^2 + CA^2 = 5\ BC^2$.

161 Le quadrilatère OLSA est un losange car ses quatre côtés sont égaux (rayon du cercle). Donc ses diagonales sont perpendiculaires. On note J leur point d'intersection et D le point diamétralement opposé à S sur le cercle.

On a SJ = 100 car J est le milieu de [SO].

Alors $\overrightarrow{SI} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SI} \cdot \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SJ} \cdot \overrightarrow{SD} = 100 \times 400 = 40\,000$.

Or $\overrightarrow{SI} \cdot \overrightarrow{SC} = SI \times SC = SI \times 300$.

Alors $SI = \frac{40\,000}{300} = \frac{400}{3}\ m$.

F Activités TICE

TP 1 Orthocentre d'un triangle variable

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 08S_TP1A.ggb et 08S_TP1B.ggb (Geogebra).

A. 1. Aide : l'icône sert à tracer une droite passant par un point donné, perpendiculaire à une droite donnée. On l'utilise ici pour construire l'orthocentre du triangle ABC construit. Dans la partie A, on utilise également l'icône pour construire une droite passant par un point donné parallèle à une droite donnée.

Dans tout l'exercice, pour visualiser l'ensemble décrit par l'orthocentre H du triangle, on utilise le Menu contextuel pour basculer vers Trace activée. Ensuite, on modifie la construction de sorte que l'objet dont on a activé la trace change de position et laisse une trace.

Note : on peut désactiver la trace d'un objet en décochant Trace activée dans le Menu contextuel. L'item Rafraîchir l'affichage d'Affichage efface toutes les traces.

2. On note $(a\ ;0)$ les coordonnées du point A dans ce repère, et $(-a\ ;0)$ celles de B, avec a réel non nul.

La droite (d), parallèle à l'axe des abscisses, a une équation est de la forme $y = c$, où c est un réel non nul. On note x l'abscisse du point C.

L'ordonnée de C est c et l'abscisse de H est la même que celle de C, c'est-à-dire x, donc H $(x\ ; y)$. On traduit le fait que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales en écrivant $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, soit, en remplaçant par les coordonnées des vecteurs : $(x + a)(x - a) + yc = 0$, soit $y = \frac{-(x^2 - a^2)}{c}$.

Les points H décrivent donc la parabole d'équation $y = \frac{-x^2 + a^2}{c}$. Parabole tournée vers bas de sommet $\left(0\ ; \frac{a^2}{c}\right)$. Lorsque H est situé au sommet de la parabole, le triangle ABC est isocèle en C car la hauteur (CH) passe par le milieu de [AB].

B. 1. On note $(a\ ;0)$ et $(b\ ;0)$ les coordonnées respectives des points A et B dans ce repère, avec a et b réels.

La droite (d) passe par l'origine du repère donc son équation est de la forme $y = mx$. Si on note x l'abscisse de C, son ordonnées est mx. H a pour abscisse x, la même que celle de C ; soit y son ordonnée.

$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc, avec les coordonnées des vecteurs, on obtient $(x - b)(x - a) + ymx = 0$.

Soit $y = \frac{-(x - b)(x - a)}{mx} = \frac{-x^2 + (a + b)x - ab}{mx}$ avec x non nul puisqu'on suppose que (d) est non perpendiculaire à (AB).

Les points H appartiennent à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x^2 + (a + b)x - ab}{mx}$.

Les points H appartiennent donc aux deux branches d'une hyperbole.

2. Si la droite (d) coupe (AB) en A, alors $a = 0$.

$(x - b)(x - a) + ymx = 0$ donne $(x - b)x + ymx = 0$, d'où soit $x = 0$ (exclu) ou $y = -\frac{(x - b)}{m}$.

Les points H décrivent donc une droite.

3. Si la droite (d) coupe (AB) en B, alors les points H décrivent la droite perpendiculaire à (BC) passant par A, c'est-à-dire la droite perpendiculaire à (d) passant par H.

TP 2 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 08S_TP2A.ggb et 08S_TP2B.ggb (Geogebra).

Aide : pour faire afficher le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$, on commence par définir les vecteur $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ à l'aide de l'icône (représentant origine vecteur), puis on saisit **d=u*v** (où u et v sont les deux vecteurs que l'on a créés).

A. 2. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}$ car les droites (AB) et (A'B) sont perpendiculaires.

D'où $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}) = MO^2 - OA^2$
$= MO^2 - R^2$.

On en déduit que le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est indépendant de la sécante au cercle $\mathscr{C}$ choisi.

Dans la suite, on note $P_{\mathscr{C}}(M)$ ce nombre. C'est la puissance de M par rapport à $\mathscr{C}$.

3. Si le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$, alors $P_{\mathscr{C}}(M) = 0$.

4. a. Si M est à l'intérieur du cercle, $P_{\mathscr{C}}(M) < 0$ car $OM < R$.

Si M est à l'extérieur du cercle, $P_{\mathscr{C}}(M) > 0$ car $OM > R$.

b. Les points T et T' sont les points d'intersection du cercle de diamètre [OM] et du cercle $\mathscr{C}$.

D'après le théorème de Pythagore :

$$MT^2 = MT'^2 = MO^2 - R^2 = P_{\mathscr{C}}(M).$$

B. On donne deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centres O et O', de rayons R et R', sécants en A et B.

On se propose d'étudier l'ensemble (Δ) des points du plan qui ont même puissance par rapport à ces deux cercles.

1. A et B appartiennent à (Δ) car $P_{\mathscr{C}}(A) = P_{\mathscr{C}}(B) = 0$ et $P_{\mathscr{C}'}(A) = P_{\mathscr{C}'}(B) = 0$.

3. a. I est le milieu de [OO'].

$MO^2 - MO'^2 = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IO})^2 - (\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IO})^2 = 2\overrightarrow{MI}\cdot 2\overrightarrow{IO} = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{OO'}$

b. Il faut montrer que :

$R^2 - R'^2 = 2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{OO'}$ et non $R'^2 - R^2 = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{OO'}$.

$R^2 - R'^2 = 2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{OO'}$ car $R^2 - R'^2 = OA^2 - OA'^2 = 2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{OO'}$ à l'aide du même raisonnement.

On en déduit que $P_{\mathscr{C}}(M) = P_{\mathscr{C}'}(M)$ si, et seulement si, $MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$, soit $MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2$, d'où $2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{OO'}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{OO'} = 0$.

L'ensemble Δ des points M tels que $P_{\mathscr{C}}(M) = P_{\mathscr{C}'}(M)$ est la droite passant par A perpendiculaire à OO'.

4. Attention, le point T est mal placé sur la figure.

$MT = MT'$ si $P_{\mathscr{C}}(M) = P_{\mathscr{C}'}(M)$. On retrouve la droite Δ définie dans la question précédente.

C. On a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$.

La droite (MC) coupe $\mathscr{T}$ en C et en un autre point E.

D'après **A** : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{ME} = P_{\mathscr{C}}(M)$.

Par conséquent, $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{ME}$ et donc $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{DE} = 0$, d'où (MC) perpendiculaire à (DE) ou bien D = E. Comme les points M, C, D, E sont alignés (M est le point de concours de (AB) et (CD), la droite (MC) recoupe $\mathscr{T}$ en un autre point E), la première possibilité est exclue. On conclut D = E, c'est-à-dire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$ si, et seulement si, A, B, C et D sont cocycliques.

Applications du produit scalaire

Le programme

L'objectif est de renforcer la capacité des élèves à étudier des problèmes dont la résolution repose sur des calculs de distances et d'angles, la démonstration d'alignement, de parallélisme ou d'orthogonalité. L'outil nouveau est le produit scalaire, dont il importe que les élèves sachent choisir la forme la mieux adaptée au problème envisagé.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Produit scalaire dans le plan Vecteur normal à une droite.	• Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un point et un vecteur normal. • Déterminer un vecteur normal à une droite définie par une équation cartésienne.	
Applications du produit scalaire : – calculs d'angles et de longueurs ; – formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus.	• Déterminer une équation de cercle défini par son centre et son rayon ou par son diamètre. • Démontrer que : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.	La relation de Chasles pour les angles orientés est admise.

B Notre point de vue

Nous avons regroupé dans ce chapitre la partie du programme relative au vecteur normal à une droite (équations de droites et de cercles) et la partie relative aux applications du produit scalaire (calculs de longueurs et d'angles).
La notion de vecteur normal est introduite par l'activité « Des droites et des vecteurs » : celle-ci permet de découvrir le lien existant entre l'équation cartésienne d'une droite et les coordonnées d'un vecteur normal à cette droite. L'activité 2 « Des cercles et des équations » permet de découvrir comment obtenir l'équation d'un cercle, que celui-ci soit déterminé par son centre et son rayon ou par un diamètre. Ces notions constituent le contenu de la première page de cours.
La seconde page de cours est consacrée aux calculs de longueurs et d'angles. L'activité 3 « Plus fort que Pythagore » permet de découvrir les formules d'Al Kashi et ainsi de déterminer des longueurs et des angles dans un triangle quelconque. L'activité 4 « Une antenne relais parfois hors de portée » conduit de nouveau les élèves à déterminer des longueurs et des angles dans un triangle quelconque mais en utilisant cette fois la formule des sinus. Pour terminer, l'activité 5 « Des sinus et des cosinus » donne l'occasion d'utiliser le produit scalaire pour calculer $\cos \frac{\pi}{12}$.
À partir d'un problème de lieu de points, la page « **Chercher avec méthode** » s'attache à aider l'élève à déterminer des équations de droites et de cercles.

Le chapitre se termine par deux TP. Le premier, « Les écrans géants », utilise un logiciel de géométrie dynamique pour émettre une conjecture et trouver expérimentalement la solution à un problème ; celui-ci étant, par la suite, résolu de façon exacte grâce à l'utilisation des formules découvertes dans ce chapitre. Dans le second TP, « Les cercles d'Apollonius », l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet la visualisation d'une famille de cercles.

Les notions abordées dans le chapitre 9

1. Équations de droites et de cercles
2. Calculs de longueurs et d'angles

C Avant de commencer

Se tester avec des QCM

1 B, C et D ; **2** B, C et D ; **3** D ; **4** C et D ;
5 B et D ; **6** C et D ; **7** D ; **8** B et D ;
9 A.

Se tester avec des exercices

10 $\sin\hat{N} = \dfrac{12}{13}$; $\cos\hat{P} = \dfrac{MP}{NP} = \sin\hat{N} = \dfrac{12}{13}$;
$\sin\hat{P} = \dfrac{MN}{PN} = \cos\hat{N} = \dfrac{5}{13}$.

11 $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BI} = -BO \times BI$
$= -BO \times \dfrac{1}{2}BO = -\dfrac{1}{2}BO^2 = -\dfrac{1}{2}R^2$.
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EF} = -AD \times EF = -2R \times R = -2R^2$.
Les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et sont orthogonaux. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.

12 $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EF} = (-6) \times (-6) + 3 \times (-2) = 30$.
$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{DF} = 4 \times 0 + 0 \times (-5) = 0$.

13 Un vecteur directeur de (d_1) est $\vec{u}_1(1\,;3)$.
Un vecteur directeur de (d_2) est $\vec{u}_2\,(1\,;2)$.
Un vecteur directeur de (d_3) est $\vec{u}_3\,(4\,;1)$.
Un vecteur directeur de (d_4) est $\vec{u}_4\,(5\,;3)$.

D Activités

Activité 1 Des droites et des vecteurs

L'objectif de cette activité est de découvrir la notion de vecteur normal et le lien existant entre l'équation cartésienne d'une droite et les coordonnées d'un vecteur normal à cette droite.
Pour cela, on commence par effectuer quelques calculs dans des cas particuliers et par faire quelques constatations sur les résultats obtenus.
En utilisant un logiciel de géométrie, on peut observer que ces constats semblent rester valables quelles que soient les valeurs numériques choisies. Cela permet de conjecturer certaines propriétés qui seront reprises dans le cours.
Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 09S_activite1.ggb (Geogebra).

1. a. On a $3\times0+2\times2-4=0$ et $3\times2+2\times(-1)-4=0$.
Les coordonnées des points A et B vérifient l'équation de (d_1), donc A et B sont deux points de la droite (d_1).

b. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(2\,;-3)$.
Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 2\times3+(-3)\times2=0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont donc orthogonaux.
Comme A et B, sont deux points de (d_1), $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (d_1). Ainsi, (d_1) est perpendiculaire à la direction du vecteur $\vec{n}$.

c. D'après les résultats de la question précédente, $\vec{n}(3\,;2)$ est un vecteur directeur de la droite cherchée.
Ainsi, un point $M(x\,;y)$ appartient à cette droite si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, avec $\overrightarrow{OM}(x\,;y)$. Ceci équivaut à $x\times2-y\times3=0$. L'équation de la droite est donc $2x-3y=0$.

2. a. Le vecteur $\overrightarrow{CD}(4\,;2)$ est un vecteur directeur de (d_2). Un point $M(x\,;y)$ appartient à (d_2) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, avec $\overrightarrow{CM}(x-1\,;y-2)$.
Ceci équivaut à $(x-1)\times2-(y-2)\times4=0$, soit $2x-2-4y+8=0$.

(d_2) a donc pour équation $2x - 4y + 6 = 0$ ou $-2x + 4y - 6 = 0$.

b. $\overrightarrow{CD} \cdot \vec{v} = 4 \times (-2) + 2 \times 4 = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Ainsi, le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur normal à la droite (d_2).

3. $\vec{u}(-(-3) ; 1)$, c'est-à-dire $\vec{u}(3 ; 1)$ est un vecteur directeur de (d_3). Comme vecteur normal à (d_3), on peut donc proposer $\vec{w}(1 ; -3)$. En effet, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 \times 1 + 1 \times (-3) = 0$.

4. On peut observer que, si $ax + by = c$ est l'équation cartésienne de la droite (d), les coordonnées de $\vec{n}$ sont toujours $\vec{n}(a ; b)$.

Activité 2 Des cercles et des équations

L'objectif de cette activité est de guider les élèves dans la découverte de deux « savoir-faire » :

– comment obtenir l'équation cartésienne d'un cercle quand on connaît son centre et son rayon ou quand on connaît un diamètre (défini grâce à deux points) ;

– comment déterminer le centre et le rayon d'un cercle dont on a déterminé une équation.

Les méthodes utilisées dans cette activité seront généralisées dans la partie cours.

1. a. L'ensemble cherché est l'ensemble des points situé à une distance 5 du point I, c'est donc le cercle de centre I et de rayon 5.

b. $IM = 5$ équivaut à $\sqrt{(x_M - x_I)^2 + (y_M - y_I)^2} = 5$ soit à $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 5$.

Ainsi $M(x ; y)$ appartient à $\mathscr{C}_1$ si, et seulement si, $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

c. En développant $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$, on obtient $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

d. Il suffit de vérifier, pour chaque point, si ses coordonnées vérifient une équation du cercle.

Pour N : $(-2-2)^2 + (2+1)^2 = (-4)^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, N appartient à $\mathscr{C}_1$.

Pour O : $(0-2)^2 + (0+1)^2 = (-2)^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$, O n'appartient pas à $\mathscr{C}_1$.

Pour P : $(5{,}5 - 2)^2 + (2{,}5 + 1)^2 = 3{,}5^2 + 3{,}5^2$
$= 12{,}25 + 12{,}25 = 24{,}5$,

P n'appartient pas à $\mathscr{C}_1$.

2. Un point $M(x ; y)$ appartient à $\mathscr{C}_2$ si, et seulement si, $IM = 4$, ce qui équivaut à $\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} = 4$ soit $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 16$.

$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 16$ est une équation de $\mathscr{C}_2$.

3. a. Un point M appartient à $\mathscr{C}_3$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si, et seulement si, le triangle AMB est rectangle en M, donc si, et seulement si, le point M appartient au cercle de diamètre [AB]. Ainsi, l'ensemble cherché est le cercle de diamètre [AB].

b. Soit $M(x ; y)$. On a $\overrightarrow{MA}(-4-x ; 4-y)$ et $\overrightarrow{MB}(2-x ; 2-y)$. M appartient à $\mathscr{C}_3$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, ce qui équivaut à $(-4-x)(2-x) + (4-y)(2-y) = 0$.

On obtient $-8 + 4x - 2x + x^2 + 8 - 4y - 2y + y^2 = 0$, soit $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$.

c. En utilisant la forme canonique, on peut écrire $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ et $y^2 - 6y = (y-3)^2 - 9$.

Alors l'équation $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$ devient $(x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 = 0$.

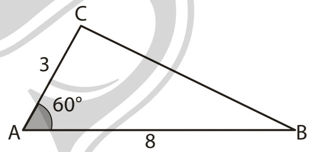
Soit $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 10$ ou encore $(x-(-1))^2 + (y-3)^2 = \sqrt{10}^2$.

d. L'équation obtenue correspond au cercle de centre $C(-1 ; 3)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

Activité 3 Plus fort que Pythagore

Dans cette activité, en calculant un même produit scalaire par deux méthodes différentes, on découvre le théorème d'Al Kashi.

1. Voir figure ci-dessous.



2. $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA})^2 = \overrightarrow{BC}^2 = BC^2$.

$(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ d'où l'égalité.

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$, on en déduit que $BC^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \cos 60°$, soit $BC^2 = 64 + 9 - 48 \times \frac{1}{2}$, d'où $BC^2 = 49$. Ainsi, $BC = 7$.

3. a. Correctif : il faut calculer $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})^2$ et pas $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$.

$(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})^2 = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 = AC^2$.

$(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = BC^2 + BA^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$,

d'où l'égalité $AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$.

Comme $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = BC \times BA \times \cos \widehat{ABC}$, on en déduit que $3^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \times 7 \times 8 \times \cos \widehat{ABC}$, soit $112 \cos \widehat{ABC} = 49 + 64 - 9$, d'où $\cos \widehat{ABC} = \frac{104}{112}$.

Ainsi, $\cos \widehat{ABC} = \frac{13}{14}$.

b. Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{ABC} \approx 21{,}8°$.

Activité 4 Une antenne relais parfois hors de portée

L'objectif de cette activité est de découvrir la formule des sinus. Pour cela, on commence par effectuer des calculs dans des cas particuliers et par faire des constatations sur les résultats obtenus. Puis, à l'aide d'un logiciel de

géométrie, on peut observer que ces constats semblent rester valables quelles que soient les valeurs numériques choisies. Cela permet de conjecturer la formule.

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 09S_activite4.ggb (Geogebra).

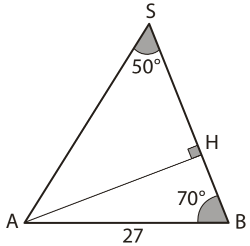
1. $\widehat{ASB} = 180 - 70 - 60$, soit $\widehat{ASB} = 50°$.

2. a. Dans le triangle AHB rectangle en H, on a $\sin \widehat{ABH} = \dfrac{AH}{AB}$.

D'où $AH = AB \sin \widehat{ABH}$, soit $AH = AB \sin 70°$.

Dans le triangle AHS rectangle en H, on a $\sin \widehat{ASH} = \dfrac{AH}{AS}$.

D'où $AH = AS \sin \widehat{ASH}$, soit $AH = AS \sin 50°$.



b. Correctif : il faut calculer AS à 0,1 km près.

$AS \sin 50° = AB \sin 70°$, soit $AS = \dfrac{27 \sin 70°}{\sin 50°} \approx 33{,}1$ km.

3. a. Correctif : il faut montrer que

$BK = BA \sin 60° = BS \sin 50°$

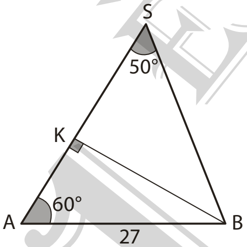
(et non pas $BK = BA \sin 60° = BC \sin 50°$).

Dans le triangle AKB rectangle en K, on a $\sin \widehat{BAK} = \dfrac{BK}{BA}$.

D'où $BK = BA \sin \widehat{BAK}$, soit $BK = BA \sin 60°$.

Dans le triangle BKS rectangle en K, on a $\sin \widehat{BSK} = \dfrac{BK}{BS}$.

D'où $BK = BS \sin \widehat{BSK}$, soit $BK = BS \sin 50°$.



b. Correctif : il faut calculer BS à 0,1 km près.

D'après la question **3. a.**, on a : $BS \sin 50° = BA \sin 60°$,

soit $BS = \dfrac{27 \sin 60°}{\sin 50°} \approx 30{,}5$ km.

4. Les deux villes étant distantes de plus de 30 km de l'antenne relais, on ne pourra pas capter le signal.

5. $AS \sin 50° = AB \sin 70°$ équivaut à $\dfrac{AB}{\sin 50°} = \dfrac{AS}{\sin 70°}$.

$BS \sin 50° = BA \sin 60°$ équivaut à $\dfrac{AB}{\sin 50°} = \dfrac{BS}{\sin 60°}$.

D'où $\dfrac{AB}{\sin 50°} = \dfrac{AS}{\sin 70°} = \dfrac{BS}{\sin 60°}$.

6. En manipulant les points A, B et C, on peut observer que l'on a toujours l'égalité des rapports $\dfrac{AB}{\sin \hat{C}} = \dfrac{AC}{\sin \hat{B}} = \dfrac{BC}{\sin \hat{A}}$.

Activité 5 Des sinus et des cosinus

Cette courte activité permet, en calculant un même produit scalaire par deux méthodes différentes, de déterminer la valeur exacte de $\cos \dfrac{\pi}{12}$. La méthode utilisée sera généralisée dans la partie cours.

1. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}$

$$= 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{12}.$$

2. Les coordonnées de A sont $A\left(\cos \dfrac{\pi}{4} \ ; \ \sin \dfrac{\pi}{4}\right)$, celles de B sont $B\left(\cos \dfrac{\pi}{3} \ ; \ \sin \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Les coordonnées des points A et B sont aussi les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos \dfrac{\pi}{3} \cos \dfrac{\pi}{4} + \sin \dfrac{\pi}{3} \sin \dfrac{\pi}{4}$.

3.
$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 a. L'équation de (d) est de la forme $4x + 2y + c = 0$. La droite passant par A(1 ; 3), on a $4 \times 1 + 2 \times 3 + c = 0$, d'où $c = -10$. L'équation s'écrit $4x + 2y - 10 = 0$ ou $2x + y - 5 = 0$.

b. L'équation de (d) est de la forme $x - 2y + c = 0$. La droite passant par A(– 4 ; 5), on a $1 \times (-4) - 2 \times 5 + c = 0$, d'où $c = 14$. L'équation s'écrit $x - 2y + 14 = 0$.

c. L'équation de (d) est de la forme $-2x + y + c = 0$. La droite passant par A(1 ; 0), on a $-2 \times 1 + 1 \times 0 + c = 0$, d'où $c = 2$. L'équation s'écrit $-2x + y + 2 = 0$.

d. L'équation de (d) est de la forme $3x + y + c = 0$. La droite passant par A(4 ; –2), on a $3 \times 4 + 1 \times (-2) + c = 0$, d'où $c = -10$. L'équation s'écrit $3x + y - 10 = 0$.

2 **a.** L'équation de (d) est de la forme $0x + 2y + c = 0$. La droite passant par A(2 ; 5), on a $0 \times 2 + 2 \times 5 + c = 0$, d'où $c = -10$. L'équation s'écrit $2y - 10 = 0$ ou $y - 5 = 0$, soit $y = 5$.
b. L'équation de (d) est de la forme $-3x + 0y + c = 0$. La droite passant par A(1 ; –2), on a $-3 \times 1 + 0 \times (-2) + c = 0$, d'où $c = 3$. L'équation s'écrit $-3x + 3 = 0$ ou $x - 1 = 0$, soit $x = 1$.
c. L'équation de (d) est de la forme $1x + \frac{3}{4}y + c = 0$.
La droite passant par $A\left(\frac{5}{2}\,;-6\right)$, on a :
$$1 \times \frac{5}{2} + \frac{3}{4} \times (-6) + c = 0, \text{ d'où } c = 2.$$
L'équation s'écrit $x + \frac{3}{4}y + 2 = 0$ ou $4x + 3y + 8 = 0$.
d. L'équation de (d) est de la forme $1x + \sqrt{2}y + c = 0$. La droite passant par $A(\sqrt{2}\,;1)$, on a $1 \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 1 + c = 0$, d'où $c = -2\sqrt{2}$.
L'équation s'écrit $x + \sqrt{2}y - 2\sqrt{2} = 0$ ou $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$.

3 Le vecteur $\overrightarrow{AB}(6\,;-3)$ est un vecteur normal à la droite cherchée, son équation est donc de la forme $6x - 3y + c = 0$. La droite passant par C(1 ; 3), on a $6 \times 1 - 3 \times 3 + c = 0$, d'où $c = 3$.
L'équation s'écrit $6x - 3y + 3 = 0$ ou $2x - y + 1 = 0$, soit $y = 2x + 1$.

4 **a.** $\vec{n}(2\,;3)$. **b.** $\vec{n}(3\,;-2)$. **c.** $\vec{n}(-4\,;5)$. **d.** $\vec{n}(-7\,;-2)$.

5 **a.** $\vec{n}(1\,;3)$. **b.** $\vec{n}(-2\,;1)$. **c.** $\vec{n}(1\,;0)$. **d.** $\vec{n}(0\,;-3)$.

6 **a.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ ou $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.
b. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$ ou $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$.
c. $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$ ou $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$.

7 On considère l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation (E) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.
a. On a $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$.
b. On a $y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$.
c. Les égalités suivantes sont équivalentes :
$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$
$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 - 4 = 0$
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$.
d. On obtient l'équation du cercle de centre C(1 ; 2) et de rayon $R = 3$.

8 On considère l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation (E) : $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 24 = 0$.
a. On a $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$.
b. On a $y^2 - 10y = (y-5)^2 - 25$.
c. Les égalités suivantes sont équivalentes :
$x^2 + y^2 + 6x - 10y - 24 = 0$
$(x+3)^2 - 9 + (y-5)^2 - 25 - 24 = 0$
$(x+3)^2 + (y-5)^2 = \sqrt{58}^2$.
d. On obtient l'équation du cercle de centre C(–3 ; 5) et de rayon $R = \sqrt{58}$.

9 **a.** On a $\overrightarrow{MA}(1-x\,;-1-y)$ et $\overrightarrow{MB}(4-x\,;3-y)$.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= (1-x)(4-x) + (-1-y)(3-y)\\ &= 4 - x - 4x + x^2 - 3 + y - 3y + y^2\\ &= x^2 + y^2 - 5x - 2y + 1.\end{aligned}$$
b. Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$. Son équation est de la forme $x^2 + y^2 - 5x - 2y + 1 = 0$.

10 D'après la formule d'Al Kashi, on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\hat{A}$, soit :
$BC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos\frac{\pi}{3} = 4 + 9 \times 12 \times \frac{1}{2}$.
On obtient $BC = \sqrt{7}$.

11 On a $DF^2 = DE^2 + EF^2 - 2DE \times EF \times \cos\hat{E}$, soit :
$$\begin{aligned}DF^2 &= 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos 65°\\ &= 9 + 25 - 30 \times \cos 65° \approx 21{,}32.\end{aligned}$$
On obtient $DF \approx 4{,}6$.

12 On a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\hat{A}$, soit :
$\sqrt{5}^2 = 3^2 + \sqrt{2}^2 - 2 \times 3 \times \sqrt{2} \times \cos\hat{A}$,
d'où $5 = 9 + 2 - 6\sqrt{2}\cos\hat{A}$.
On obtient $\cos\hat{A} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où $\hat{A} = 45°$.

13 On a $JK^2 = IJ^2 + IK^2 - 2IJ \times IK \times \cos\hat{I}$, soit :
$3{,}8^2 = 3^2 + 4{,}5^2 - 2 \times 3 \times 4{,}5 \times \cos\hat{I}$,
d'où $14{,}44 = 9 + 20{,}25 - 27\cos\hat{I}$.
On obtient $\cos\hat{I} = \frac{14{,}81}{27}$, d'où $\hat{I} \approx 56{,}7°$.

14 On a $\hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B}$, soit $\hat{C} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$.
• D'après la formule des sinus, on a $\frac{AC}{\sin\hat{B}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}}$, d'où
$$AC = \frac{4\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{12}}.$$
Pour simplifier l'expression obtenue, il faut la valeur exacte de $\sin\frac{5\pi}{12}$.
On peut soit donner cette formule aux élèves soit utiliser un logiciel de calcul formel, soit effectuer le calcul avec les formules d'addition.
$$AC = \frac{4\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}.$$
En simplifiant, on obtient $AC = 4\sqrt{3} - 4$.
• $\frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}}$, c'est-à-dire $BC = \frac{4\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{5\pi}{12}}$.
$$BC = \frac{4\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}.$$
En simplifiant, on obtient $BC = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$.

15 **a.** On a $\dfrac{MP}{\sin\hat{N}} = \dfrac{NP}{\sin\hat{M}}$, soit $\dfrac{MP}{\sin 33°} = \dfrac{4{,}8}{\sin 70°}$.

On obtient $MP = \sin 33°.\ \dfrac{4{,}8}{\sin 70°} \approx 2{,}8$.

b. On a $\hat{P} = 180 - \hat{M} - \hat{N}$, soit $\hat{P} = 77°$.

$\dfrac{MN}{\sin\hat{P}} = \dfrac{NP}{\sin\hat{M}}$, soit $\dfrac{MN}{\sin 77°} = \dfrac{4{,}8}{\sin 70°}$.

On obtient $MN = \sin 77°.\ \dfrac{4{,}8}{\sin 70°} \approx 5{,}0$.

16 Comme $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{12} - \dfrac{3\pi}{12} = \dfrac{\pi}{12}$, on a :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

De même, on a :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

17 D'après les formules d'addition :

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, soit $\cos(a + b)$
$$= \frac{8}{17} \times \frac{3}{5} - \frac{15}{17} \times \frac{4}{5} = -\frac{36}{85}.$$
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, soit $\cos(a - b)$
$$= \frac{8}{17} \times \frac{3}{5} + \frac{15}{17} \times \frac{4}{5} = \frac{84}{85}.$$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$,
$$= \frac{15}{17} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{8}{17} = \frac{77}{85}.$$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
$$= \frac{15}{17} \times \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{8}{17} = \frac{13}{85}.$$

18 D'après les formules de duplication, on peut écrire :

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$, soit $\cos(2a) = 2 \times \dfrac{4}{9} - 1 = -\dfrac{1}{9}$;

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, soit $\sin(2a) = 2 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$.

POUR S'ENTRAÎNER

19 L'équation de (d) est de la forme $2x - 1y + c = 0$.

La droite passant par $A\left(-5\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$,

on a $2 \times (-5) - 1 \times \dfrac{1}{2} + c = 0$, d'où $c = \dfrac{21}{2}$.

L'équation s'écrit $2x - y + \dfrac{21}{2} = 0$, soit $y = 2x + \dfrac{21}{2}$.

20 Le vecteur $\vec{n}(3\ ;5)$ est un vecteur directeur de la droite (d), c'est donc un vecteur normal à la droite Δ.

Ainsi, un point $M(x\,;y)$ appartient à Δ si, et seulement si, $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = 0$, avec $\overrightarrow{PM}(x - 2\,; y + 1)$.

Ceci équivaut à $(x - 2) \times 3 + (y + 1) \times 5 = 0$. L'équation de la droite Δ est donc $3x + 5y - 1 = 0$.

21 **1.** Nommons (h) la hauteur issue de B.

(AC) et (h) sont perpendiculaires, ainsi $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (h).

On a $\overrightarrow{AC}(3\,;6)$, donc une équation de (h) est de la forme $3x + 6y + c = 0$.

(h) passe par B, donc $3 \times 4 + 6 \times 0 + c = 0$. On trouve $c = -12$.

Une équation de la hauteur (h) est $3x + 6y - 12 = 0$ ou $x + 2y - 4 = 0$.

2. Nommons (d) la médiatrice du segment [AB].

(AB) et (d) sont perpendiculaires, ainsi $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à (d).

On a $\overrightarrow{AB}(6\,;2)$, donc une équation de (d) est de la forme $6x + 2y + c = 0$.

(d) passe par $I(1\,;-1)$ milieu de [AB],

donc $6 \times 1 + 2 \times (-1) + c = 0$. On trouve $c = -4$.

Une équation de la médiatrice (d) est donc :

$6x + 2y - 4 = 0$ ou $3x + y - 2 = 0$.

22 **a.** L'équation de (d) est de la forme $-5x + 3y + c = 0$.

La droite passant par $A(0\,;0)$, on a $-5 \times 0 + 3 \times 0 + c = 0$, d'où $c = 0$.

L'équation s'écrit $-5x + 3y = 0$, soit $y = \dfrac{5}{3}x$.

b. L'équation de (d) est de la forme $0x - 1y + c = 0$.

La droite passant par $A(0\,;0)$, on a $0 \times 0 - 1 \times 0 + c = 0$, d'où $c = 0$. L'équation s'écrit $y = 0$.

c. L'équation de (d) est de la forme $2x - 4y + c = 0$.

La droite passant par $A\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

On a $2 \times \dfrac{3}{2} - 4 \times \dfrac{1}{2} + c = 0$, d'où $c = -1$.

L'équation s'écrit $2x - 4y - 1 = 0$.

d. L'équation de (d) est de la forme $\sqrt{3}x + 1y + c = 0$.

La droite passant par $A(\sqrt{3}\ ;-2)$.

On a $\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 1 \times (-2) + c = 0$, d'où $c = -1$ et l'équation s'écrit $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ ou $y = -\sqrt{3}x + 1$.

23 **a.** Le vecteur $\vec{n}(5\ ;2)$ est un vecteur directeur de la droite (d), c'est donc un vecteur normal à la droite perpendiculaire cherchée.

Ainsi, un point $M(x\,;y)$ appartient à cette droite si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, avec $\overrightarrow{AM}(x - 1\,; y - 2)$. Ceci équivaut à $(x - 1) \times 5 + (y - 2) \times 2 = 0$. L'équation de la droite est donc $5x + 2y - 9 = 0$.

b. On obtient la droite d'équation $x - y + 1 = 0$, soit $y = x + 1$.

c. On obtient la droite d'équation $y - 2 = 0$, soit $y = 2$.

d. On obtient la droite d'équation $x - 1 = 0$, soit $x = 1$.

24 $\vec{n}(5\ ;-2)$ est un vecteur normal à (d_1). $\vec{n}_3$ est colinéaire à $\vec{n}$, c'est le vecteur normal à (d_1).

$\vec{n}(1\ ;-4)$ est un vecteur normal à (d_2). $\vec{n}_4$ est colinéaire à $\vec{n}$, c'est le vecteur normal à (d_2).

$\vec{n}(0\ ;2)$ est un vecteur normal à (d_3). $\vec{n}_1$ est colinéaire à $\vec{n}$, c'est le vecteur normal à (d_3).

25 **a.** $\vec{n}(2\,;0)$. **b.** $\vec{n}(0\,;1)$. c. $\vec{n}(-2\,;1)$. **d.** $\vec{n}(1\,;2)$.

26 **a.** Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}(5\,;3)$, un vecteur normal $\vec{n}(3\,;-5)$.

Un vecteur directeur de (d′) est $\vec{u}'\left(-\dfrac{6}{5}\,;\,2\right)$, un vecteur normal $\vec{n}'\left(2\,;\,\dfrac{6}{5}\right)$.

2. $\vec{u}\cdot\vec{u}'=5\times\left(-\dfrac{6}{5}\right)+3\times2$, soit $\vec{u}\cdot\vec{u}'=0$. Les vecteurs et $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux, donc les droites (d) et (d′) sont perpendiculaires.

28 **1.** Soit (d_1) la perpendiculaire en A à la droite (AB). Comme les droites (AB) et (d_1) sont perpendiculaires, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à (d_1).
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ étant $(-3\,;-8)$, une équation de (d_1) est de la forme $-3x-8y+c=0$.
(d_1) passe par A, donc $-3\times2-8\times5+c=0$, soit $c=46$.
Ainsi, une équation de (d_1) est $-3x-8y+46=0$ ou $3x+8y-46=0$.
2. Soit (d_2) la perpendiculaire en O à la droite (AB). Les droites (AB) et (d_2) sont perpendiculaires, donc une équation de (d_2) est de la forme : $-3x-8y+c=0$.
(d_1) passe par O, donc $-3\times0-8\times0+c=0$, soit $c=0$.
Une équation de (d_2) est ainsi $-3x-8y=0$ ou $3x+8y=0$.
3. Soit (d_3) la médiatrice du segment [AB].
Les droites (AB) et (d_3) étant perpendiculaires, une équation de (d_3) est de la forme $-3x-8y+c=0$.
(d_3) passe par le milieu I du segment [AB] de coordonnées I(0,5 ; 1).
On obtient l'égalité $-3\times0{,}5-8\times1+c=0$, soit $c=9{,}5$.
Ainsi une équation de (d_3) est $-3x-8y+9{,}5=0$ ou $3x+8y-9{,}5=0$.

29 Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d), pour tout point M de (d), on a $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.
Pour B, on a $\overrightarrow{AB}(-1\,;-0{,}4)$.
Alors, $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=-1\times(-2)+(-0{,}4)\times5=0$.
B appartient à (d).
Pour C, on a $\overrightarrow{AC}(3\,;-2)$.
Alors, $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=3\times(-2)+(-2)\times5\neq0$.
C n'appartient pas à (d).

30 **1.** L'ensemble cherché est la droite perpendiculaire à (AC) passant par B.
2. Soit M$(x\,;y)$ un point tel que $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, avec $\overrightarrow{BM}(x-1\,;y-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-6\,;3)$.
Ceci équivaut à $(x-1)\times(-6)+(y-2)\times3=0$. L'équation de la droite est donc $-6x+3y=0$, soit $2x-y=0$, que l'on peut aussi écrire $y=2x$.

31 **1.** Soit (h_D) la hauteur issue de D. Comme les droites (EF) et (h_D) sont perpendiculaires, $\overrightarrow{EF}$ est un vecteur normal à (h_D).
Les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ étant $(-8\,;-8)$, une équation de (h_D) est de la forme $-8x-8y+c=0$.
(h_D) passe par D, donc $-8\times4-8\times(-6)+c=0$, soit $c=-16$.
Ainsi, une équation de (h_D) est $-8x-8y-16=0$ ou $x+y+2=0$, que l'on peut aussi écrire $y=-x-2$.
2. Soit (h_F) la hauteur issue de F. Comme les droites (DE) et (h_F) sont perpendiculaires, $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur normal à (h_F).
Les coordonnées de $\overrightarrow{DE}$ étant $(0\,;11)$, une équation de (h_F) est de la forme $0x+11y+c=0$.
(h_F) passe par F, donc $0\times(-4)+11\times(-3)+c=0$, soit $c=33$.
Ainsi, une équation de (h_F) est $11y+33=0$ ou $y+3=0$, que l'on peut aussi écrire $y=-3$.
3. L'orthocentre du triangle DEF est l'intersection des droites (h_D) et (h_F).
Ses coordonnées sont solution du système :
$\begin{cases} y=-x-2 \\ y=-3 \end{cases}$. On obtient le point H $(1\,;-3)$.

32 **1.** $\vec{n}(2\,;-1)$ est un vecteur directeur de (d), c'est donc un vecteur normal à Δ.
Une équation de Δ est de la forme $2x-1y+c=0$.
Δ passe par A, donc $2\times3-1\times3+c=0$, soit $c=-3$.
Ainsi, une équation de (d) est $2x-y-3=0$ que l'on peut aussi écrire $y=2x-3$.
2. H est l'intersection des droites (d) et Δ, ses coordonnées sont solution du système :
$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ y=2x-3 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x+2(2x-3)-4=0 \\ y=2x-3 \end{cases}$
ou $\begin{cases} 5x=10 \\ y=2x-3 \end{cases}$.
On obtient le point H $(2\,;1)$.
3. $AH=\sqrt{(2-3)^2+(1-3)^2}$, soit $AH=\sqrt{5}$.

33 **1.** L'affirmation est vraie (il suffit de s'intéresser aux directions des vecteurs).
2. La réciproque est : « Si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont des vecteurs colinéaires, alors $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont chacun un vecteur normal d'une même droite » ; cette réciproque est vraie.

34 **1. a.** Un vecteur normal à (d′) est un vecteur directeur de (d). On peut proposer $\vec{n}(-b\,;a)$.
b. Un point M$(x\,;y)$ appartient à (d′) si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, avec $\overrightarrow{AM}(x-x_A\,;y-y_A)$.
Ceci équivaut à $(x-x_A)\times(-b)+(y-y_A)\times a=0$. L'équation de la droite est donc $-bx+ay+(bx_A-ay_A)=0$.

2.

Algorithme

```
Traitement
    Saisir A
    Saisir B
    Saisir XA
    Saisir YA
    Afficher « a= »
    Afficher −B
    Afficher « b= »
    Afficher A
    Afficher « c= »
    Afficher B*XA−A*YA
Sortie
```

AlgoBox

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  XA EST_DU_TYPE NOMBRE
  YA EST_DU_TYPE NOMBRE
  AP EST_DU_TYPE NOMBRE
  BP EST_DU_TYPE NOMBRE
  CP EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  LIRE B
  LIRE XA
  LIRE YA
  AP PREND_LA_VALEUR -B
  BP PREND_LA_VALEUR A
  CP PREND_LA_VALEUR B*XA-A*YA
  AFFICHER "a'= "
  AFFICHER AP
  AFFICHER "b' = "
  AFFICHER BP
  AFFICHER "c' = "
  AFFICHER CP
FIN_ALGORITHME
```

3. *Programmation de cet algorithme :*

TEXAS	CASIO
Prompt A Prompt B Prompt X Prompt Y Disp "A' ",−B Disp "B' ",A Disp "C' ", B*X−A*Y	A":?→A "B":?→B "XA":?→X "YA":?→Y "A' ":−B◢ "B' ": A◢ "C' ": B×X−A×Y◢

Il est aussi possible de programmer cet algorithme avec Algobox.

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 09S_exercice34.alg (Algobox).

35 Vrai, les droites ont la même direction, elles sont donc parallèles.

36 Faux, les vecteurs peuvent être seulement colinéaires.

37 Faux, un vecteur directeur de $x + 3y - 1 = 0$ est $\vec{u}(-3\ ;\ 1)$ et un vecteur directeur de $3x + y + 1 = 0$ est $\vec{v}(-1\ ;\ 3)$. On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-3) \times (-1) + 3 \times 1 \neq 0$, donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux, les droites ne sont pas perpendiculaires.

38 Une équation du cercle est $(x-(-1))^2+(y-1)^2 = \sqrt{2}^2$ soit $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$. Le cercle passe par O.

39 Le rayon du cercle est $IM = \sqrt{(1+1)^2 + (1-3)^2}$, soit $IM = \sqrt{8}$, une équation du cercle est donc :
$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = \sqrt{8}^2$ soit $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$.
On a $(0 + 1)^2 + (0 - 3)^2 = 10$, les coordonnées du point O ne vérifient pas l'équation du cercle ; le cercle ne passe pas par l'origine du repère.

40 La forme canonique de $x^2 - 6x$ est $(x-3)^2 - 9$, celle de $y^2 + 2y$ est $(y + 1)^2 - 1$.
L'équation $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ peut s'écrire $(x-3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 + 5 = 0$ soit $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$.
Soit les points A(3 ; –1) et M(x ; y), l'ensemble cherché est l'ensemble des points M tels que $AM^2 = 5$, soit $AM = \sqrt{5}$. C'est donc le cercle de centre A(3 ; –1) et de rayon $\sqrt{5}$.

41 La forme canonique de $x^2 - x$ est $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, celle de $y_2 + 2y$ est $(y + 1)^2 - 1$.
L'équation $x^2 + y^2 - x + 2y + 2 = 0$ peut s'écrire :
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y + 1)^2 - 1 + 2 = 0$$
soit $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4}$. Le membre de gauche est toujours strictement positif, celui de droite strictement négatif. L'ensemble cherché est vide.

42 **1.** La forme canonique de $x^2 - 6x$ est $(x - 3)^2 - 9$, celle de $y^2 + 8y$ est $(y + 4)^2 - 16$.
L'équation $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ peut s'écrire :
$(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 = 0$, soit $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$.
C'est l'équation du cercle de centre A(3 ; –4) et de rayon 5.
2. La forme canonique de $x^2 + 5x$ est $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$, celle de $y^2 - y$ est $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.
L'équation $x^2 + y^2 + 5x - y - 1 = 0$ peut s'écrire :
$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$,
soit $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{30}{4}$. C'est l'équation du cercle de centre $A\left(-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{30}}{2}$.
3. La forme canonique de $x^2 - 5x$ est $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$.
L'équation $x^2 + y^2 - 5x + 2 = 0$ peut s'écrire :
$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + y^2 + 2 = 0$, soit $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{17}{4}$.
C'est l'équation du cercle de centre $A\left(\frac{5}{2}\ ;\ 0\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

43 **1.** L'équation $x^2 + y^2 = 0$ peut s'écrire :
$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 0^2.$$
L'ensemble cherché est réduit au point O(0 ; 0).
2. La forme canonique de $x^2 + 4x$ est $(x + 2)^2 - 4$, celle de $y^2 - 10y$ est $(y - 5)^2 - 25$.
L'équation $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$ peut s'écrire $(x + 2)^2 - 4 + (y - 5)^2 - 25 + 29 = 0$,
soit $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 0$.
L'ensemble cherché est réduit au point A(–2 ; 5).
3. La forme canonique de $x^2 - 2x$ est $(x - 1)^2 - 1$, celle de $y^2 + 6y$ est $(y + 3)^2 - 9$.
L'équation $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 12 = 0$ peut s'écrire $(x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 + 12 = 0$,
soit $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = -2$.

Le membre de gauche est toujours strictement positif, celui de droite strictement négatif.
L'ensemble cherché est vide.

44 **1.** Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M(x; y) tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$, ou encore $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$, avec $\overrightarrow{AM}(x+3\,;y-5)$ et $\overrightarrow{BM}(x-2\,;y+1)$.
On obtient l'équation $(x+3)(x-2)+(y-5)(y+1)=0$.
Soit $x^2+y^2+x-4y-11=0$.
2. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$, avec $\overrightarrow{AM}(x+7\,;y-4)$ et $\overrightarrow{BH}(x+2\,;y-4)$.
On obtient l'équation $(x+7)(x+2)+(y-4)(y-4)=0$.
Soit $x^2+y^2+9x-8y+30=0$.
3. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$, avec $\overrightarrow{AM}(x+1\,;y+6)$ et $(x-8\,;y-1)$.
On obtient l'équation $(x+1)(x-8)+(y+6)(y-1)=0$.
Soit $x^2+y^2-7x+5y-14=0$.

45 **1.** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ équivaut à :
$$\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-3)+(y+2)\left(y-\frac{5}{3}\right)=0\,.$$
Soit $x^2+y^2-\dfrac{11}{3}x+\dfrac{1}{3}y-\dfrac{4}{3}=0$.
2. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ équivaut à :
$$\left(x-\frac{7}{2}\right)(x-0)+(y+1)(y+1)=0\,.$$
Soit $x^2+y^2-\dfrac{7}{2}x+2y+1=0$.
3. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ équivaut à :
$$(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))+(y+2)(y-1)=0.$$
Soit $x^2+y^2-2x+y-3=0$.

46 Le rayon du cercle est :
$$AP=\sqrt{(8-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$
Une équation du cercle est $(x-1)^2+(y-1)^2=50$.
Pour M, on obtient $(6-1)^2+(-4-1)^2=25+25=50$.
M appartient au cercle.
Pour N, on obtient $(5-1)^2+(-5-1)^2=16+36=52$.
N n'appartient pas au cercle.

47 **1.** $\Omega M=\sqrt{(-1-2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{25}=5$.
M appartient au cercle.
2. La tangente est la perpendiculaire à (ΩM) passant par M, c'est donc l'ensemble des points T(x ; y) tels que $\overrightarrow{M\Omega}\cdot\overrightarrow{MT}=0$, avec $\overrightarrow{M\Omega}(3\,;-4)$ et $\overrightarrow{MT}(x+1\,;y-3)$.
On obtient l'équation $3(x+1)-4(y-3)=0$.
D'où $3x-4y+15=0$.

48 **1.** $\Omega M=\sqrt{(5-4)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$. M appartient au cercle.
2. La tangente est l'ensemble des points T(x; y) tels que $\overrightarrow{M\Omega}\cdot\overrightarrow{MT}=0$, avec $\overrightarrow{M\Omega}(-1\,;-2)$ et $\overrightarrow{MT}(x-5\,;y-3)$.
On obtient l'équation $(-1)(x-5)-2(y-3)=0$.
D'où $-x-2y+11=0$, soit $x+2y-11=0$.

49 **1.** Avec les coordonnées du point A, on obtient $(0-1)^2+\sqrt{3}^{\,2}=1+3=4$. L'équation est vérifiée, A appartient au cercle.
2. D'après son équation, on sait que le cercle a pour centre le point B(1 ; 0) et pour rayon 2.
La tangente au cercle en A est donc la perpendiculaire à (AB) passant par A.
Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{AB}(1\,;\sqrt{3})$ est un vecteur normal à cette tangente.
Comme $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}\times1+1\times(-\sqrt{3})$, soit $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux, $\vec{u}$ est bien un vecteur directeur de la tangente.

51 **1.** Une équation du cercle est $(x+8)^2+(y-6)^2=10^2$, soit $x^2+y^2+16x-12y=0$.
2. Un point est intersection du cercle et de l'axe des abscisses si, et seulement si, ses coordonnées sont solution du système $\begin{cases}y=0\\x^2+y^2+16x-12y=0\end{cases}$
soit $\begin{cases}y=0\\x^2+16x=0\end{cases}$ ou encore $\begin{cases}y=0\\x(x+16)=0\end{cases}$
On obtient deux points A(0 ; 0) et B(−16 ; 0).
Un point est intersection du cercle et de l'axe des ordonnées si, et seulement si, ses coordonnées sont solution du système $\begin{cases}x=0\\x^2+y^2+16x-12y=0\end{cases}$
soit $\begin{cases}x=0\\y^2-12y=0\end{cases}$ ou encore $\begin{cases}x=0\\y(y-12)=0\end{cases}$
On obtient deux points A(0 ; 0) et C(0 ; 12).
Le cercle est sécant avec les axes en trois points : A(0 ; 0), B(−16 ; 0) et C(0 ; 12).
3. • La tangente au cercle en A est la perpendiculaire à (AΩ) passant par A, c'est donc l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\overrightarrow{A\Omega}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ avec $\overrightarrow{A\Omega}(-8\,;6)$ et $\overrightarrow{AM}(x\,;y)$.
On obtient l'équation $-8x+6y=0$. Soit $4x-3y=0$.
• La tangente au cercle en B est la perpendiculaire à (BΩ) passant par B, c'est donc l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\overrightarrow{B\Omega}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ avec $\overrightarrow{B\Omega}(8\,;6)$ et $\overrightarrow{BM}(x+16\,;y)$.
On obtient l'équation $8(x+16)+6y=0$.
D'où $8x+6y+128=0$, soit $4x+3y+64=0$.
• La tangente au cercle en C est la perpendiculaire à (CΩ) passant par C.
On obtient l'équation $4x+3y-36=0$.

52 **1.** L'inéquation $x^2+y^2\leqslant1$ peut s'écrire :
$$(x-0)^2+(y-0)^2\leqslant1^2.$$
L'ensemble cherché est l'ensemble des points M tels que OM $\leqslant$ 1, c'est donc le disque de centre O et de rayon 1.
2. L'inéquation $(x-3)^2+(y-2)^2\leqslant16$ peut s'écrire $(x-3)^2+(y-2)^2\leqslant4^2$.
Si on note A le point de coordonnées A(3 ; 2), l'ensemble cherché est l'ensemble des points M tels que AM $\leqslant$ 4, c'est donc le disque de centre A et de rayon 4.

3. Les points $M(x ; y)$ qui vérifient l'inéquation $(x-3)^2+(y-2)^2 > 16$ sont tous les points qui ne sont pas solution de la question précédente. L'ensemble cherché est donc tout le plan privé du disque de centre $A(3 ; 2)$ et de rayon 4.

53 **1.** Une équation du cercle de centre $C(0 ; 3)$ et de rayon $\sqrt{34}$ est $(x-0)^2+(y-3)^2=\sqrt{34}^2$, soit $x^2+(y-3)^2=34$. En développant, on obtient $x^2+y^2-6y=25$, d'où le système.

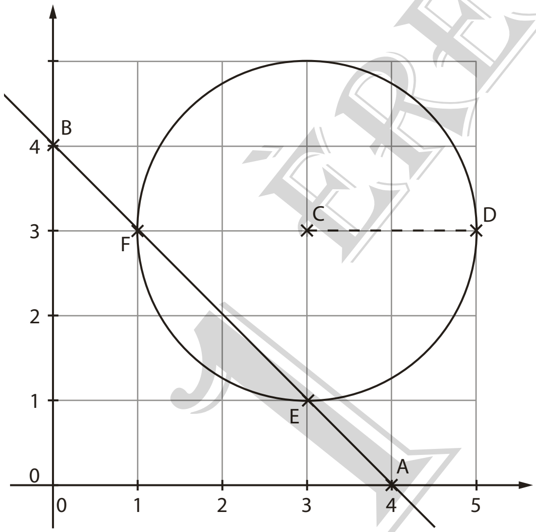
2. On a $\begin{cases} y = x+1 \\ x^2+y^2-6y=25 \end{cases}$

soit $\begin{cases} y = x+1 \\ x^2+(x+1)^2-6(x+1)=25 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} y = x+1 \\ 2x^2-4x-30=0 \end{cases}$.

La seconde équation peut s'écrire $x^2-2x-15=0$.
Son discriminant est 64 et ses solutions sont $x=-3$ et $x=5$.
Les valeurs de y correspondantes sont $y=-2$ et $y=6$.
La droite et le cercle ont deux points d'intersection $A(-3 ; -2)$ et $B(5 ; 6)$.

54 **1.** Graphiquement, on peut constater que la droite et le cercle ont deux points d'intersection : $E(3 ; 1)$ et $F(1 ; 3)$.



2. La droite (AB) a pour équation $y=-x+4$.
Le cercle de centre C et passant par D a pour rayon $CD=2$, son équation peut s'écrire $(x-3)^2+(y-3)^2=2^2$.
Soit $x^2+y^2-6x-6y+14=0$.

On obtient le système : $\begin{cases} y=-x+4 \\ x^2+y^2-6x-6y+14=0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} y=-x+4 \\ x^2+(-x+4)^2-6x-6(-x+4)+14=0 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} y=-x+4 \\ 2x^2-8x+6=0 \end{cases}$

La seconde équation peut s'écrire $x^2-4x+3=0$.
Son discriminant est 4 et ses solutions sont $x=1$ et $x=3$.
Les valeurs de y correspondantes sont $y=3$ et $y=1$.
La droite et le cercle ont deux points d'intersection $F(1 ; 3)$ et $E(3 ; 1)$.

55 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ peut s'écrire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$ avec $\overrightarrow{AM}(x-1 ; y-2)$ et $\overrightarrow{BM}(x+1 ; y-4)$.

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x-1)(x+1)+(y-2)(y-4)$
$=x^2+y^2-6y+7$.

1. $x^2+y^2-6y+7=98$, soit $x^2+(y-3)^2-9+7=98$ ou encore $x^2+(y-3)^2=10^2$.
L'ensemble cherché est le cercle de centre $C(0 ; 3)$ et de rayon 10.

2. $x^2+y^2-6y+7=-2$, soit $x^2+(y-3)^2-9+7=-2$ ou encore $x^2+(y-3)^2=0$.
L'ensemble cherché est l'ensemble des points M tels que $MC=0$, cet ensemble contient seulement le point $C(0 ; 3)$.

3. $x^2+y^2-6y+7=-18$, soit $x^2+(y-3)^2-9+7=-18$ ou encore $x^2+(y-3)^2=-16$.
Le premier membre de cette équation est positif, le second négatif. L'équation n'a pas de solution, l'ensemble cherché est l'ensemble vide.

56 Vrai : $x^2+y^2-4x+2y=0$ peut s'écrire $(x-2)^2+(y+1)^2=5$ et $x^2+y^2-4x+2y=13$ peut s'écrire $(x-2)^2+(y+1)^2=18$.
Le centre commun est $A(2 ; -1)$.

57 Vrai : $x^2+y^2-2ax+y=0$ peut s'écrire :

$(x-a)^2-a^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$,

soit $(x-a)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=a^2+\frac{1}{4}$.

C'est l'équation du cercle de centre $A\left(a ; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}$.

58 D'après la formule d'Al Kashi, on a :
$EF^2=DE^2+DF^2-2DE\times DF\times\cos\widehat{D}$
$=6^2+3^2-2\times6\times3\times\cos 45°$
$=45-36\times\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On obtient $EF=\sqrt{45-18\sqrt{2}}=3\sqrt{5-2\sqrt{2}}$, soit environ 4,42.

59 On a $NP^2=MN^2+MP^2-2MN\times MP\times\cos\widehat{M}$, soit :
$NP^2=8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos 53°$,
$=89-80\cos 53°$.
D'où $NP\approx 6{,}4$.

60 On a $\widehat{A}=\pi-\widehat{C}-\widehat{B}$, soit $\widehat{A}=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}$.

Ainsi $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$.

On a $\frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}}$, soit $BC = \frac{6\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = 6$.

61 On a $IN^2 = IG^2 + GN^2 - 2IG \times GN \times \cos\hat{G}$, soit : $\sqrt{10}^2 = 2^2 + \sqrt{2}^2 - 2\times 2\times\sqrt{2}\times\cos\hat{G}$.
On obtient $\cos\hat{G} = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $\hat{G} = \frac{3\pi}{4}$.

62 On a $\frac{RS}{\sin\hat{T}} = \frac{RT}{\sin\hat{S}}$, soit $\frac{11}{\sin 51°} = \frac{7}{\sin\hat{S}}$.

On obtient $\sin\hat{S} = \frac{7\sin 51°}{11} \approx 0,4945$. D'où $\hat{S}\approx 30°$.
On en déduit que $\hat{R} \approx 180 - 51 - 30$, soit $\hat{R}\approx 99°$.

63 On a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times\cos\hat{A}$, soit : $5^2 = 6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos\hat{A}$, d'où $25 = 52 - 48\cos\hat{A}$.
On obtient $\cos\hat{A} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$. D'où $\hat{A}\approx 56°$.
$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB\times AC\times\cos\hat{A} = 6\times4\times\frac{9}{16} = \frac{27}{2}$.

64 On a $EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE\times DF\times\cos\widehat{EDF}$, soit : $EF^2 = 8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos 74°$,
d'où $EF = \sqrt{89 - 80\cos 74°} \approx 8,2$ à 0,1 près.
On a $DF^2 = ED^2 + EF^2 - 2ED\times EF\times\cos\widehat{DEF}$, soit :
$5^2 \approx 8^2 + 8,182^2 - 2\times8\times8,182\times\cos\widehat{DEF}$,
d'où $\cos\widehat{DEF} \approx \frac{8^2+8,182^2-5^2}{2\times8\times8,182}\approx 0,809\,3$
et $\widehat{DEF}\approx 36,0°$.
Alors $\widehat{DEF} = 180 - \widehat{EDF} - \widehat{DEF} \approx 70,0°$.

65 On a $NP^2 = MN^2+MP^2-2MN\times MP\times\cos\widehat{MNP}$, soit : $NP^2 = 10^2+6^2-2\times10\times6\times\cos110°$.
D'où $NP = \sqrt{136-120\cos110°}\approx 13,3$ à 0,1 près.
On a $MP^2 = MN^2+NP^2-2MN\times NP\cos\widehat{MNP}$, soit :
$6^2\approx 10^2+13,3^2-2\times10\times13,3\times\cos\widehat{MNP}$,
d'où $\cos\widehat{MNP}\approx\frac{10^2+13,3^2-6^2}{2\times10\times13,3}\approx0,905\,6$
et $\widehat{MNP}\approx 25,1°$.
Alors $\widehat{MPN} = 180 - \widehat{NMP} - \widehat{MNP}\approx 44,9°$.

66 On a $BC^2 = AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$,
soit $BC^2 = 3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos45°$, d'où
$BC = \sqrt{34-30\cos45°} = \sqrt{34-15\sqrt{2}}\approx 3,576$
à 0,001 près.
On a $AC^2 = AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$, soit :
$5^2\approx 3^2+3,576^2-2\times3\times3,576\times\cos\widehat{ABC}$,
d'où $\cos\widehat{ABC}\approx\frac{3^2+3,576^2-5^2}{2\times3\times3,576}\approx -0,149\,7$
et $\widehat{ABC}\approx 98,6°$.
Alors $\widehat{ACB} = 180-\widehat{ABC}-\widehat{BAC}\approx 36,4°$.

68 On a $\vec{AB}(-3\,;3)$, $\vec{AC}(-5\,;-3)$, $\vec{BC}(-2\,;-6)$.
1. $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-3)^2+3^2} = 3\sqrt{2}$;
$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-5)^2+(-3)^2} = \sqrt{34}$;
$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(-2)^2+(-6)^2} = 2\sqrt{10}$.
2. $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (-3)\times(-5)+3\times(-3) = 6$;
$\vec{BC}\cdot\vec{BA} = (-2)\times3+(-6)\times(-3) = 12$;
$\vec{CA}\cdot\vec{CB} = 5\times2+3\times6 = 28$.
3. $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB\times AC\times\cos\hat{A}$,
d'où $\cos\hat{A} = \frac{6}{3\sqrt{2}\times\sqrt{34}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ et $\hat{A}\approx 76°$.
$\vec{CA}\cdot\vec{CB} = CA\times CB\times\cos\hat{C}$,
d'où $\cos\hat{C} = \frac{28}{\sqrt{34}\times2\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{85}}$ et $\hat{C}\approx 41°$.
4. $AH = AB\times\cos\hat{A}$, soit $AH = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\approx 1,03$.
$CH = CB\times\cos\hat{C}$, soit $CH = 2\sqrt{10}\times\frac{7}{\sqrt{85}} = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\approx 4,80$.

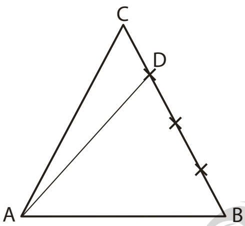
69 On a $\vec{AB}(-8\,;6)$, $\vec{AC}(8\,;-3)$, $\vec{BC}(16\,;-9)$.
1. $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-3)^2+3^2} = 10$; $\|\vec{AC}\| = \sqrt{8^2+(-3)^2} = \sqrt{73}$.
$\|\vec{BC}\| = \sqrt{16^2+(-9)^2} = \sqrt{337}$.
2. $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -82$; $\vec{BC}\cdot\vec{BA} = 182$; $\vec{CA}\cdot\vec{CB} = 155$.
3. $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB\times AC\times\cos\hat{A}$, d'où $\cos\hat{A}\approx -0,960$ et $\hat{A}\approx 164°$.
$\vec{CA}\cdot\vec{CB} = CA\times CB\times\cos\hat{C}$, d'où $\cos\hat{C}\approx 0,988$ et $\hat{C}\approx 9°$.
4. $AH = AB\times\cos\hat{A}$, soit $AH\approx 9,59$.
$CH = CB\times\cos\hat{C}$, soit $CH\approx 18,14$.

70 **1.** Dans ABH rectangle en H, $BH = AB\times\sin\hat{A}$, d'où $S = \frac{1}{2} AC\times BH$, soit $S = \frac{1}{2} AC\times AB\times\sin\hat{A}$.
2. Dans ABH rectangle en H, $BH = AB\times\sin\widehat{HAB}$ comme les angles $\widehat{HAB}$ et $\widehat{BAC}$ sont supplémentaires, on a $\sin\widehat{HAB} = \sin\widehat{BAC}$. Ainsi, $BH = AB\times\sin\widehat{HAB}$, soit $BH = AB\times\sin\hat{A}$.
On obtient $S=\frac{1}{2} AC\times BH$, soit $S = \frac{1}{2} AC\times AB\times\sin\hat{A}$.
3. Les autres égalités s'obtiennent par permutation circulaire des points A, B et C.

71 **1.** • Dans ABE, on a :
$$AE^2 = AB^2+BE^2-2AB\times BE\times\cos\widehat{ABE},$$ soit :
$\cos\widehat{ABE}\approx\frac{499,4^2+350^2-347,4^2}{2\times499,4\times350}\approx0,718\,6$
et $\widehat{ABE}\approx 44,06°$.
• Dans CBE, on a $CE^2 = CB^2+BE^2-2CB\times BE\times\cos\widehat{CBE}$, soit :
$\cos\widehat{CBE}\approx\frac{499,4^2+225,2^2-445,8^2}{2\times499,4\times225,2}\approx 0,450\,7$
et $\widehat{CBE}\approx 63,21°$.
• Ainsi $\widehat{ABC}\approx 44,06°+63,21°\approx107,27°$.
• Dans ABC, on a :
$$AC^2 = AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\widehat{ABC},$$
soit $AC^2\approx 350^2+225,2^2-2\times350\times225,2\times\cos107,27°$,
soit $AC^2\approx 22\,014$. Ainsi, $BC\approx469,1$.
2. D'après la formule de l'exercice 70 :
l'aire du triangle ABE est :

$S_1 = \frac{1}{2} BA \times BE \times \sin \widehat{ABE}$
$\approx \frac{1}{2} \times 350 \times 499{,}4 \times \sin 44{,}06° \approx 60\,775{,}5.$
L'aire du triangle CBE est :
$S_2 = \frac{1}{2} CB \times CE \times \sin \widehat{CBE}$
$\approx \frac{1}{2} \times 225{,}2 \times 499{,}4 \times \sin 63{,}21° \approx 50\,196{,}7.$
L'aire du terrain est $S = S_1 + S_2 \approx 60\,775{,}5 + 50\,196{,}7$, soit $S \approx 110\,972$ m^2.
Le propriétaire a dû faire une erreur d'unité en relevant la surface sur le cadastre : la surface est environ 111 000 m^2, soit 1 110 ares.

72 Dans le triangle ACD, on a :
$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \times CD \times \cos \widehat{ACD}$
$= a^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2 - 2 \times a \times \frac{1}{4} a \times \cos\frac{\pi}{3}$
$= \frac{17}{16}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{13}{16}a^2$.
D'où $AD = \frac{\sqrt{13}}{4}a$.



74 Dans le triangle ABC, on a $\hat{B} = 105°$.
$\frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}}$, soit $BC = \frac{800 \sin 33°}{\sin 105°}$.
Ainsi $BC \approx 451$ m.
Dans le triangle BCH rectangle en H, on a $BH = BC \times \sin 42°$, soit $BH \approx 302$ m.
La bouée est à distance réglementaire.

75 **1.** Dans le triangle ABC, on a $\widehat{ABC} = 180 - 45$, soit $\widehat{ABC} = 135°$. On en déduit que $\widehat{ACB} = 15°$.
$\frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}}$, soit $BC = \frac{\sin 30°}{\sin 15°}$. Ainsi $BC \approx 1{,}932$ km.
Remarque : En utilisant la valeur exacte de $\sin 15° = \sin\frac{\pi}{12}$ (voir exercice 16 p. 224), on obtient $BC = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.
2. Dans le triangle BCH rectangle en H, on a :
$CH = BC \sin 45° = \frac{\sin 30°}{\sin 15°} \times \sin 45°$
$CH \approx 1{,}366$ km.
Remarque : En utilisant la valeur exacte de $\sin 15° = \sin\frac{\pi}{12}$ (voir exercice 16 p 224), on obtient $CH = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

76 • Dans le triangle ABS, on a $\widehat{ABS} = 180° - 49°$, soit $\widehat{ABS} = 131°$. On en déduit que $\widehat{ASB} = 19°$.
$\frac{BS}{\sin\hat{A}} = \frac{AB}{\sin\hat{S}}$ soit $BS = \frac{100 \times \sin 30°}{\sin 19°}$.
Ainsi $BS \approx 153{,}58$ m.
• Dans le triangle BSH rectangle en H, on a :
$SH = BS \sin 49°$, soit $SH = \frac{100 \times \sin 30°}{\sin 19°} \times \sin 49°$.
Ainsi $SH \approx 116$ m.

77 I milieu de [AB], donc $AI = \frac{1}{2}AB$, soit $AI = 2a$. Ainsi, le triangle AID est isocèle rectangle.
On en déduit que $AD = \sqrt{2} \times AI$, soit $AD = 2\sqrt{2}\,a$, et que $\widehat{DAI} = \frac{\pi}{4}$.
Alors $\widehat{DAC} = \widehat{DAI} + \widehat{IAC} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$.
Dans le triangle ACD, on a :
$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \times AD \times \cos\widehat{DAC}$, soit
$CD^2 = (3a)^2 + \left(2\sqrt{2}a\right)^2 - 2 \times 3a \times 2\sqrt{2}a \times \cos\frac{3\pi}{4}$
$= 9a^2 + 8a^2 - 12\sqrt{2}a^2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 29a^2.$
D'où $CD = \sqrt{29}a$.

78 Dans le triangle rectangle ABD, on a $BD^2 = AB^2 + AD^2$, soit $BD^2 = a^2 + (3a)^2$, d'où $BD = \sqrt{10}a$.
Dans le triangle rectangle ACD, on a $CD^2 = AC^2 + AD^2$, soit $CD^2 = (3a)^2 + (3a)^2$, d'où $CD = 3\sqrt{2}$.
Dans le triangle BCD, on a :
$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \times CD \times \cos\widehat{BDC}$,
soit $(2a)^2 = \left(\sqrt{10}a\right)^2 + \left(3\sqrt{2}a\right)^2 - 2\sqrt{10}a \times 3\sqrt{2}a \times \cos\theta$,
d'où $4a^2 = 10a^2 + 18a^2 - 12\,a^2 \times \cos\theta$.
Ainsi, $\cos\theta = \frac{24a^2}{12\sqrt{5}a^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
On a $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, donc $\sin^2\theta = 1 - \frac{4}{5}$.
θ étant un angle aigu, $\sin\theta > 0$.
On obtient $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ soit $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

79 1. Par construction, on a $\widehat{CBK} = \frac{\pi}{4}$.
Ainsi $\widehat{BKC} = \pi - \theta - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \theta$.
2. On a $\frac{BK}{\sin\hat{C}} = \frac{BC}{\sin\hat{K}}$, soit $BK = \frac{a \times \sin\theta}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)}$.
3. Par construction, on a $\widehat{CDE} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{DCF} = \frac{\pi}{2} - \theta$.
Ainsi $\widehat{CFD} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \theta$.
On a $\frac{DF}{\sin\hat{C}} = \frac{DC}{\sin\hat{F}}$, soit $DF = \frac{x \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}$.
4. On a $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
et $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$.

Donc $DF = \dfrac{x \times \cos\theta}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{4} - \theta\right)}$.

Dans ces conditions, $\dfrac{BK}{DF} = \dfrac{a \times \sin\theta}{x \times \cos\theta}$

soit $\dfrac{BK}{DF} = \dfrac{a}{x} \times \tan\theta$.

Notons H le point d'intersection des droites (AE) et (CK).

Dans le triangle CEA, on a $\widehat{CEA} + \widehat{CAE} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$ et dans le triangle CEH, on a $\widehat{CEH} + \theta + \dfrac{\pi}{2} = \pi$.

Comme $\widehat{CEA} = \widehat{CEH}$, on en déduit que $\widehat{CAE} = \theta$.

Dans le triangle rectangle ACE, on a $\tan\theta = \dfrac{CE}{CA}$ soit $\tan\theta = \dfrac{x}{a}$. Alors, $\dfrac{BK}{DF} = \dfrac{a}{x} \times \dfrac{x}{a}$ d'où $\dfrac{BK}{DF} = 1$.

On obtient $BK = DF$.

Il est d'autre part facile de montrer que DFKL est un parallélogramme, on a donc $DF = KL$.

Finalement, on a bien $KL = KB$.

80 Vrai. Les réels a, b et c sont non nuls, sinon deux des points parmi A, B et C sont confondus, alors ABC n'est pas un triangle.

Dans ces conditions, la relation $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$

peut aussi s'écrire $\dfrac{\sin\hat{A}}{a} = \dfrac{\sin\hat{B}}{b} = \dfrac{\sin\hat{C}}{c}$.

Ce qui équivaut à $\dfrac{abc\sin\hat{A}}{a} = \dfrac{abc\sin\hat{B}}{b} = \dfrac{abc\sin\hat{C}}{c}$,

on obtient l'égalité cherchée :

$$bc\sin\hat{A} = ac\sin\hat{B} = ab\sin\hat{C}.$$

81 Faux. Les réels a, b et c sont non nuls, sinon deux des points parmi A, B et C sont confondus, alors ABC n'est pas un triangle.

Dans ces conditions, la relation $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$ peut aussi s'écrire $\cos\hat{C} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ et non pas $\cos\hat{C} = \dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$.

82 $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{12} + \dfrac{3\pi}{12} = \dfrac{7\pi}{12}$, on a :

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

De même, on a :

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

83 **1.** $\cos\dfrac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

De même, $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. • On a $\cos\dfrac{3\pi}{4} = \cos\left(2 \times \dfrac{3\pi}{8}\right) = 2\cos^2\dfrac{3\pi}{8} - 1$.

D'où $2\cos^2\dfrac{3\pi}{8} = 1 + \cos\dfrac{3\pi}{4} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$,

soit $\cos^2 = \dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

Comme $\dfrac{3\pi}{8} \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\dfrac{3\pi}{8} > 0$, on obtient

$\cos\dfrac{3\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

• On a $\cos\dfrac{3\pi}{4} = \cos\left(2 \times \dfrac{3\pi}{8}\right) = 1 - 2\sin^2\dfrac{3\pi}{8}$.

D'où $2\sin^2\dfrac{3\pi}{8} = 1 - \cos\dfrac{3\pi}{4} = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$,

soit $\sin^2 = \dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$.

Comme $\dfrac{3\pi}{8} \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin\dfrac{3\pi}{8} > 0$,

on obtient $\sin\dfrac{3\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}}$.

84 **1.** $A = \cos x\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin x\sin\dfrac{\pi}{4} + \cos x\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin x\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x,$$

soit $A = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}\sin x$.

2. $B = \sin x\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin\dfrac{\pi}{6}\cos x + \sin x\cos\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{\pi}{6}\cos x$

$B = 2\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}$, d'où $B = 2\sin x\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, soit $B = \sqrt{3}\sin x$.

3. $C = 2\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin x\sin\dfrac{\pi}{6}\right) - 3\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin\dfrac{\pi}{3}\cos x\right)$

$$C = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) - 3\left(\frac{1}{2}\sin x - \cos x\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

soit $C = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{5}{2}\sin x$.

86 D'après les formules de duplication :

$\sin(2a) = 2\sin a\cos a = 2 \times 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}96$.

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 2 \times 0{,}8^2 - 1 = 0{,}28$.

$\sin(2b) = 2\sin b\cos b = 2 \times \dfrac{5}{13} \times \dfrac{-12}{13} = -\dfrac{120}{169}$.

$\cos(2b) = 1 - 2\sin^2 b = 1 - 2 \times \dfrac{25}{169} = \dfrac{119}{169}$.

87 **1.** On a :

• $\cos\theta + \cos\left(\theta + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \dfrac{4\pi}{3}\right)$

$= \cos\theta + \cos\theta\cos\dfrac{2\pi}{3} - \sin\theta\sin\dfrac{2\pi}{3} + \cos\theta\cos\dfrac{4\pi}{3} - \sin\theta\sin\dfrac{4\pi}{3}$

$= \cos\theta + \cos\theta \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - \sin\theta \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - \sin\theta \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \cos\theta - \cos\theta - \sin\theta \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sin\theta \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

• $\sin\theta + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$

$= \sin\theta + \sin\theta\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\cos\theta + \sin\theta\cos\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}\cos\theta$

$= \sin\theta + \sin\theta \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos\theta + \sin\theta \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos\theta$

$= \sin\theta - \sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos\theta = 0.$

88 **1.** $A = \cos(3x)\sin(2x) + \sin(3x)\cos(2x)$

$= \sin(3x + 2x) = \sin(5x).$

2. $B = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$= \cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

3. $C = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$

$= \sin\frac{\pi}{4}\cos x + \sin x\cos\frac{\pi}{4} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

89 **1.** $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4}$

$= \cos x\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \cos x\sin\frac{\pi}{4} - \sin x\cos\frac{\pi}{4}$

$= \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

2. $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6}$

$= \cos x\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x\frac{1}{2}$

$= \cos x\sin\frac{\pi}{3} + \sin x\cos\frac{\pi}{3} = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

90 **1.** $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x$

$\cos(3x) = (2\cos^2 x - 1)\cos x - (2\sin x\cos x)\sin x$

$\cos(3x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x\cos x$

$\cos(3x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x$

$\cos(3x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$

$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$

2. Les égalités suivantes sont équivalentes :

$\cos(3x) = 0$

$4\cos^3 x - 3\cos x = 0$

$\cos x(4\cos^2 x - 3) = 0$

$\cos x((2\cos x)^2 - \sqrt{3}^2) = 0$

$\cos x(2\cos x - \sqrt{3})(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$

$\cos x = 0$ ou $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ ou $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

$\cos x = 0$ ou $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

On obtient $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}.$

91 **1.** $A + B = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

$A + B = 1 + 1 + 1 + 1$, soit $A + B = 4$.

$A - B = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

$A - B = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(2 \times \frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(2 \times \frac{7\pi}{8}\right)$

$A - B = \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}$,

soit $A - B = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $A - B = 0$.

2. On a le système $\begin{cases} A + B = 4 \\ A - B = 0 \end{cases}$. On obtient $A = 2$ et $B = 2$.

92 $8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \times A = 2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \times 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \times 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

$= \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) \times 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \times 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

$= \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) \times 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

$= \sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ soit $8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \times A = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right)$

d'où $8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \times A = \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

On obtient $8A = 1$, soit $A = \frac{1}{8}$.

93 **1.** $\cos(4x) = \cos(2 \times 2x) = 2\cos^2(2x) - 1$

$\cos(4x) = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1$

$\cos(4x) = 2(4\cos^4 x - 2 \times 2\cos^2 x \times 1 + 1) - 1$

$\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.$

2. D'après la question **1**, on a :

$$\cos\left(4 \times \frac{\pi}{12}\right) = 8\cos^4\frac{\pi}{12} - 8\cos^2\frac{\pi}{12} + 1.$$

On en déduit que $8\cos^4\frac{\pi}{12} - 8\cos^2\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3} - 1$,

soit $8\cos^4\frac{\pi}{12} - 8\cos^2\frac{\pi}{12} = -\frac{1}{2}$.

Ainsi $\cos^4\frac{\pi}{12} - \cos^2\frac{\pi}{12} = -\frac{1}{16}$.

94 Faux, l'égalité est vraie pour $x = 0$:

$\sin(2 \times 0) = 0$ et $2 \times \sin 0 = 0$.

95 Vrai, $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \times 1 = \cos(2x).$

96 Vrai, $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{5}$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{5}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{20}$$

97 Faux, $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{5}$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{5}$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=\sin\frac{9\pi}{20}$$

98 **1.** Un point M(x; y) appartient à la hauteur issue de A si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ avec $\overrightarrow{AM}(x+2\,;y)$ et $\overrightarrow{BC}(2\,;-6)$. On obtient $x-3y+2=0$.

2. Une erreur s'est glissée dans l'énoncé, la hauteur issue de B a pour équation $-3x+y+2=0$.

L'orthocentre R est l'intersection des hauteurs issues de A et B.

Ses coordonnées sont solution du système :

$\begin{cases}x-3y+2=0\\-3x+y+2=0\end{cases}$. On obtient le point R (1 ; 1).

3. L'aire du triangle est $S=\frac{1}{2}AC\times BH$,

avec $AC=\sqrt{(4+2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$

et $BH=\sqrt{(2-0,4)^2+(4+0,8)^2}=\frac{8\sqrt{10}}{5}$.

On obtient $S=16$.

99 **1.** Soit I le milieu de [AC], on a I(1 ; –1).

Un point M(x;y) appartient à la médiatrice du segment [AC] si, et seulement si, $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ avec $\overrightarrow{IM}(x-1\,;y+1)$ et $\overrightarrow{AC}(6\,;-2)$. On obtient $3x-y-4=0$ ou $y=3x-4$.

2. Le centre du cercle circonscrit est l'intersection des médiatrice des segments [AC] et [AB].

Ses coordonnées sont solution du système : $\begin{cases}y=3x-4\\y=-x+2\end{cases}$.

On obtient le point E(1,5 ; 0,5).

3. Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre E(1,5 ; 0,5) et pour rayon :

$$AE=\sqrt{(1,5+2)^2+(0,5)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Son équation peut s'écrire $(x-1,5)^2+(y-0,5)^2=12,5$ ou $x^2+y^2-3x-y-10=0$.

4. Un point M(x; y) appartient à la tangente en C au cercle si, et seulement si, $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CE}=0$ avec $\overrightarrow{CM}(x-4\,;y+2)$ et $\overrightarrow{CE}(-2,5\,;2,5)$.

On obtient $-2,5x+2,5y+15=0$ que l'on peut écrire $-x+y+6=0$ ou $y=x-6$.

100 **1.** • On a $CD^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\times\cos\widehat{CBD}$, soit $CD^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos 60°$

$$=25+16-40\times\frac{1}{2}.$$

D'où $CD=\sqrt{21}$.

• On a $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\times CD\times\cos\widehat{BCD}$, soit : $4^2=5^2+\left(\sqrt{21}\right)^2-2\times5\times\sqrt{21}\times\cos\widehat{BCD}$,

d'où $\cos\widehat{BCD}=\frac{5^2+\sqrt{21}^2-4^2}{2\times5\times\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

On obtient $\widehat{BCD}\approx49,1°$. Alors $\widehat{BDC}\approx70,9°$.

2. $\widehat{CBE}=90°-60°=30°$,

alors $\widehat{BCE}=180°-45°-30°=105°$.

On a $\frac{BC}{\sin\hat{E}}=\frac{BE}{\sin\hat{C}}=\frac{CE}{\sin\hat{B}}$

soit $\frac{5}{\sin105°}=\frac{BE}{\sin45°}=\frac{CE}{\sin30°}$.

Ainsi $BE=\frac{5\sin45°}{\sin105°}\approx3,66$ et $CE=\frac{5\sin30°}{\sin105°}\approx2,59$.

POUR FAIRE LE POINT

1 A ; **2** B et D ; **3** B et C ; **4** A et D ; **5** D ; **6** A et C ; **7** D ; **8** B et D ; **9** B et C ; **10** B.

POUR APPROFONDIR

101 **1.** Hauteur issue de A : $x-y+4=0$ ou $y=x+4$.

Hauteur issue de B : $5x+7y-44=0$.

Hauteur issue de C : $5x+y-12=0$ ou $y=-5x+12$.

Orthocentre : les coordonnées sont solution du système $\begin{cases}y=x+4\\y=-5x+12\end{cases}$. On obtient $H\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{16}{3}\right)$.

2. Médiatrice de [BC] : $x-y+1=0$ ou $y=x+1$.

Médiatrice de [AC] : $5x+7y-17=0$.

Médiatrice de [AB] : $5x+y-6=0$ ou $y=-5x+6$.

Centre du cercle circonscrit : les coordonnées sont solution du système $\begin{cases}y=x+1\\y=-5x+6\end{cases}$.

On obtient $\Omega\left(\frac{5}{6}\,;\,\frac{11}{6}\right)$.

3. I milieu de [BC] : $I\left(\frac{7}{2}\,;\,\frac{9}{2}\right)$, médiane issue de A (droite (AI)) : $3x-5y+12=0$.

J milieu de [AC] : $J\left(-\frac{3}{2}\,;\,\frac{7}{2}\right)$, médiane issue de B (droite (BJ)) : $x+5y-16=0$.

K milieu de [AB] : K(1 ; 1), médiane issue de C (droite (CK)) : $x=1$.

Isobarycentre du triangle : les coordonnées sont solution du système $\begin{cases}3x-5y+12=0\\x=1\end{cases}$.

On obtient G (1 ; 3).

3. On a $\overrightarrow{\Omega H}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{7}{2}\right)$ et $\overrightarrow{\Omega G}\left(\frac{1}{6}\,;\,\frac{7}{6}\right)$ ainsi, $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{\Omega G}$ sont colinéaires, les points Ω, G et H sont alignés.

102 **1. a.** Un vecteur directeur de (d) est $\vec{n}(-2\,;1)$.
Soit Δ la perpendiculaire à (d) passant par K. $M(x\,;y)$ appartient à Δ si, et seulement si, $\overrightarrow{KM}\cdot\vec{n} = 0$ avec $\overrightarrow{KM}(x-\alpha\,;y)$.
On obtient $-2(x-\alpha) + 1\times y = 0$ soit $y = 2x - 2\alpha$.
b. K′ est le point d'intersection des droites (d) et Δ.
Ses coordonnées sont solution du système :
$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ y = 2x - 2\alpha \end{cases}$. On obtient $K'\left(\frac{4\alpha+8}{5}; \frac{-2a+16}{5}\right)$.
c. La distance de K à (d) est KK′. On a :

$$KK' = \sqrt{\left(\frac{4\alpha+8}{5} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{-2\alpha+16}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{-\alpha+8}{5}\right)^2 + \left(\frac{-2\alpha+16}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{5\alpha^2 - 80\alpha + 320}{25}}$$
$$= \sqrt{\frac{\alpha^2 - 16\alpha + 64}{5}} = \sqrt{\frac{(\alpha-8)^2}{5}}.$$

Ainsi, la distance de K à (d) est $\frac{|\alpha - 8|}{\sqrt{5}}$.
2. a. On cherche le point K tel que $OK = KK'$,
soit $\alpha = \frac{|\alpha-8|}{\sqrt{5}}$.
Si $\alpha > 8$, l'équation devient $\alpha = \frac{\alpha - 8}{\sqrt{5}}$.
On obtient $\alpha = \frac{8}{1-\sqrt{5}}$ qui est une valeur négative, ce qui est impossible.
Si $\alpha < 8$, l'équation devient $\alpha = \frac{8-\alpha}{\sqrt{5}}$.
On obtient $\alpha = \frac{8}{1+\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - 2$ qui est une valeur comprise entre 0 et 8, donc c'est une solution.
Finalement, l'équation possède une solution unique $\alpha = 2\sqrt{5} - 2$. Donc $K(2\sqrt{5} - 2\,;0)$ est l'unique point équidistant de (d) et (yy').
b. $\cos\widehat{OEK} = \frac{OE}{EK} = \frac{4}{\sqrt{\alpha^2+16}}$.
Comme $\alpha = 2\sqrt{5} - 2$,

$$\cos\widehat{OEK} = \frac{4}{\sqrt{\left(2\sqrt{5}-2\right)^2 + 16}} = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

$\cos\widehat{KEF} = \frac{\vec{EK}\cdot\vec{EF}}{EK\times EF}$ avec $\overrightarrow{EK}(\alpha\,;-4)$,
$EK = \sqrt{\alpha^2+16}$, $\overrightarrow{EF}(8\,;-4)$ et $EF = 4\sqrt{5}$.
Ainsi $\cos\widehat{KEF} = \frac{8\alpha+16}{\sqrt{\alpha^2+16}\times 4\sqrt{5}}$.
Comme $\alpha = 2\sqrt{5} - 2$,

$$\cos\widehat{KEF} = \frac{8\left(2\sqrt{5}-2\right)+16}{\sqrt{\left(2\sqrt{5}-2\right)^2+16}\times 4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

On a $\cos\widehat{OEK} = \cos\widehat{KEF}$.
Ce résultat était prévisible car K étant équidistant des droites (OE) et (EK′), c'est un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{OEK'}$.

103 Le cercle de diamètre [MN] a pour équation :
$x^2 + y^2 - 12x - 12y + 56 = 0$, soit $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 16$.
Le cercle de centre P a pour équation $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 26$ soit $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 24 = 0$.
Les coordonnées des points d'intersection sont solution du système : $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 24 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 12x - 12y + 56 = 0 & (2) \end{cases}$
En calculant (1) – (2), on obtient $10x + 10y = 80$, soit $y = 8 - x$.
En substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtient : $2x^2 - 16x + 24 = 0$, soit $x^2 - 8x + 12 = 0$.
Cette équation possède deux solutions : $x = 2$ et $x = 6$.
Les deux cercles ont deux points d'intersection : M(2 ; 6) et L(6 ; 2).

104 **1.** $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 + 4m - 3 = 0$ équivaut à $(x-m)^2 - m^2 + (y+2m)^2 - 4m^2 + 4m^2 + 4m - 3 = 0$
soit $(x-m)^2 + (y+2m)^2 = m^2 - 4m + 3$.
Cette équation est celle d'un cercle (non réduit à un point) si, et seulement si, $m^2 - 4m + 3 > 0$.
En résolvant cette inéquation, on obtient $m < 1$ ou $m > 3$.
2. D'après les résultats précédents, les coordonnées de Ω_m sont $\Omega_m(m\,;-2m)$. Ces coordonnées sont telles que $y = -2x$.
L'ensemble cherché est la droite d'équation $y = -2x$.

105 **1.** Le cercle cherché est le cercle circonscrit au triangle ABC.
La médiatrice de [AB] a pour équation $y = x$, la médiatrice de [AC] a pour équation $x = 1$.
Centre du cercle circonscrit : les coordonnées sont solution du système $\begin{cases} y = x \\ y = 1 \end{cases}$, on obtient Ω(1 ; 1).
Rayon du cercle circonscrit : $R = \Omega A = \sqrt{10}$.
Équation du cercle circonscrit : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$.
2. a. Les coordonnées de D vérifient l'équation du cercle, donc D appartient au cercle.
b. Équation de (AB) : $x + y - 4 = 0$ ou $y = -x + 4$.
Un vecteur directeur de (AB) est $\vec{n_1}(-1\,;1)$.
Soit Δ_1 la perpendiculaire à (AB) passant par D.
$M(x\,;y)$ appartient à Δ_1 si, et seulement si, $\overrightarrow{DM}\cdot\vec{n_1} = 0$ avec $\overrightarrow{DM}(x-2\,;y-4)$.
On obtient $x - y + 2 = 0$ ou $y = x + 2$.
E est le point d'intersection des droites (AB) et Δ_1.
Ses coordonnées sont les solutions du système $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$. On obtient E(1 ; 3).

• Équation de (BC) : $2x - y + 4 = 0$ ou $y = 2x + 4$.
Un vecteur directeur de (BC) est $\vec{n}_2(1\,;\,2)$.
Soit Δ_2 la perpendiculaire à (BC) passant par D.
$M(x\,;y)$ appartient à Δ_2 si, et seulement si, $\overrightarrow{DM}\cdot\vec{n}_2 = 0$.
On obtient $x + 2y - 10 = 0$.
F est le point d'intersection des droites (BC) et Δ_2.
Ses coordonnées sont solution du système :
$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ x + 2y - 10 = 0 \end{cases}$. On obtient F(0,4 ; 4,8).
• Équation de (AC) : $y = 0$, c'est l'axe des abscisses.
Δ_3 la perpendiculaire à (AC) passant par D a donc pour équation $x = 2$. Le point d'intersection des droites (AC) et Δ_3 est le point G(2 ; 0).
3. On a $\overrightarrow{EF}(-0{,}6\,;\,1{,}8)$ et $\overrightarrow{EG}(1\,;\,-3)$. Ces deux vecteurs sont colinéaires, les points E, F et G sont alignés.

106 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 09S_exercice106.ggb (Geogebra), 09S_exercice106.g2w (Geoplan) et 09S_exercice106.fig (Cabri).***

1. a. L'équation de la tangente est :
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
avec $f(a) = a^2$ et $f'(a) = 2a$, soit $y = 2ax - a^2$.
b. L'équation de la tangente peut s'écrire :
$-2ax + y + a^2 = 0$, un vecteur normal est donc $\vec{n}(-2a\,;1)$.
2. a. Comme le repère est (O ; I ; J), on a OJ = 1 soit $\|\overrightarrow{OJ}\| = 1$. On a aussi $\|\vec{u}\| = 1$.
On peut écrire :
$$\vec{n}\cdot\vec{u} = \|\vec{n}\|\cdot\|\vec{u}\|\cos(\vec{n},\vec{u})$$
$$= \|\vec{n}\|\cdot\|\overrightarrow{OJ}\|\cos(\overrightarrow{OJ},\vec{n}) = \overrightarrow{OJ}\cdot\vec{n}.$$
b. $\|\vec{u}\| = 1$ équivaut à $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$, soit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
$\overrightarrow{OJ}\cdot\vec{n} = 0 \times (-2a) + 1 \times 1$, soit $\overrightarrow{OJ}\cdot\vec{n} = 1$.
$\vec{n}\cdot\vec{u} = (-2a) \times \alpha + 1 \times \beta$, soit $\vec{n}\cdot\vec{u} = -2a\alpha + \beta$.
$\overrightarrow{OJ}\cdot\vec{n} = \vec{n}\cdot\vec{u}$ équivaut à $1 = -2a\alpha + \beta$,
soit $-2a\alpha + \beta - 1 = 0$. D'où le système.
c. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -2ax + y - 1 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x^2 + (2ax + 1)^2 = 1 \\ y = 2ax + 1 \end{cases}$
soit $\begin{cases} (4a^2 + 1)x^2 + 4ax = 0 \\ y = 2ax + 1 \end{cases}$
Les solutions de la première équation sont :
$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{-4a}{4a^2 + 1}.$$
Les valeurs de y correspondantes sont :
$$y = 1 \text{ ou } y = \frac{-4a^2 + 1}{4a^2 + 1}.$$
On obtient deux solutions :
$$(0\,;1) \text{ ou } \left(\frac{-4a}{4a^2 + 1}\,;\frac{-4a^2 + 1}{4a^2 + 1}\right).$$
3. a. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur, l'équation de (d′) est de la forme $\frac{1 - 4a^2}{1 + 4a^2}x - \frac{-4a}{1 + 4a^2}y + c = 0$.
Les coordonnées de A vérifient l'équation, on a :
$\frac{1 - 4a^2}{1 + 4a^2}a - \frac{-4a}{1 + 4a^2}a^2 + c = 0$ d'où $c = \frac{-a}{1 + 4a^2}$.
On obtient l'équation :
$$\frac{1 - 4a^2}{1 + 4a^2}x - \frac{-4a}{1 + 4a^2}y + \frac{-a}{1 + 4a^2} = 0$$
soit $(1 - 4a)^2x + 4ay - a = 0$.
On obtient $y = \frac{4a^2 - 1}{4a}x + \frac{1}{4}$.
b. Quelle que soit la valeur de a, si $x = 0$ on a $y = \frac{1}{4}$.
L'intersection de la droite avec l'axe $(y'y)$ est le point $F\left(0\,;\,\frac{1}{4}\right)$.
Remarque : Il peut être pertinent de traiter cet exercice à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

107 **1.** $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$ peut s'écrire :
$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$, c'est l'équation du cercle de centre I(–2 ; 5) et de rayon 5.
$x^2 + y^2 - 6x - 5y + 9 = 0$ peut s'écrire :
$(x - 3)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, c'est l'équation du cercle de centre $D\left(3\,;\,\frac{5}{2}\right)$ et de rayon $\frac{5}{2}$.
2. Les points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses ont leurs coordonnées qui vérifient l'équation $x^2 + 0^2 + 4x - 10 \times 0 + 4 = 0$ soit $(x + 2)^2 = 0$.
On obtient une seule solution $x = -2$, donc un seul point d'intersection : E(–2 ; 0).
On peut vérifier que la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en E(–2 ; 0) est l'axe des abscisse.
Les points d'intersection du cercle $\mathscr{C}'$ et de l'axe des abscisses ont leurs coordonnées qui vérifient l'équation :
$$x^2 + 0^2 - 6x - 5 \times 0 + 9 = 0 \text{ soit } (x - 3)^2 = 0.$$
On obtient une seule solution $x = 3$, donc un seul point d'intersection : F(3 ; 0).
On peut vérifier que la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en F(3 ; 0) est l'axe des abscisse.
3. Les coordonnées des points d'intersection des deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les solutions du système :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 6x - 5y + 9 = 0 & (2) \end{cases}$$
En calculant (1) – (2), on obtient $10x - 5y - 5 = 0$,
soit $y = 2x - 1$.
En substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtient : $5x^2 - 20x + 15 = 0$, soit $x^2 - 4x + 3 = 0$.
On obtient deux solutions : $x = 1$ et $x = 3$, les valeurs de y correspondantes sont $y = 1$ et $y = 5$.
Les deux cercles ont deux points d'intersection :
A(1 ; 1) et B(3 ; 5).
4. a. L'équation d'un cercle passant par A et B peut s'écrire $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Ce cercle passant par A et B, on a :

$$(1-a)^2+(1-b)^2=R^2 \text{ et } (3-a)^2+(5-b)^2=R^2.$$

On en déduit que $(1-a)^2+(1-b)^2=(3-a)^2+(5-b)^2$.

En développant et en simplifiant, on obtient :

$$a+2b-8=0.$$

b. D'après la question précédente, on peut écrire :

$$b=4-\frac{1}{2}a.$$

D'autre part, $R^2=\Omega A^2$ soit $R^2=(a-1)^2+(b-1)^2$.

L'équation du cercle peut alors s'écrire :

$$(x-a)^2+\left(y-4+\frac{1}{2}a\right)^2=(a-1)^2+\left(4-\frac{1}{2}a-1\right)^2.$$

En développant et en simplifiant, on obtient :

$$x^2+y^2-2ax+(a-8)y+a+6=0.$$

Si le cercle coupe l'axe des abscisses, les coordonnées des points d'intersection vérifient l'équation :

$$x^2+0^2-2ax+(a-8)\times 0+a+6=0,$$

soit $x^2-2ax+a+6=0$.

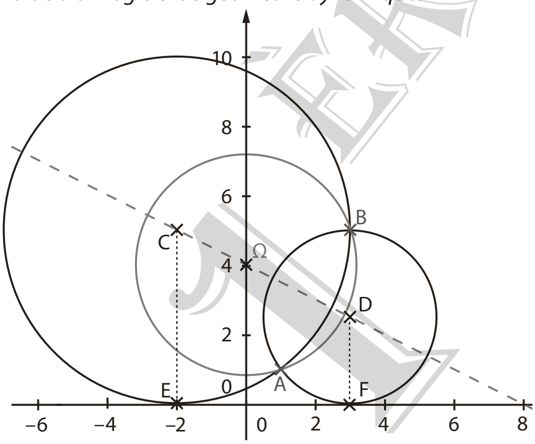
Pour que le cercle coupe l'axe des abscisses, il faut que l'équation $x^2-2ax+a+6=0$ ait des solutions. Pour cela il faut que son discriminant soit positif, c'est-à-dire $(-2a)^2-4\times 1\times(a+6)\geqslant 0$.

On obtient l'inéquation $4a^2-4a-24\geqslant 0$ ou $a^2-a-6\geqslant 0$.

En résolvant cette inéquation, on en déduit qu'il faut $a\leqslant -2$ ou $a\geqslant 3$.

Remarque : Il peut être pertinent de traiter cet exercice à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Il peut aussi être intéressant de représenter la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

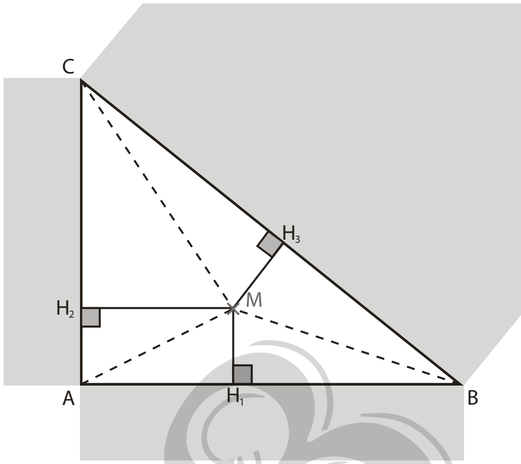


108 Soient H_1, H_2 et H_3 les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB), (AC) et (BC).

On veut $\dfrac{\text{Aire(MAB)}}{AB^2}=\dfrac{\text{Aire(MAC)}}{AC^2}=\dfrac{\text{Aire(MBC)}}{BC^2}$,

soit $\dfrac{\frac{1}{2}MH_1\cdot AB}{AB^2}=\dfrac{\frac{1}{2}MH_2\cdot AC}{AC^2}=\dfrac{\frac{1}{2}MH_3\cdot BC}{BC^2}$.

En simplifiant, on obtient $\dfrac{MH_1}{AB}=\dfrac{MH_2}{AC}=\dfrac{MH_3}{BC}$.



Remarque : On peut commencer par utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour représenter la situation et chercher expérimentalement la position du point M. On peut alors constater que M est sur la hauteur AH issue de A dans le triangle ABC. En regardant plus précisément on peut même constater que M est le milieu de [AH].

• Commençons par montrer que M est sur la hauteur issue de A :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AH_1}+\overrightarrow{AH_2})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$
$$=0-AH_1\times AB+AH_2\times AC-0.$$

Comme AH_1MH_2 est un rectangle, $\dfrac{MH_1}{AB}=\dfrac{MH_2}{AC}$ peut aussi s'écrire $\dfrac{AH_2}{AB}=\dfrac{AH_1}{AC}$.

Ainsi $AH_1\times AB=AH_2\times AC$, on en déduit que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

Donc M est sur la hauteur issue de A.

• Montrons que AM = MH, donc que M milieu de [AH].

On peut écrire :

$$MH_1=\frac{AB\times MH_3}{BC} \quad\text{et}\quad MH_2=\frac{AC\times MH_3}{BC}.$$

Alors $AM^2=MH_1{}^2+MH_2{}^2$

$$=\frac{AB^2\times MH_3{}^2}{BC^2}+\frac{AC^2\times MH_3{}^2}{BC^2}$$
$$=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}\times MH_3{}^2$$

Comme le triangle ABC est rectangle en A, on en déduit que $\dfrac{AB^2+AC^2}{BC^2}=1$, donc que $AM^2=MH_3{}^2$.

On obtient $AM=MH_3$, M étant sur la hauteur issue de A, les points H et H_3 sont confondus, donc M milieu de [AH].

109 **1.** Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont complémentaires. Ainsi, si $\hat{A}$ a pour mesure θ, la mesure de $\hat{B}$ est $\pi-\theta$:

$$\cos\hat{A}+\cos\hat{B}=\cos\theta+\cos(\pi-\theta)=0.$$

2. Dans le triangle ABC, on a :

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\hat{B}.$$

Dans le triangle ABD, on a :

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\times\cos\hat{A}.$$

D'où $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + AB^2 + AD^2$
$- 2AB \times AD \times \cos \hat{A} - 2AB \times BC \times \cos \hat{B}$.
ABCD étant un parallélogramme, $AB = DC$ et $BC = AD$.
Ainsi $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2$
$- 2AB \times BC(\cos \hat{A} + \cos \hat{B})$.
On obtient $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

110 • On a $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 10^2 + 10^2 = 200$
$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 200 + 10^2 = 300$
$BE^2 = BD^2 + DE^2 = 300 + 10^2 = 400$.
Ainsi, $BE = 20$.
• Le triangle ABC étant isocèle rectangle en B, on a $\widehat{ABC} = 45°$.
• Dans le triangle BCD, $\cos \widehat{CBD} = \dfrac{BC}{BD}$ soit :

$$\cos \widehat{CBD} = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{300}} \text{ ou } \cos \widehat{CBD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

On obtient $\widehat{CBD} \approx 35{,}3°$.
• Dans le triangle BDE, $\cos \widehat{DBE} = \dfrac{BD}{BE}$ soit :

$$\cos \widehat{DBE} = \frac{\sqrt{300}}{20} \text{ ou } \cos \widehat{DBE} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On obtient $\widehat{DBE} = 30°$.
• $45° + 35{,}3° + 30° = 110{,}3°$. Ainsi, une mesure de $\widehat{ABE}$ est $\widehat{ABE} \approx 110{,}3°$.
• On a $AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \times BE \times \cos \widehat{ABE}$,
$= 100 + 400 - 2 \times 10 \times 20 \times \cos 110{,}3$.
On obtient $AE^2 \approx 638{,}774$, soit $AE \approx 25{,}3$.

111 • Dans le triangle ACB, on a $\widehat{ACB} = 180° - 44° - 69°$, soit $\widehat{ACB} = 67°$.

$$\frac{AC}{\sin 44°} = \frac{AB}{\sin 67°}, \text{ soit } AC = \frac{1400 \times \sin 44°}{\sin 67°}.$$

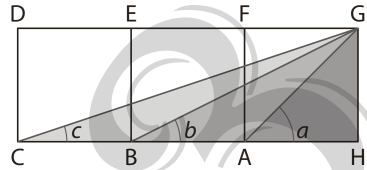
On obtient $AC \approx 1\,056{,}51$.
• Dans le triangle ADB, on a $\widehat{ADB} = 180° - 56{,}2° - 55°$, soit $\widehat{ADB} = 68{,}8°$.

$$\frac{AD}{\sin 56{,}2°} = \frac{AB}{\sin 68{,}8°}, \text{ soit } AD = \frac{1400 \times \sin 56{,}2°}{\sin 68{,}8°}.$$

On obtient $AD \approx 1\,247{,}83$.
• Dans le triangle ACD, on a $\widehat{CAD} = 69° - 55°$, soit $\widehat{CAD} = 14°$.
$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \times AD \times \cos \widehat{CAD}$.
$= 1\,056{,}51^2 + 1\,247{,}83^2$
$- 2 \times 1\,056{,}51 \times 1\,247{,}83 \times \cos 14$,
$\approx 114\,924$.
On obtient $CD \approx 339$ m.

112 **1.** $\sin(3x) = \sin(2x + x)$
$\sin(3x) = \sin(2x)\cos x + \sin x \cos(2x)$
$\sin(3x) = 2\sin x \cos x \cos x + \sin x \times (1 - 2\sin^2 x)$
$\sin(3x) = 2\sin x \times (1 - \sin 2x) + \sin x \times (1 - 2\sin^2 x)$
$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$
2. Les égalités suivantes sont équivalentes :
$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$
$\sin x + 2\sin x \cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 0$
$4\sin x + 2\sin x \cos x - 4\sin^3 x = 0$
$\sin x \times (4 - 4\sin^2 x + 2\cos x) = 0$
$\sin x \times (4\cos^2 x + 2\cos x) = 0$
$2\sin x \cos x \times (2\cos x + 1) = 0$
On obtient $\sin x = 0$ ou $\cos x = 0$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.
Soit $x = 0\ [2\pi]$ ou $x = \pi [2\pi]$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
ou $x = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

113 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 09S_exercice113.ggb (Geogebra), 09S_exercice113.g2w (Geoplan) et 09S_ exercice113.fig (Cabri).***
On a la figure :



• Le triangle AGH étant isocèle rectangle en H, on a :

$$\widehat{HAG} = \frac{\pi}{4}.$$

• Dans BGH rectangle en H, on a $BG = \sqrt{2^2 + 1^2}$, soit $BG = \sqrt{5}$. On en déduit :

$$\cos \widehat{HBG} = \frac{BH}{BG} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ et } \sin \widehat{HBG} = \frac{GH}{BG} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

• Dans le triangle CGH rectangle en H, on a :

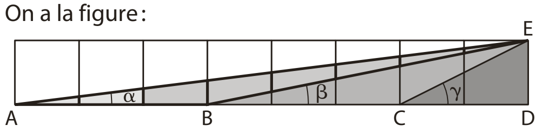
$$CG = \sqrt{3^2 + 1^2}, \text{ soit } CG = \sqrt{10}.$$

On en déduit :

$$\cos \widehat{HCG} = \frac{CH}{CG} = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ et } \sin \widehat{HCG} = \frac{GH}{CG} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

• On en déduit que $\cos(b + c) = \cos b \cos c - \sin b \sin c$, soit $\cos(b + c) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \times \dfrac{3}{\sqrt{10}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
Ainsi $\cos(b + c) = \dfrac{5}{\sqrt{50}}$ soit $\cos(b + c) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
De même $\sin(b + c) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit que $b + c = \dfrac{\pi}{4}$ et donc que la somme des trois angles mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

114 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 09S_exercice114.ggb (Geogebra), 09S_exercice114.g2w (Geoplan) et 09S_ exercice114.fig (Cabri).***
On a la figure :



Par une méthode analogue à celle utilisée dans l'exercice **113**, on obtient : $CE = \sqrt{5}$, $BE = \sqrt{26}$ et $AE = \sqrt{65}$.
On obtient aussi :

$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{26}},\ \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{26}},$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{65}},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{65}}.$$

On en déduit : $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{8}{\sqrt{65}} \times \dfrac{5}{\sqrt{26}} - \dfrac{1}{\sqrt{65}} \times \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

$$= \frac{39}{13\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

De même : $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{65}} \times \dfrac{5}{\sqrt{26}} + \dfrac{8}{\sqrt{65}} \times \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

$$= \frac{13}{13\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Posons $\theta = \alpha + \beta$.

On a : $\cos(\gamma+\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \times \dfrac{3}{\sqrt{10}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$$= \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De même : $\sin(\gamma+\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{3}{\sqrt{10}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$$= \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On en déduit que $\gamma + \theta = \dfrac{\pi}{4}$ et donc que la somme des trois angles α, β et γ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$.

115 Correctif : il faut lire $\sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = \sin^2\hat{A}$ et pas $\sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = 1$.

1. On a $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$ on en déduit que :

$\sin^2\hat{B} = \dfrac{b^2\sin^2\hat{A}}{a^2}$ et $\sin^2\hat{C} = \dfrac{c^2\sin^2\hat{A}}{a^2}$.

Ainsi : $\sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = \dfrac{(b^2+c^2)\sin^2\hat{A}}{a^2}$.

Si $\sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = \sin^2\hat{A}$, on en déduit que :

$$\frac{(b^2+c^2)}{a^2} = 1, \text{ soit } b^2 + c^2 = a^2.$$

Le triangle est rectangle en A.

2. La réciproque est « si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = \sin^2\hat{A}$ ».

Cette réciproque est vraie. En effet, si ABC est un triangle rectangle en A, $\sin\hat{C} = \cos\hat{B}$.

Alors l'égalité $\sin^2\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1$ devient :

$$\sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = 1.$$

De plus comme $\hat{A}$ est un angle droit, $\sin^2\hat{A} = 1$.

On a bien $\sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = \sin^2\hat{A}$.

116 **1.** Soit k le nombre tel que :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = k$$

alors $a = k\sin\hat{A}$, $b = k\sin\hat{B}$ et $c = k\sin\hat{C}$.

Si $b = a + c$, on obtient $k\sin\hat{B} = k\sin\hat{A} + k\sin\hat{C}$, soit $\sin\hat{B} = \sin\hat{A} + \sin\hat{C}$.

2. La réciproque est « si les angles d'un triangle satisfont la relation $\sin\hat{B} = \sin\hat{A} + \sin\hat{C}$, alors les côtés a, b et c de ce triangle satisfont à la relation : $b = a + c$ ». Cette réciproque est vraie.

117 **1. a.** On sait que $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

ainsi $\cos^2\hat{A} = \dfrac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4b^2c^2}$.

D'où $\sin^2\hat{A} = 1 - \dfrac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4b^2c^2}$.

b. $\sin^2\hat{A} = \dfrac{4b^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)}{4b^2c^2}$ d'où l'égalité.

2. $4p(p-a)(p-b)(p-c)$

$= 4 \times \dfrac{a+b+c}{2} \times \dfrac{b+c-a}{2} \times \dfrac{a+c-b}{2} \times \dfrac{a+b-c}{2}$

$= 4 \times \dfrac{((b+c)+a)((b+c)-a)}{4} \times \dfrac{(a-(b-c))(a+(b-c))}{4}$

$= 4 \times \dfrac{(b+c)^2 - a^2}{4} \times \dfrac{a^2-(b-c)^2}{4}$

$= 4 \times \dfrac{b^2+c^2+2bc-a^2}{4} \times \dfrac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{4}$

$= 4 \times \dfrac{2bc+(b^2+c^2-a^2)}{4} \times \dfrac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{4}$

$= 4 \times \dfrac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{16}$

$= 4 \times \dfrac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4}$

$= 4 \times \dfrac{4b^2c^2\sin^2\hat{A}}{4}$ d'après la question précédente, d'où l'égalité.

3. a. $S^2 = \dfrac{b^2c^2\sin^2\hat{A}}{4}$.

b. D'après les égalités précédentes, on a :

$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, d'où la valeur de S.

4. a. Le périmètre du triangle est 18, d'où $p = 9$.

En appliquant la formule de Héron, on obtient :

$S = \sqrt{9(9-6)(9-6)(9-6)}$, soit $S = 9\sqrt{3}$.

b. Le périmètre du triangle est 18, d'où $p = 9$.

En appliquant la formule de Héron, on obtient :

$S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$, soit $S = 6\sqrt{6}$.

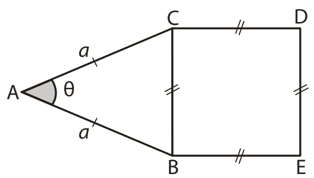
c. C'est le triangle équilatéral qui a la plus grande aire.

118 **1.** Dans le triangle ABC, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

$\quad = a^2 + a^2 - 2aa\cos\theta = 2a^2(1-\cos\theta)$.

Ainsi $BC = a\sqrt{2(1-\cos\theta)}$



Le périmètre du triangle est $2a + a\sqrt{2(1-\cos\theta)}$, celui du carré : $4a\sqrt{2(1-\cos\theta)}$.

On obtient l'égalité :

$2a + a\sqrt{2(1-\cos\theta)} = 4a\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

soit $2a = 3a\sqrt{2(1-\cos\theta)}$ ou $\sqrt{2(1-\cos\theta)} = \dfrac{2}{3}$.

Ainsi on a $2(1-\cos\theta) = \dfrac{4}{9}$.

On en déduit que $\cos\theta = \dfrac{14}{18}$, d'où $\theta \approx 38{,}94$.

119 **1. a.** Dans ABC, $\widehat{BAC} = 180° - 53° - 36°$ soit $\widehat{BAC} = 91°$.

$\frac{AB}{\sin 36°} = \frac{BC}{\sin 91°}$ ainsi $AB = \frac{250 \times \sin 36°}{\sin 91°} \approx 146{,}97$.

b. Dans ABM, $\widehat{BMA} = 180° - 53° - 51°$, soit $\widehat{BMA} = 76°$.

• $\frac{BM}{\sin 51°} = \frac{AB}{\sin 76°}$ ainsi $BM = \frac{146{,}97 \times \sin 51°}{\sin 76°} \approx 117{,}71.$

• $\frac{AM}{\sin 53°} = \frac{AB}{\sin 76°}$ ainsi $AM = \frac{146{,}97 \times \sin 53°}{\sin 76°} \approx 120{,}97.$

2. a. Dans BCD, $\widehat{BDC} = 180° - 37° - 96°$, soit $\widehat{BDC} = 47°$.

$\frac{BD}{\sin 96°} = \frac{BC}{\sin 47°}$ ainsi $BD = \frac{250 \times \sin 96°}{\sin 47°} \approx 339{,}96$.

b. Dans BMN, $\widehat{BMN} = 180° - 76° = 104°$ et $\widehat{BNM} = 180° - 104° - 37°$, soit $\widehat{BNM} = 39°$.

• $\frac{BN}{\sin 104°} = \frac{BM}{\sin 39°}$

ainsi $BN = \frac{117{,}71 \times \sin 104°}{\sin 39°} \approx 181{,}49$.

• $\frac{MN}{\sin 37°} = \frac{BM}{\sin 39°}$ ainsi $MN = \frac{117{,}71 \times \sin 37°}{\sin 39°} \approx 112{,}57.$

3. $DN = BD - BN = 339{,}96 - 181{,}49 = 158{,}47$.

Dans DNP, $\widehat{DNP} = \widehat{BNM} = 39°$ et $\widehat{DPN} = 180° - 64° - 39° = 77°$.

• $\frac{DP}{\sin 39°} = \frac{DN}{\sin 77°}$ ainsi $DP = \frac{158{,}47 \times \sin 39°}{\sin 77°} \approx 102{,}35.$

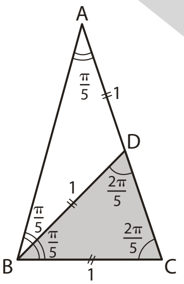
• $\frac{NP}{\sin 64°} = \frac{DN}{\sin 77°}$ ainsi $NP = \frac{158{,}47 \times \sin 64°}{\sin 77°} \approx 146{,}18.$

Dans DFP, $\widehat{DPF} = 180° - 77° = 103°$ et $\widehat{DFP} = 180° - 103° - 51 = 26°$.

• $\frac{FP}{\sin 51°} = \frac{DP}{\sin 26°}$ ainsi $FP = \frac{102{,}35 \times \sin 51°}{\sin 26°} \approx 181{,}45.$

Ainsi : $AF = AM + MN + NP + PF$
$\approx 120{,}97 + 112{,}57 + 146{,}18 + 181{,}45$
$\approx 561{,}17$.

120 **1.**



On sait que $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$; $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = 2\widehat{DBC}$.

Dans BCD, on a $\widehat{BDC} + \widehat{BCD} + \widehat{BDC} = \pi$.

Soit $\widehat{DBC} + 2\widehat{DBC} + 2\widehat{DBC} = \pi$.

On obtient $5\widehat{DBC} = \pi$, ainsi $\widehat{DBC} = \frac{\pi}{5}$.

Alors, $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{5}$; $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = \frac{2\pi}{5}$;

$\widehat{BAC} = \pi - \frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$ et $\widehat{ADB} = \pi - \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$.

2. a. Dans ABC, on a : $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$.

Ainsi $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$, soit $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}}$.

Dans BCD, on a $\frac{BC}{\sin \hat{D}} = \frac{CD}{\sin \hat{B}}$ ainsi $\frac{BC}{CD} = \frac{\sin \hat{D}}{\sin \hat{B}}$,

soit $\frac{BC}{CD} = \frac{\sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}}$. On a bien $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$.

b. De $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$ on déduit que $AB = \frac{1}{CD}$ (car $BC = 1$) et donc $CD = \frac{1}{AB}$.

Comme $\widehat{ABD} = \widehat{DAB} = \frac{\pi}{5}$ le triangle ABD est isocèle de sommet D, donc $AD = BD = 1$.

Ainsi, $AB = AD + DC$, soit $AB = 1 + CD$.

On obtient l'équation $AB = 1 + \frac{1}{AB}$.

En posant $x = AB$, on obtient $x = 1 + \frac{1}{x}$, soit $x^2 - x - 1 = 0$.

Cette équation a deux solutions $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Comme $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, on en déduit que $AB = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Dans le triangle ABD, on a :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos \widehat{BAD},$$

Soit $1^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1^2 - 2 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cos \frac{\pi}{5}$,

ou encore $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cos \frac{\pi}{5} = 0$,

d'où $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 2\cos \frac{\pi}{5} = 0$.

On obtient $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

121 **1.** La médiatrice de [AC] à pour équation $x = 1$, la médiatrice de [BC] à pour équation $y = -x + 1$.

Les coordonnées du centre du cercle circonscrit sont $\Omega(1 ; 0)$.

2. a. La hauteur issue de B à pour équation $x = 4$, la hauteur issue de A à pour équation $y = -x + 3$.

Les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC sont $H(4 ; -1)$.

b. Une équation de (BC) est $y = x + 1$, les coordonnées de D sont solution du système $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

On obtient $D(1 ; 2)$.

Une équation de (AC) est $y = -3$, les coordonnées de E sont solution du système $\begin{cases} y = -3 \\ x = 4 \end{cases}$.

On obtient E(4 ;–3).

Une équation de (AB) est $y = -4x + 21$, une équation de la hauteur issue de C est $x - 4y - 8 = 0$.

Les coordonnées de F sont solution du système $\begin{cases} y = -4x + 21 \\ x - 4y - 8 = 0 \end{cases}$. On obtient $F\left(\frac{92}{17} ; \frac{11}{17}\right)$.

3. On a L(5 ;–2), M(4 ; 2) et N(0 ;–2).

4. Pour déterminer le centre du cercle, on peut réaliser la construction à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et chercher à déterminer le centre par tâtonnements ou en traçant deux médiatrices à l'aide de quatre des neuf points. On peut aussi calculer l'équation de deux médiatrices et déterminer leur point d'intersection.

On obtient le point G(2,5 ;–0,5) qui est le milieu de [ΩH].

Il ne reste plus qu'à calculer la distance entre G et chacun des neuf points et de vérifier que cette distance est toujours égale à $\frac{\sqrt{34}}{2}$.

122 **1.** Dans ABP, on a :

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2AP \times BP \times \cos\frac{3\pi}{4} = 20 + 8\sqrt{2}.$$

On obtient $AB = \sqrt{20 + 8\sqrt{2}} \approx 5{,}596$.

2. Dans ABP, on a :

$$BP^2 = AB^2 + AP^2 - 2AB \times AP \times \cos\widehat{BAP}$$

$$\cos\widehat{BAP} = \frac{\left(20 + 8\sqrt{2}\right) + 4^2 - 2^2}{2 \times 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \times 4} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} \approx 0{,}9675.$$

3. $\cos\widehat{CAP} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BAP}\right) = \sin\widehat{BAP}$.

$$\sin^2\widehat{BAP} = 1 - \cos^2\widehat{BAP}$$

$$= 1 - \left(\frac{4 + \sqrt{2}}{2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}\right)^2 = \frac{1}{10 + 4\sqrt{2}} = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{34}.$$

Comme $\sin BAP > 0$, on en déduit :

$$\sin\widehat{BAP} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{2}}{34}}.$$

Finalement $\cos\widehat{CAP} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{2}}{34}}$.

4. Dans ACP, on a :

$$PC^2 = AC^2 + AP^2 - 2 \cdot AC \times AP \times \cos\widehat{CAP}$$

$$= 20 + 8\sqrt{2} + 16 - 2 \times 4 \times 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{2}}{34}}.$$

Ainsi $PC^2 = 36$, soit $PC = 6$.

123 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 09S_exercice123.ggb (Geogebra), 09S_exercice123.g2w (Geoplan) et 09S_ exercice123.fig (Cabri).***

1. La distance AM est minimale lorsque les droites (AM) et (d) sont perpendiculaires.

2. $AM = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2}$.

Comme $y = x + 2$, on obtient $AM = \sqrt{2x^2 - 6x + 5}$.

3. a. $f'(x) = 4x - 6$, f est croissante sur $\left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$.

b. Le minimum est $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

4. a. Comme $AM = \sqrt{f(x)}$, le minimum pour la distance AM correspond au minimum de la fonction f. Ainsi, la distance est minimale quand $x = \frac{3}{2}$ et $y = x + 2 = \frac{7}{2}$, c'est-à-dire quand M est en $M_0\left(\frac{3}{2} ; \frac{7}{2}\right)$.

D'où $AM_0 = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 4\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Un vecteur normal à (d) est $\vec{n}(1 ; -1)$, comme $\overrightarrow{AM_0}\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$, c'est bien un vecteur normal à (d).

5. a. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0} = \|\vec{n}\| \times \overrightarrow{AM_0} \times \cos(\vec{n} ; \overrightarrow{AM_0})$ comme les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM_0}$ sont colinéaires, $(\vec{n} ; \overrightarrow{AM_0}) = 0$ ou $(\vec{n} ; \overrightarrow{AM_0}) = \pi$.

Ainsi $\cos(\vec{n} ; \overrightarrow{AM_0}) = 1$ ou $\cos(\vec{n} ; \overrightarrow{AM_0}) = -1$.

Alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0} = \|\vec{n}\| \times AM_0$ ou $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0} = -\|\vec{n}\| \times AM_0$.

On a bien $\|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0}\| = \|\vec{n}\| \times AM_0$.

b. Un vecteur normal à (d) est $\vec{n}(1 ; -1)$.

c. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AM_0} + \overrightarrow{M_0M})$

$= \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}$.

Comme M_0 et M sont deux points de (d) : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

Ainsi $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0}$.

d. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 1 \times (x - 1) + (-1) \times (y - 4) = x - y + 3$.

Si M appartient à (d), on a : $x - y + 2 = 0$.

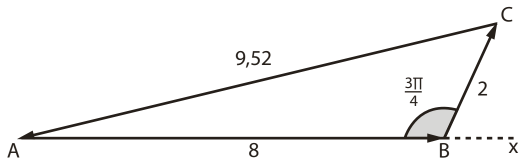
Alors $x - y + 3 = 1$, on a bien $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 1$.

e. On sait que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0} = 1$ et que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0} = \|\vec{n}\| \times AM_0$, d'où $\|\vec{n}\| \times AM_0 = 1$.

Comme $\|\vec{n}\| = \sqrt{2}$, on en déduit que $\overrightarrow{AM_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Prises d'initiatives

124 Le trajet aller est $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{BC}$, le trajet retour est $\overrightarrow{CA}$.



Passer de la direction Est à la direction Nord-Est signifie que l'angle $\widehat{xBc}$ mesure 45° ou $\frac{\pi}{4}$.

Ainsi $\widehat{ABC}$ mesure $\frac{3\pi}{4}$.

On a $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos\widehat{ABC}$

$$= 8^2 + 2^2 - 2 \times 8 \times 2 \times \cos\frac{3\pi}{4} = 68 + 16\sqrt{2}.$$

$AC \approx 9{,}52$, la longueur du trajet du retour est de 9,52 milles environ, la vitesse est donc de 9,52 nœuds environ. En $km \cdot h^{-1}$, cette vitesse est $9{,}52 \times 1{,}832$ soit environ $17{,}44\ km \cdot h^{-1}$.

125 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 09S_exercice125.ggb (Geogebra), 09S_exercice125.g2w (Geoplan) et 09S_ exercice125.fig (Cabri).***

Si on note $a = CP$ et $b = CQ$, on démontre que le minimum est atteint lorsque $x = \sqrt{ab}$.

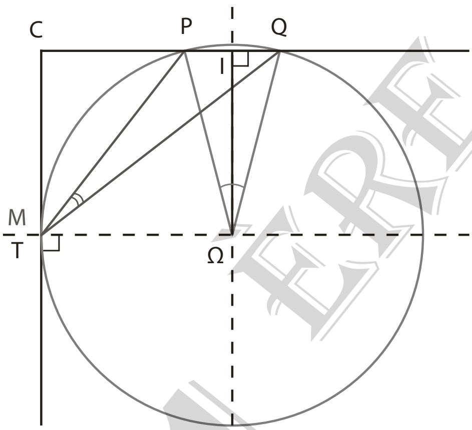
Méthode géométrique :

On trace le cercle $\mathscr{C}$ passant par les points M, P et Q, on note Ω son centre.

L'angle inscrit $\widehat{PMQ}$ est maximal lorsque l'angle au centre $\widehat{P\Omega Q}$ est maximal, ce qui a lieu lorsque le rayon du cercle est minimal.

Or, le rayon est minimal lorsque le cercle $\mathscr{C}$ est tangent à (CM).

Déterminons la valeur de x lorsque cette condition est vérifiée.



Soit T le projeté orthogonal de Ω sur (CM) et I le projeté orthogonal de Ω sur (CP).

Quand le cercle est tangent à (CM), M est en T.

Par construction, $T\Omega = CI$ et $CT = I\Omega$.

Comme ΩPQ est isocèle, I milieu de [PQ] et on a :

$$\widehat{P\Omega I} = \widehat{I\Omega P} = \frac{1}{2}\widehat{P\Omega Q}.$$

D'autre part, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{PMQ} = \frac{1}{2}\widehat{P\Omega Q}$. Ainsi, $\widehat{PMQ} = \widehat{P\Omega I}$.

De plus $\Omega P = \Omega Q = \Omega T = CI$ et $x = CT = \Omega I$.

Si on note $a = CP$ et $b = CQ$, $CI = \dfrac{b+a}{2}$ et $PQ = b - a$ soit $IP = \dfrac{b-a}{2}$.

Dans ΩIP, on a $\Omega I^2 = \Omega P^2 - IP^2$.

On peut donc écrire $x^2 = \left(\dfrac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$.

En simplifiant, on obtient $x^2 = ab$ soit $x = \sqrt{ab}$.

Autres méthodes (exemples) :

• Soit x la distance CM, on a :

$PM = \sqrt{x^2 + 32{,}2^2}$ et $QM = \sqrt{x^2 + 37{,}8^2}$.

$$\cos\widehat{PMQ} = \frac{x^2 + 32{,}2^2 + x^2 + 37{,}8^2 - 5{,}6^2}{2\sqrt{x^2 + 32{,}2^2}\sqrt{x^2 + 37{,}8^2}}$$

$$= \frac{x^2 + 1217{,}16}{\sqrt{x^2 + 1428{,}84}\sqrt{x^2 + 1036{,}84}}$$

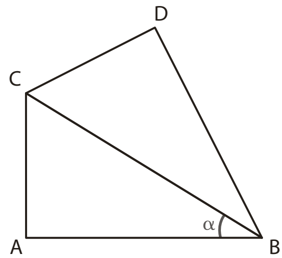
On est amené à étudier les variations de cette fonction (ou de son carré), on peut pour cela s'aider d'un logiciel de calcul formel.

Cette méthode nécessite le fait que α est minimal lorsque $\cos\alpha$ est maximal (pour $\alpha \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$).

• On peut utiliser la tangente de l'angle $\widehat{PMQ}$. Pour cela, on calcule le sinus et le cosinus des angles $\alpha = \widehat{CMP}$ et $\beta = \widehat{CMQ}$. On est amené à étudier les variations de la fonction $f(x) = \dfrac{(b-a)x}{x^2 + ab}$.

Cette méthode nécessite $\sin(\beta - \alpha)$, $\cos(\beta - \alpha)$ et le fait que θ est minimal lorsque $\tan\theta$ est minimal (pour $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$).

126 Soit $\alpha = \widehat{ABC}$. On vérifie que $\alpha = \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \dfrac{\theta}{2}$.



Comme $BC = \sqrt{5}x$ on a :

$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } \cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Alors, $\cos\theta = \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \dfrac{3}{5}$.

et $\sin\theta = \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}$.

F Activités TICE

TP 1 Les écrans géants

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 09S_TP1.ggb (Geogebra), 09S_TP1.g2w (Geoplan) et 09S_TP1.fig (Cabri).

Partie A

La figure est simple à réaliser. Par contre, la position du point M n'est pas aisée à déterminer.

Il peut être intéressant de construire :

– le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre I (milieu de [AB]) passant par C,

- le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre J (symétrique de B par rapport à A) passant par B,

puis de comparer les mesures des angles $\alpha = \widehat{AMB}$, $\beta = \widehat{BMC}$ et $\gamma = \widehat{CMD}$ en fonction de la position du point M par rapport à ces deux cercles.

Si M est à l'extérieur des deux cercles : $\alpha < \beta < \gamma$.

Si M est à l'intérieur des deux cercles : $\alpha > \beta > \gamma$.

Si M est à l'intérieur d'un seul des deux cercles, l'ordre n'est pas toujours le même, mais on peut quand même constater qu'à l'intérieur de $\mathscr{C}_1$, β a toujours la plus grande mesure et à l'intérieur de $\mathscr{C}_2$, β a toujours la plus petite mesure. Enfin quand M est à l'intersection des deux cercles, les trois mesures sont les mêmes.

Remarque : l'influence des ces deux cercles dans la résolution du problème sera explicitée dans la suite du TP.

Partie B

1. a. Dans AMB, on a $\dfrac{AB}{\sin\theta} = \dfrac{BM}{\sin a}$ d'où $\dfrac{AB}{MB} = \dfrac{\sin\theta}{\sin a}$.

Dans BMC, on a $\dfrac{BC}{\sin\theta} = \dfrac{BM}{\sin(\pi - c)}$

d'où $\dfrac{BC}{BM} = \dfrac{\sin\theta}{\sin(\pi - c)}$ soit $\dfrac{BC}{MB} = \dfrac{\sin\theta}{\sin c}$.

b. Dans AMC, on a $\dfrac{CM}{\sin a} = \dfrac{AM}{\sin(\pi - c)}$

d'où $\dfrac{CM}{AM} = \dfrac{\sin a}{\sin(\pi - c)}$

soit $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{\sin a}{\sin c}$

c. D'après **1. c.**, on a : $\sin a = \dfrac{MB \times \sin\theta}{AB}$

et $\sin c = \dfrac{MB \times \sin\theta}{BC}$ d'où $\dfrac{\sin a}{\sin c} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2}{1} = 2$.

On en déduit que $\dfrac{MC}{MA} = 2$ soit $MC = 2MA$.

2. Le raisonnement est le même que celui utilisé dans la question **1**.

Partie C

1. Les coordonnées sont A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(3 ; 0) et D(13 ; 0).

2. a. MC = 2MA équivaut à :

$MC^2 = 4MA^2$

$(x - 3)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2)$

$3x^2 + 3y^2 + 6x - 9 = 0$

$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$

$(x + 1)^2 - 1 + y^2 - 3 = 0$

$(x + 1)^2 + y^2 = 4$

b. L'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre J(–1 ; 0) et de rayon 2 (c'est le cercle $\mathscr{C}_2$ évoqué dans la partie A).

3. a. MD = 5MB équivaut à :

$MD^2 = 25MB^2$

$(x - 13)^2 + y^2 = 25(x - 1)^2 + y^2$

$24x^2 + 24y^2 - 24x - 144 = 0$

$x^2 + y^2 - x - 6 = 0$

$\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + y^2 - 6 = 0$

$\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{25}{4}$

b. L'ensemble $\mathscr{E}'$ est le cercle de centre $I\left(\dfrac{1}{2} ; 0\right)$ et de rayon $\dfrac{5}{2}$ (c'est le cercle $\mathscr{C}_1$ évoqué dans la partie A).

4. Les coordonnées d'un point M commun aux deux ensembles sont solution du système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - 6 = 0 \end{cases}.$$

On obtient deux solutions $M_0(-1 ; 2)$ et $M_1(-1 ; -2)$. M_1 correspond à un point situé sous l'axe (AB) c'est-à-dire derrière l'écran, donc seul M_0 est compatible avec la situation.

Partie D

1. On obtient $\theta \approx 18{,}43°$.

2. $AM_0 = \sqrt{5}$, $BM_0 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $CM_0 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $DM_0 = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

3. Il faut déterminer les valeurs exactes de $\cos\widehat{AM_0B}$, $\cos\widehat{BM_0C}$ et $\cos\widehat{CM_0D}$.

Dans AM_0B :

$$AB^2 = AM_0{}^2 + BM_0{}^2 - 2AM_0 \times BM_0 \times \cos\widehat{AM_0B}$$

soit $\cos\widehat{AM_0B} = \dfrac{\sqrt{5}^2 + \sqrt{8}^2 - 1^2}{2\sqrt{5}\sqrt{8}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

De même $\cos\widehat{BM_0C} = \dfrac{\sqrt{8}^2 + \sqrt{20}^2 - 2^2}{2\sqrt{8}\sqrt{20}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

et $\cos\widehat{CM_0D} = \dfrac{\sqrt{20}^2 + \sqrt{200}^2 - 10^2}{2\sqrt{20}\sqrt{200}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

4. Finalement, on a $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $\theta \approx 18{,}435°$.

Le spectateur doit être situé à 2 mètres du mur où sont disposés les écrans et 1 mètre à droite du dernier de ces écran. Il aura peu de recul par rapport à ces trois écrans et ne sera en face d'aucun d'eux.

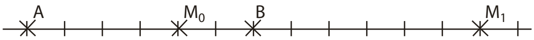
TP 2 Les cercles d'Apollonius

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 09S_TP2.ggb (Geogebra) et 09S_TP2.g2w (Geoplan).

Partie A

1. On a $MA = MB$, l'ensemble $\mathscr{E}_1$ est la médiatrice de [AB].

2. a.



b. On a $MA = 2MB$, sur le segment [AB], on peut placer le point M_0.

c. On peut aussi placer le point M_1 sur la droite (AB).

3. a. $a = 3$, les coordonnées de B sont donc B(3 ; 0) et celles de A sont A(–3 ; 0).

b. Évident (des distances étant toujours positives).

c. Soit M(x ; y), $MA^2 = 4MB^2$ équivaut à :

$(x + 3)^2 + y^2 = 4(x - 3)^2 + y^2$

$3x^2 + 3y^2 - 30x + 27 = 0$

$x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$

$(x - 5)^2 - 25 + y^2 + 9 = 0$

$(x - 5)^2 + y^2 = 16$

d. L'ensemble $\mathscr{E}_2$ est le cercle de centre I(5; 0) et de rayon 4.

Partie B

1. Soit M(x; y), on a $MA = kMB$, ce qui équivaut à : $MA^2 = k^2MB^2$ donc à :

$(x + 3)^2 + y^2 = k^2((x - 3)^2 + y^2)$

$(k^2 - 1)x^2 + (k^2 - 1)\, y^2 - 6(k^2 + 1)x + 9(k^2 - 1) = 0$

$x^2 + y^2 - 6 \times \dfrac{k^2+1}{k^2-1}x + 9 = 0$ (si $k \neq 1$)

2. $x^2 + y^2 - 6 \times \dfrac{k^2+1}{k^2-1}x + 9 = 0$ équivaut à :

$$\left(x - 3 \times \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 - 9\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 + 9 = 0$$

$$\left(x - 3 \times \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = 9\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 - 9$$

$$\left(x - 3 \times \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = 9 \times \frac{(k^2+1)^2 - (k^2-1)^2}{(k^2-1)^2}$$

$$\left(x - 3 \times \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = 9 \times \frac{4k^2}{(k^2-1)^2}$$

$$\left(x - \frac{3(k^2+1)}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{6k}{k^2-1}\right)^2$$

On obtient l'équation d'un cercle de centre C $\left(\dfrac{3(k^2+1)}{k^2-1} ; 0\right)$ de rayon $R = \dfrac{6k}{k^2-1}$ si $k^2 - 1 > 0$ soit $k > 1$ ou de rayon $R = \dfrac{6k}{1-k^2}$ si $k^2 - 1 < 0$ soit $k < 1$.

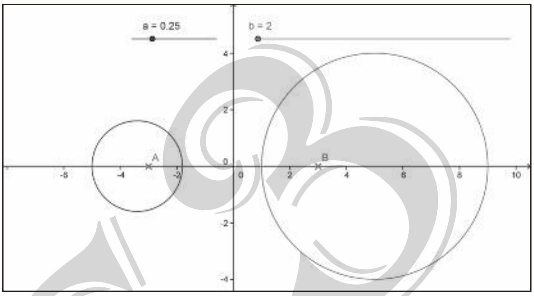
Partie C

1. Avec Geogebra, il suffit de créer deux curseurs, l'un variant de 0,01 à 0,99 par pas de 0,01 et l'autre variant de 1,01 à 100 par pas de 0,01.

Avec GeoPlan, il faut créer deux « variables réelle libres dans un intervalle » (Menu : Créer Numérique) l'une comprise entre 0,01 et 0,99 et l'autre comprise entre 1,01 et 100. Ensuite, on peut « piloter au clavier » ces variables (Menu : Piloter).

2. Avec Geogebra, saisir l'équation dans le champ de saisie (en bas de la page).

Avec GeoPlan, créer un cercle défini par son centre et son rayon (Menu : Créer Ligne).



3. Pour $0 < a < 1$, le centre des cercles se déplace sur l'axe des abscisses à gauche du point A, plus a est proche de 0, plus le centre est proche de A et plus le rayon est petit.

Pour $b > 1$, le centre des cercles se déplace sur l'axe des abscisses à droite du point B, plus b est grand, plus le centre est proche de B et plus le rayon est petit.

Partie D

1. a. $f'(x) = \dfrac{-6(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$; cette dérivée est toujours négative, donc f est décroissante sur [1,01 ; 100].

b.

x	1,01	100
$f(x)$	301,5 ↘	0,06

c. Les rayons des cercles diminuent quand x augmente.

d. Les rayons des cercles augmentent quand x augmente.

2. a. $f'(x) = \dfrac{-12x}{(x^2-1)^2}$; cette dérivée est toujours négative, donc f est décroissante sur]1 ; +∞[.

b.

x	1,01	100
$f(x)$	301,5 ↘	3,0006

c. Les centres des cercles ont des abscisses qui diminuent et qui se rapprochent de 3 quand x augmente.

d. Les centres des cercles ont des abscisses qui augmentent et se rapprochent de –3 quand x diminue (en se rapprochant de 0).

CHAPITRE 10

Statistiques

A Le programme

L'étude et la comparaison de séries statistiques menées en classe de Seconde se poursuivent avec la mise en place de nouveaux outils dans l'analyse de données. L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues, par exemple, de fichiers mis à disposition par l'Insee).

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Statistique descriptive, analyse de données Caractéristiques de dispersion : variance, écart-type. Diagramme en boîte.	• Utiliser de façon appropriée les deux couples usuels qui permettent de résumer une série statistique : (moyenne, écart-type) et (médiane, écart interquartile). • Étudier une série statistique ou mener une comparaison pertinente de deux séries statistiques à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.	On utilise la calculatrice ou un logiciel pour déterminer la variance et l'écart-type d'une série statistique. Des travaux réalisés à l'aide d'un logiciel permettent de faire observer des exemples d'effets de structure lors du calcul de moyennes.

B Notre point de vue

Nous avons regroupé dans ce chapitre la partie du programme relative aux statistiques descriptives et l'analyse de données. Les notions nouvelles concernant ce chapitre sont peu nombreuses : variance, écart-type et diagramme en boîte.
Comme le demande le programme officiel, le plus souvent possible, les données utilisées sont des données récentes issues de sites officiels : INSEE, INED, OCDE, EuroStat…
Les activités 1 « Dépenses dans l'OCDE » et 2 « Répartition des données de séries » permettent la découverte de l'écart interquartile, des diagrammes en boîte et de leur utilisation. Ces notions constituent l'essentiel de la première page de cours.
L'activité 3 « Peut-on mesurer la régularité ? » permet la découverte de nouvelles caractéristiques de dispersion : la variance et l'écart-type. L'activité 4 « Dispersion de deux séries statistiques » utilise la calculatrice pour comparer la dispersion de deux séries statistiques à l'aide de leurs écart-types. Ces notions sont reprises dans la 2e page de cours.
À l'issue de ce chapitre, les élèves ont à leur disposition les deux couples usuels qui permettent de résumer une série statistique : « moyenne - écart-type » et « médiane - écart interquartile ». Les deux pages de cours se terminent chacune par un paragraphe présentant succinctement quand et comment utiliser chacun de ces couples.
La page **« Chercher avec méthode »** donne l'occasion aux élèves de comparer deux séries statistiques à l'aide du couple « médiane - écart interquartile » et du diagramme en boîte pour ensuite décider si les deux séries sont, ou non, notablement différentes.

L'utilisation des TICE a été développée à plusieurs endroits dans le chapitre :

• Dans l'activité 3, un logiciel de géométrie dynamique permet de visualiser la notion de dispersion des valeurs d'une série. De plus, les activités 3 et 4 donnent l'opportunité d'une première utilisation de la calculatrice.

• Les pages cours et méthodes montrent comment utiliser la calculatrice, et dans certains cas un tableur, pour effectuer les différents calculs statistiques et représenter des diagrammes en boîte. Ces manipulations sont détaillées dans les pages calculatrices en fin du manuel de l'élève.

• Le programme officiel demandant d'utiliser la calculatrice, ou un logiciel, pour déterminer la variance et l'écart-type d'une série statistique, de nombreux exercices permettent ou nécessitent l'utilisation de ces outils TICE.

• Le programme officiel ayant comme objectif « de faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues, par exemple, de fichiers mis à disposition par l'INSEE) », l'étude de ce type de données au volume souvent important nécessite la fourniture de fichiers et l'utilisation d'outils TICE adaptés, c'est le cas dans certains exercices proposés.

Enfin, comme dans les autres chapitres les TP donnent la possibilité aux élèves d'utiliser les outils TICE dans le cadre d'une réelle démarche de recherche en mathématiques.

• Le TP1 « Production dans une usine » permet d'utiliser un tableur pour effectuer certains calculs statistiques.

• Le TP2 « Simulation de sondages » permet à l'élève, à l'aide d'un tableur, de construire et d'étudier des séries statistiques afin de simuler des temps d'attente.

• Le TP3 « Un drôle de paradoxe » permet de mettre en lumière un phénomène étonnant lié à la structure même des données proposées.

Les notions abordées dans le chapitre 10

1. Écart interquartile – Diagramme en boîte

2. Variance et écart-type

C Avant de commencer

Se tester avec des QCM

Le QCM et les exercices proposés dans cette page permettent de faire le point sur la lecture de tableau ou de graphiques et sur le calcul de certains paramètres statistique étudiés au collège ou en Seconde.

1 C ; **2** D ; **3** C ; **4** D ; **5** B ;
6 D ; **7** C ; **8** C ; **9** C.

Se tester avec des exercices

10 Tableau des effectifs cumulés :

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3
Effectifs	13	11	4	**2**
Effectifs cumulés croissants	**13**	**24**	**28**	**30**

11 D'après le tableau des effectifs cumulés croissants, il y a 28 élèves qui ont au maximum deux frères et sœurs. Le pourcentage correspondant est : $\frac{28}{30} \times 100$, soit environ 93 %.

12 La médiane est la demi-somme de la 15^e et de la 16^e valeur (qui valent toutes les deux 1 d'après le tableau des effectifs cumulés croissants), ainsi la médiane est 1.
La série a 30 valeurs : $3 \times \frac{30}{4} = 22{,}5$.
Le troisième quartile est la 23^e valeur, soit 1.

13 Le nombre moyen de frères et sœurs des élèves de cette classe est :
$\frac{13 \times 0 + 11 \times 1 + 4 \times 2 + 2 \times 3}{30} = \frac{25}{30}$, soit environ 0,83.

D Activités

Activité 1 Dépenses dans l'OCDE

Cette activité introduit la notion d'intervalle et d'écart interquartile. Un des objectifs essentiels est de faire découvrir à l'élève que l'intervalle interquartile contient environ 50 % des valeurs et que l'étendue de cet intervalle est donnée par l'écart interquartile.
Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 10S_activite1.xls (Excel 2003), 10S_activite1.xlsx (Excel 2007) et 10S_activite1.ods (OpenOffice).

Pour répondre aux questions, il faut ordonner les valeurs de la série (voir ci-contre) :

1	Slovaquie	3 219
2	Pologne	3 590
3	Hongrie	4 225
4	Rép. Tchèque	5 527
5	Portugal	6 833
6	Slovénie	7 267
7	Finlande	7 829
8	Allemagne	7 841
9	Italie	8 004
10	Espagne	8 730
11	Royaume-Uni	8 892
12	Belgique	8 992
13	Suède	9 143
14	Irlande	9 375
15	France	9 532
16	Danemark	9 675
17	Pays-Bas	10 248
18	Autriche	10 641
19	Luxembourg	17 928

1. La série comporte 19 termes. La médiane est la 10^{e} valeur, soit 8 730.

2. a. $\frac{19}{4} = 4{,}75$; le premier quartile est la 5^{e} valeur, soit 6 833.

$3 \times \frac{19}{4} = 14{,}25$; le troisième quartile est la 15^{e} valeur, soit 9 532.

L'intervalle interquartile est [6 833 ; 9 532].

b. L'écart interquartile est 9 532 – 6 833, soit 2 699.

3. a. L'affirmation est vraie, c'est la définition de la médiane.

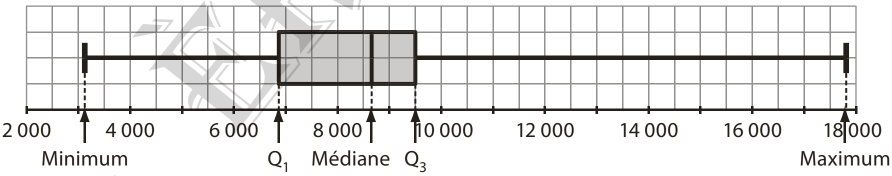
b. L'affirmation est vraie, car 6 833 correspond au 1er quartile soit 25 % de l'effectif environ et 9 532 correspond au troisième quartile soit 75 % de l'effectif environ.

Activité 2 Répartition des données de séries

Cette activité permet d'introduire la notion de diagramme en boîte et de découvrir comment comparer deux séries à l'aide de ces diagrammes.
Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 10S_activite2.xls (Excel 2003),10S_activite2.xlsx (Excel 2007) et 10S_activite2.ods (OpenOffice).

1. a. Les quatre intervalles sont tous d'amplitudes différentes. **b.** Voir ci-dessous.

c. Les paramètres utilisés pour construire la boîte sont le premier quartile, la médiane et le troisième quartile. Ceux utilisés pour construire les moustaches sont le minimum et le maximum.



d. La France correspond au troisième quartile de la série.

2. Il faut ordonner les valeurs de la série (voir ci-contre) :

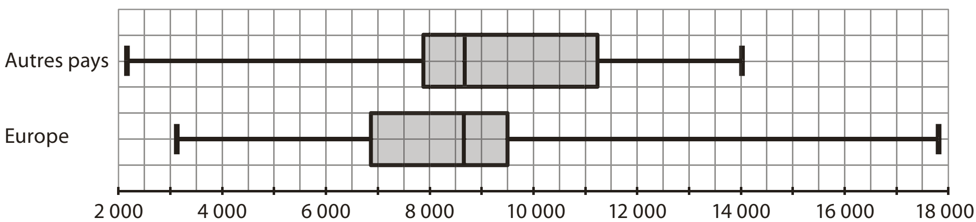
1	Mexique	2 236
2	Nouvelle-Zélande	5 933
3	Corée	7 860
4	Islande	8 349
5	Japon	8 760
6	Australie	8 840
7	États-Unis	11 301
8	Norvège	11 997
9	Suisse	13 982

La série comporte 9 termes. La médiane est la 5^{e} valeur, soit 8 760.

$\frac{9}{4} = 2{,}25$; le premier quartile est la 3^{e} valeur, soit 7 860.

$3 \times \frac{9}{4} = 6{,}75$; le troisième quartile est la 7^{e} valeur, soit 11 301.

On obtient :

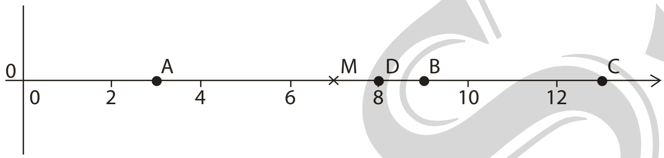


3. On peut constater que les deux séries ont pratiquement la même médiane.
Par contre, l'écart interquartile est un peu moins important en Europe que dans les autres pays et la répartition des données, autour de la médiane, est sensiblement différente :
en Europe, les données sont plus dispersées entre le premier quartile et la médiane, et au-delà du troisième quartile, et sont plus concentrés entre la médiane et le troisième quartile ; dans les autres pays c'est un peu le contraire.

Activité 3 Peut-on mesurer la régularité ?

Cette activité permet de mesurer la dispersion des valeurs d'une série statistique autour d'une valeur choisie et de constater que cette quantité est minimale quand la valeur choisie est égale à la moyenne de la série statistique. Ce qui conduit à la définition de la variance et de l'écart-type.
Fichier associé sur www.bordas-indice.fr : 10S_activite3.ggb (Geogebra).

1. a. Moyenne pour Michaël : $\dfrac{3+9+13+8}{4} = 8{,}25$; moyenne pour Luc : $\dfrac{5+12+12+4}{4} = 8{,}25$.
Médiane pour Michaël : $\dfrac{8+9}{2} = 8{,}5$; médiane pour Luc : $\dfrac{5+12}{2} = 8{,}5$.
b. Le joueur qui semble le plus régulier est Luc : ses scores vont de 5 à 12 alors que ceux de Michaël vont de 3 à 13.
2. a. La valeur de S semble minimale pour $x = 8{,}25$; S vaut alors 5,25. Plus on s'éloigne de cette valeur de 8,25, plus S augmente.
b.



On obtient $S = (7-3)^2 + (7-9)^2 + (7-13)^2 + (7-8)^2 = 57$ et $V = \dfrac{57}{4} = 14{,}25$
c. $V = \dfrac{(x-3)^2+(x-9)^2+(x-13)^2+(x-8)^2}{4}$.
d.

Fonction

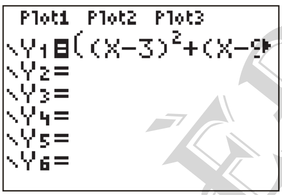
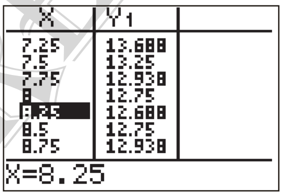
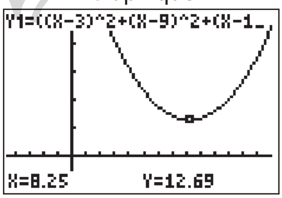


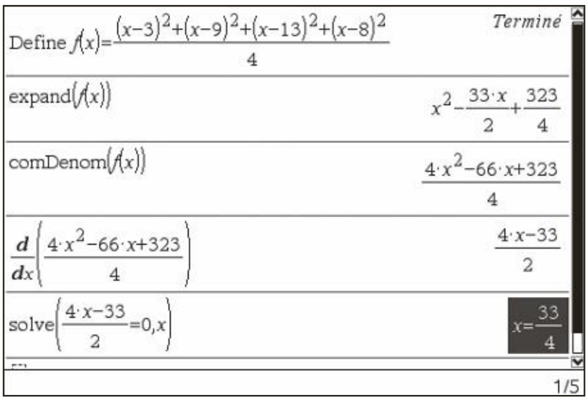
Tableau de valeurs



Graphique



e. En explorant le tableau de valeurs, il semble que V soit minimale pour $x = 8{,}25$, ce qui correspond à la valeur de moyenne de la série. V vaut alors 12,6875.
Remarque : L'objectif de cette activité n'étant pas de démontrer, mais seulement de constater, que la valeur minimale s'obtient quand x correspond à la moyenne de la série ; il n'est pas demandé aux élèves d'étudier la fonction obtenue.
Mais c'est bien sûr tout à fait possible de le faire :



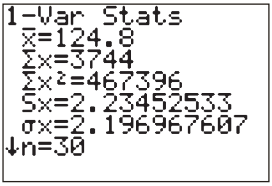
3. Pour Luc la valeur de V est plus grande que pour Michaël, les résultats de la série de Luc sont donc plus dispersés que ceux de Michaël.

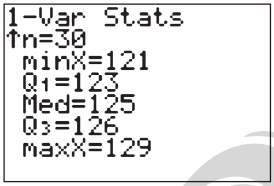
Activité 4 Dispersion de deux séries statistiques

Cette courte activité a pour objectif de comparer la dispersion de deux séries statistiques à l'aide des valeurs de leurs écart-types, ces écart-types étant obtenus avec l'aide de la calculatrice.

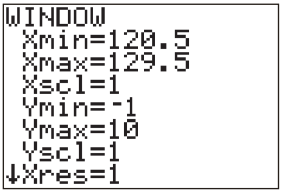
Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 10S_activite4.xlsx (Excel 2007),10S_activite4.xls (Excel 2003) et 10S_activite4.ods (OpenOffice).

1. a. À l'aide de la calculatrice, on obtient une moyenne de 124,8 et une médiane de 125 :

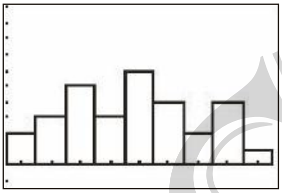




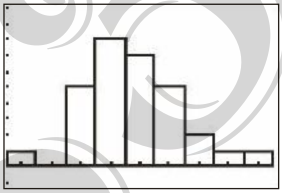
b. Les deux séries ont même moyenne et même médiane, par contre la dispersion des données est différente. On peut le constater en représentant graphiquement ces séries :



Fenêtre graphique



Machine 1



Machine 2

2. a. L'écart-type du premier échantillon est environ 2,197 : il est plus important que celui du second échantillon.

b. On peut en déduire que les données du premier échantillon sont plus dispersées que celles du second échantillon, donc que la 2^{e} machine est mieux réglée que la 1re.

E Exercices

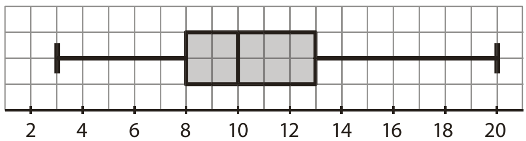
POUR DÉMARRER

1 **1.** La série est déjà ordonnée et possède 9 valeurs.
Médiane : 5^{e} valeur, soit 10. Premier quartile : 3^{e} valeur, soit 5. Troisième quartile : 7^{e} valeur, soit 29.
L'écart interquartile est 29 – 5, soit 24.
2. La série est déjà ordonnée et possède 10 valeurs.
Médiane : entre la 5^{e} et la 6^{e} valeur, soit 14.
Premier quartile : 3^{e} valeur, soit 9.
Troisième quartile : 8^{e} valeur, soit 20.
L'écart interquartile est 20 – 9, soit 11.
3. La série possède 8 valeurs qu'il faut commencer par ordonner : 2 – 3 – 7 – 9 – 11 – 13 – 18 – 21.
Médiane : entre la 4^{e} et la 5^{e} valeur, soit 10. Premier quartile : 2^{e} valeur, soit 3. Troisième quartile : 6^{e} valeur, soit 13. L'écart interquartile est 13 – 3, soit 10.

2 **1.** Comme le premier quartile est 50 s, on sait qu'environ 25 % des communications ont duré 50 s ou moins. Comme le troisième quartile est 2 min 50 s, on sait qu'environ 75 % des communications ont duré 2 min 50 s ou moins donc qu'environ 25 % des communications ont duré 2 min 50 s ou plus.
2. Comme le premier quartile est 50 s et le troisième quartile est 2 min 50 s, on peut dire qu'environ la moitié des conservations ont duré entre 50 s et 2 min 50 s.

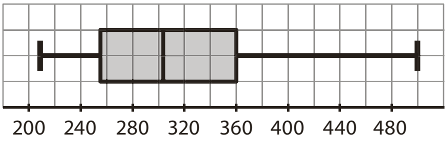
3 **1.** La médiane est 11.
2. Environ 50 % des observations ont une valeur inférieure ou égale à 11.
3. L'écart interquartile est 12 – 8, soit 4.
4. Environ 50 % des observations ont une valeur située dans l'intervalle interquartile.

4



5 **1.** La série possède 12 valeurs qu'il faut commencer par ordonner : 210 – 240 – 255 – 260 – 300 – 300 – 310 – 320 – 360 – 400 – 470 – 500.
Médiane : entre la 6^{e} et la 7^{e} valeur, soit 305. Premier quartile : 3^{e} valeur, soit 255. Troisième quartile : 9^{e} valeur, soit 360.
L'écart interquartile est 360 – 255, soit 105.

2. On obtient le diagramme en boîte :



6 **1.**

	Min.	Q_1	Méd.	Q_3	Max.	Étendue	Inter-quartile
Classe 1	8	10	11,5	14	17	9	4
Classe 2	5	8	10	13,5	17	12	5,5

2. La classe 1 a globalement des résultats meilleurs et plus homogènes que ceux de la classe 2.

7 **1.** La moyenne est $\dfrac{7+10+11+12}{4}$, soit 10.

La variance est $\dfrac{7^2+10^2+11^2+12^2}{4}-10^2$, soit 3,5.

L'écart-type est $\sqrt{3,5}$, soit environ 1,87.

2. La moyenne est $\dfrac{2+5+6+7+10}{5}$, soit 6.

La variance est $\dfrac{2^2+5^2+6^2+7^2+10^2}{5}-6^2$, soit 6,8.

L'écart-type est $\sqrt{6,8}$, soit environ 2,61.

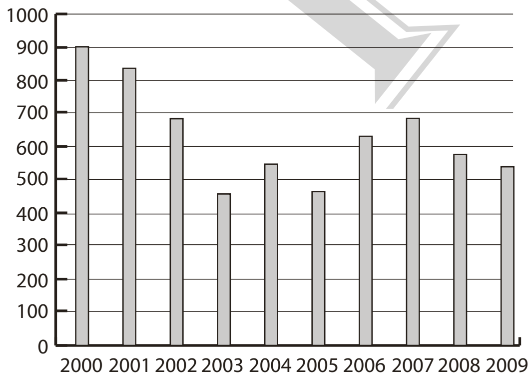
8 On obtient : $\bar{x}=9,4$ et $\sigma \approx 2,154$.

```
1-Var Stats
 x̄=9.4
 Σx=47
 Σx²=465
 Sx=2.408318916
 σx=2.154065923
↓n=5
```

9 On utilise la calculatrice, on obtient une moyenne de 8,02 et un écart-type de 0,112 environ.

```
1-Var Stats
 x̄=8.02
 Σx=48.12
 Σx²=385.9974
 Sx=.1224744871
 σx=.1118033989
↓n=6
```

10 **1.**



2. On utilise la calculatrice, on obtient : $\bar{x}=632$ et $\sigma=140,48$.

11 **1.** Tableau des fréquences :

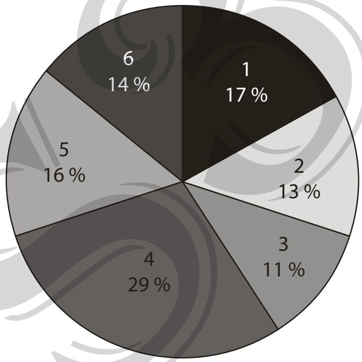
Face	1	2	3	4	5	6
Fréquence	0,17	0,13	0,11	0,29	0,16	0,14

2. Déterminons la mesure des angles des différents secteurs angulaires :

Face	1	2	3	4	5	6	**Total**
Angle (en °)	61	47	40	104	58	50	**360**

Exemple de calcul pour la face 1 : $\dfrac{17\times 360}{100}\approx 61°$.

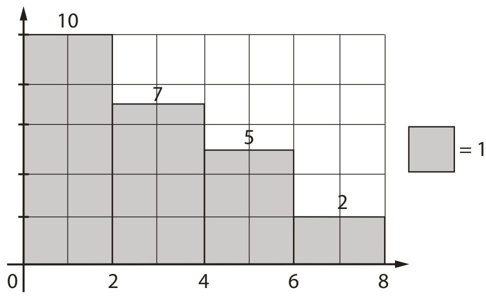
Diagramme circulaire obtenu :



3. À l'aide de la calculatrice, on obtient une moyenne de 3,56 environ et un écart-type de 1,64 environ.

```
1-Var Stats
 x̄=3.56
 Σx=356
 Σx²=1536
 Sx=1.647281201
 σx=1.6390241
↓n=100
```

12 **1.**



2. Pour effectuer les calculs, il faut déterminer les centres des classes.

Classe	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[
Centre	1	3	5	7
Effectifs	10	7	5	2

On utilise la calculatrice. On obtient : $\bar{x}\approx 2,9$ et $\sigma \approx 1,96$.

POUR S'ENTRAÎNER

13 **1.**

Face du dé	1	2	3	4	5	6
Nombre de lancers	3	5	4	3	5	0
Effectifs cumulés	3	8	12	15	20	20

Médiane : entre la 10^e^ et la 11^e^ valeur, soit 3. Premier quartile : 5^e^ valeur, soit 2. Troisième quartile : 15^e^ valeur, soit 4. L'écart interquartile est donc 2.

2. L'étendue de la série est 5 – 1 = 4, c'est bien le double de l'écart interquartile.

Ce n'est bien sûr pas toujours le cas.

14 La série est déjà ordonnée et possède 27 valeurs. Médiane : 14^e^ valeur, soit 76,5. Premier quartile : 7^e^ valeur, soit 71,3. Troisième quartile : 21^e^ valeur, soit 77,7. L'écart interquartile est 77,7 – 71,3, soit 6,4.

15 **1.** On ordonne les 24 valeurs de la série :

106,05 – 106,49 – 106,51 – 106,64 – 106,71 – 106,79 – 106,87 – 106,99 – 107,03 – 107,11 – 107,18 – 107,23 – 107,28 – 107,34 – 107,34 – 107,4 – 107,6 – 107,99 – 108,57 – 108,68 – 108,89 – 108,95 –109,04 – 109,04

Médiane : entre la 12^e^ et la 13^e^ valeur, soit $\frac{107,23+107,28}{2}$ = 107,255. Premier quartile : 6^e^ valeur, soit 106,79. Troisième quartile : 18^e^ valeur, soit 107,99.

2. Si on ajoute 108,91, la nouvelle série ordonnée possède 25 valeurs :

106,05 – 106,49 – 106,51 – 106,64 – 106,71 – 106,79 – 106,87 – 106,99 – 107,03 – 107,11 – 107,18 – 107,23 – 107,28 – 107,34 – 107,34 – 107,4 – 107,6 – 107,99 – 108,57 – 108,68 – 108,89 – 108,91 – 108,95 – 109,04 – 109,04

Médiane : la 13^e^ valeur, soit 107,28. Premier quartile : la 7^e^ valeur, soit 106,87. Troisième quartile : la 19^e^ valeur, soit 108,57.

Les extremums sont inchangés, le 1^er^ quartile et la médiane sont légèrement modifiés, la modification du 3^e^ quartile est plus importante.

17 L'effectif est pair, la médiane est entre la 8^e^ et la 9^e^ valeur, le 1^er^ quartile est la 4^e^ valeur et le troisième quartile est la 12^e^ valeur.

De plus, il faut que Maximum – Minimum = 15 et $Q_3 - Q_1 = 5$.

On peut proposer comme série : **2** – 5 – 6 – **7** – 8 – 9 – 9 – **10** – **10** – 11 – **12** – 12 – 13 – 14 – 15 – **17**

18 – Si au moins 25 % des valeurs sont inférieures ou égales à 14, le 1^er^ quartile est 14.

– Si exactement 50 % des valeurs sont inférieures ou égales à 24,5 la médiane est 24,5.

De plus, comme les valeurs de la série sont entières alors que la médiane n'est pas une valeur entière, la série doit avoir un effectif pair.

– Si au moins 75 % des valeurs sont inférieures ou égales à 30, le 3^e^ quartile est 30.

Par exemple, pour une série ordonnée de 14 valeurs, on peut proposer :

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Valeur	8	10	12	**14**	16	18	**24**	**25**	26	28	**30**	32	34	36

19 Faux, l'écart interquartile ne dépend pas de la plus grande valeur de la série mais seulement des 1^er^ et 3^e^ quartiles (sauf si la plus grande valeur est égale au 3^e^ quartile).

20 Vrai, le premier quartile est la 86^e^ valeur et le 3^e^ quartile est la 256^e^ valeur.

21 Faux en général, sauf cas particulier (voir exercice 13).

Par contre l'étendue contient environ deux fois plus de valeurs que l'écart interquartile.

22 Faux, les valeurs des quartiles d'une série peuvent ne pas être entières, de ce fait l'écart interquartile peut lui aussi ne pas être entier.

Par contre l'écart interquartile contient un nombre entier de valeurs.

23 **1.** Faux, l'écart interquartile est inchangé car les valeurs de la série (en particulier les valeurs des quartiles) sont inchangées.

2. Vrai, toutes les valeurs étant doublées, les quartiles sont doublé donc l'écart interquartile aussi.

24 **1.** Commençons par trier les données :

Durée (en h)	1	2	3	4	5	6	7
Effectifs	7	8	8	4	2	2	1
Effectifs cumulés	7	15	23	27	29	31	32

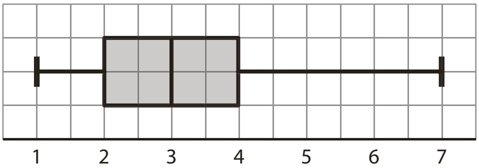
Il y a 32 valeurs, donc la médiane est la moyenne des 16^e^ et 17^e^ valeurs : elle vaut 3.

Le premier quartile est la 8^e^ valeur, soit 2.

Le troisième quartile est la 24^e^ valeur, soit 4.

2. Le minimum étant 1 et le maximum 7, l'étendue est 6. L'écart interquartile est 4 – 2 = 2.

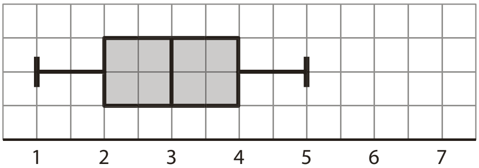
3.



4. En limitant la durée à 5 heures, on obtient :

Durée (en h)	1	2	3	4	5
Effectifs	7	8	8	4	5
Effectifs cumulés	7	15	23	27	32

Il y a toujours 32 valeurs, la médiane et les quartiles sont inchangés, seule la valeur maximale est modifiée. On obtient le diagramme suivant :



On peut observer que, comme l'a constaté l'élève, le diagramme est parfaitement équilibré.

25 **1.** Déterminons les effectifs cumulés :

Diamètre (mm)	5,85	5,9	5,95	6	6,05	6,1	6,15
Nombre d'écrous	27	80	98	56	52	29	8
Cumulés	27	107	205	261	313	342	350

Il y a 350 valeurs donc la médiane est la moyenne des 175^e et 176^e valeurs : elle vaut 5,95.

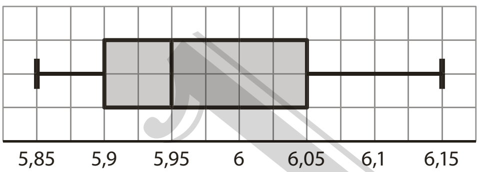
Le premier quartile est la 88^e valeur, soit 5,9.

Le troisième quartile est la 263^e valeur, soit 6,05.

2. Étendue : 6,15 – 5,85 = 0,3 ;

écart interquartile : 6,05 – 5,9 = 0,15.

3.



4. On peut observer que les valeurs sont plus concentrées avant la médiane qu'après : les valeurs après la médiane sont réparties sur un intervalle deux fois plus grand que celles situées avant.

27 **1.** Déterminons les effectifs cumulés :

Nombre de tirs cadrés	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de matchs	0	0	0	1	0	3	4	7	6	6	6	5
Effectifs Cumulés	0	0	0	1	1	4	8	15	21	27	33	38

Nombre de tirs cadrés	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Nombre de matchs	6	7	5	2	1	2	0	1	1	0	0	1
Effectifs Cumulés	44	51	56	58	59	61	61	62	63	63	63	64

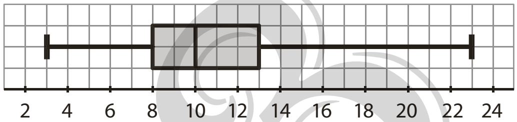
Il y a 64 valeurs, donc la médiane est la moyenne des 32^e et 33^e valeurs : elle vaut 10.

Le premier quartile est la 16^e valeur, soit 8.

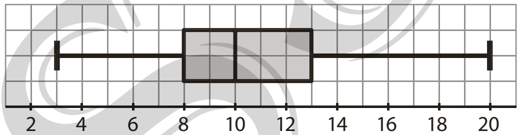
Le troisième quartile est la 48^e valeur, soit 13.

2. Étendue 23 – 3 = 20 ; écart interquartile 13 – 8 = 5.

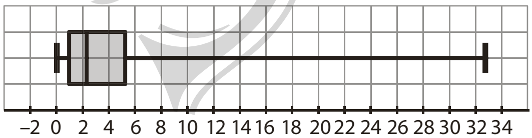
3.



4. Il y a peu de modifications sur le graphique, seule la moustache correspondant au maximum a été modifiée.



28 **1.**



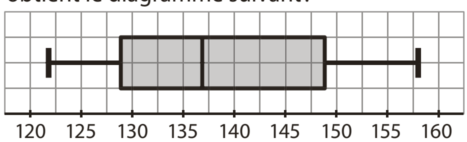
2. a. Vrai car entre le 1er et le 3^e quartile, il y a environ 50 % des valeurs de la série.

B. Faux car 2,2 étant la médiane, il y a environ 50 % des valeurs qui dépassent 2,2.

29 L'écart interquartile étant 20, le 3^e quartile est 129 + 20 = 149.

L'étendue étant 36, le maximum est 122 + 36 = 158.

On obtient le diagramme suivant :



30 Faux : la boîte contient environ (et non pas exactement) 50 % des valeurs : par exemple si l'effectif est impair, il n'est pas possible d'avoir exactement 50 % des valeurs.

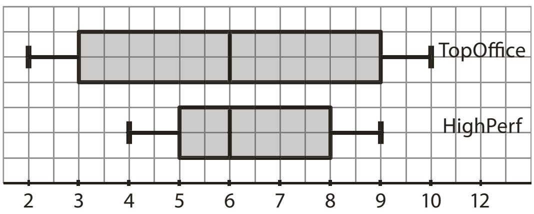
31 **1.** Faux, il y a seulement environ 25 % des valeurs.

2. Vrai : car [25 ; 30] correspond à l'intervalle interquartile.

3. Faux : il y a environ 25 % des valeurs inférieures à 25.

32 **1.** On construit d'abord la boîte en plaçant les quartiles Q_1 et Q_3 puis la barre indiquant la médiane,

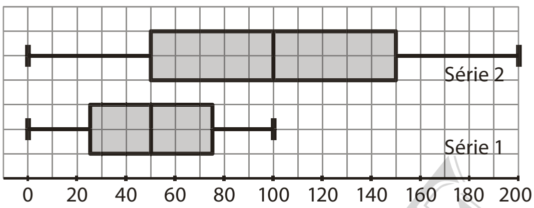
et enfin les moustaches en plaçant le minimum et le maximum.



2. La médiane est la même pour les deux séries, mais la série associée à la marque TopOffice est beaucoup plus dispersée : l'écart interquartile est deux fois plus grand.

3. Sans informations complémentaires, comme par exemple la moyenne, il est difficile de conseiller une marque plutôt qu'une autre. Si on souhaite un nombre de pannes le plus constant possible sur toutes les machines, on peut conseiller la marque HighPerf.

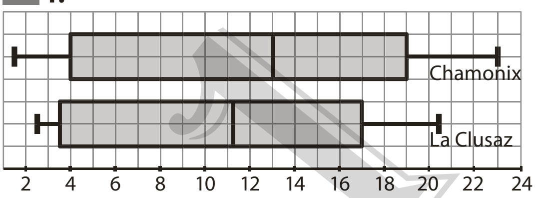
33 La première série est 1, 2, 3, …, 99, 100.
La seconde série est 2, 4, 6, … , 198, 200.



Les deux diagrammes ont la même allure, par contre la seconde série est beaucoup plus dispersée que la première (deux fois plus dispersée).

34 Les deux séries ont la même médiane, par contre les valeurs de la 2de série sont plus dispersées que celle de la 1re série : l'étendue de la 1re série est à peine supérieure à l'écart interquartile de la 2de série.

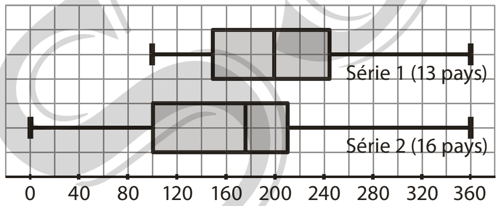
36 **1.**



2. Pour les deux séries, l'écart interquartile est très important alors que les valeurs situées aux extrémités sont elles beaucoup plus concentrées. D'autre part, les températures à la Clusaz sont globalement plus basses qu'à Chamonix, même si la température minimale a été relevée à Chamonix.

37 **1.** On commence par ordonner la série.
Il y a 13 valeurs, donc la médiane est la 7e valeur : 200,7.
Le premier quartile est la 4e valeur, soit 149,60.
Le troisième quartile est la 10e valeur, soit 246.

Pays	Redevance
Italie	99,60 €
France	116,00 €
Slovénie	132,00 €
Belgique wallonne	149,60 €
Irlande	155,00 €
Royaume-Uni	195,60 €
Finlande	200,70 €
Allemagne	204,36 €
Suède	210,00 €
Norvège	246,00 €
Suisse	290,00 €
Autriche	324,85 €
Islande	363,30 €



2. Il y a 16 valeurs, donc la médiane est la demi-somme de la 8e et de la 9e valeur : 175,3.
Le premier quartile est la 4e valeur, soit 99,60.
Le troisième quartile est la 12e valeur, soit 210.
À l'exception du maximum les données de tous les paramètres ont diminué, les valeurs sont plus dispersées.

38 **1.** Les températures correspondant au graphique 1 sont les plus basses et les plus dispersées. Les températures correspondant au graphique 3 sont les plus élevées et les moins dispersées.
Le graphique 1 correspond à une ville plutôt froide et pour laquelle les écarts de température sont importants.
Le graphique 3 correspond à une ville plutôt chaude et pour laquelle les écarts de température sont faibles.
Le graphique 2 correspond à une ville un peu moins chaude et aux températures un peu plus dispersées que celle du graphique 3.

2. Graphique 1 : Montréal ; Graphique 2 : Lyon ; Graphique 3 : Ajaccio.

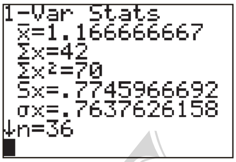
39 Se reporter au « à noter » en marge du cours page 244.
Histogramme a – Diagramme en boîte 2.
Histogramme b – Diagramme en boîte 3.
Histogramme c – Diagramme en boîte 1.

40 Plus l'appareil effectue de mesures, moins les fluctuations seront importantes d'une série de mesures à l'autre et donc plus le diagramme en boîte sera petit.
Appareil de type 1 - Diagramme en boîte A.
Appareil de type 2 - Diagramme en boîte B.
Appareil de type 3 - Diagramme en boîte C.
Appareil de type 4 - Diagramme en boîte D.

41 **1.** Affirmation vraie.
2. Réciproque : « Si deux séries ont les mêmes diagrammes en boîte, alors ces deux séries sont identiques. » Cette réciproque est fausse.

42 **1.** Faux. **2.** Faux. **3.** Vrai. **4.** Faux.

43 **1.** La moyenne est :
$$\frac{6 \times 0 + 20 \times 1 + 8 \times 2 + 2 \times 3}{36} = \frac{42}{36} = \frac{7}{6},$$
soit environ 1,667.
La variance est :
$$\frac{6 \times 0^2 + 20 \times 1^2 + 8 \times 2^2 + 2 \times 3^2}{36} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{21}{36}, \text{ soit } \frac{7}{12}.$$
L'écart-type est $\frac{\sqrt{21}}{6}$, soit environ 0,764.
2. Avec la calculatrice, on obtient la même chose :



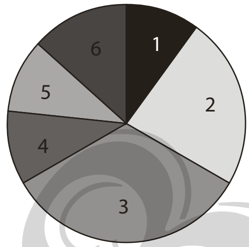
44 **1.** Pour entrer les données dans la calculatrice, il faut déterminer le centre des classes.
2. Avec la calculatrice, on obtient une moyenne de 44,37 et un écart-type de 54,15 à 10^{-2} près.

	Centre de classe	Nombre (en milliers)
Moins de 5 ha	2,5	193
De 5 à moins de 20 ha	12,5	132
De 20 à moins de 50 ha	35	138
De 50 à moins de 100 ha	75	122
De 100 à moins de 200 ha	150	64
200 ha et plus	250	15

45 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :***
10S_exercice45.xls (Excel 2003),
10S_exercice45.xlsx (Excel 2007)
et 10S_exercice45.ods (OpenOffice).
1. La formule pour calculer la moyenne de la série est **=MOYENNE(A1:H1)**. Avec **=MOYENNE(A1;H1)**, on calcule seulement la moyenne des valeurs contenues dans les deux cellules **A1** et **H1**.
2. La formule pour calculer l'écart-type de la série est **=ECARTYPEP(A1:H1)**
et non pas **=ECARTYPE(A1:H1)**.

46 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :***
10S_exercice46.xls (Excel 2003),
10S_exercice46.xlsx (Excel 2007)
et 10S_exercice46.ods (OpenOffice).
Formule dans la cellule **H1** : **=MOYENNE(A1:F6)**.
Formule dans la cellule **H2** : **=ECARTYPEP(A1:F6)**.

47 **1.**



2. Avec la calculatrice, on obtient une moyenne égale à 3,267 et un écart-type de 1,504 à 10^{-3} près.
3. Si toutes les valeurs sont augmentées de 2, la moyenne est augmentée de 2 et l'écart-type reste inchangé.

49 **1.** Affirmation fausse. Il suffit que les valeurs de la série soient toutes identiques.
2. Réciproque : « Si toutes les valeurs d'une série sont nulles, alors l'écart-type de cette série est nul ».
Cette réciproque est vraie.

50 Faux : un écart-type étant la somme de quantités élevées au carré, il s'agit toujours d'un nombre positif.

51 Faux : par exemple la série 1–2–3 a pour écart-type 0,82 environ alors que la série 2–2–3 a pour écart-type 0,47 environ.

52 **1.** Moyenne 11 ; écart-type environ 2,24.
2. Les nouvelles notes sont : 9 – 13 – 11 – 15. La nouvelle moyenne est 13 et l'écart-type environ 2,24. La moyenne est augmentée de 2 et l'écart-type est inchangé.
3. Les nouvelles notes sont : 8,8 – 13,2 – 11 – 15,4. La nouvelle moyenne est 12,1, l'écart-type environ 2,46. La moyenne et l'écart-type sont augmentés de 10 %.

53 Les moyennes sont les mêmes, par contre les écart-type sont nettement différents.

Points	Équipe 1	Équipe 2
Joueur 1	2	1
Joueur 2	2	1
Joueur 3	2	1
Joueur 4	0	1
Joueur 5	0	1
Joueur 6	0	1
Moyenne	**1**	**1**
Écart type	**1**	**0**

54 **1.** Avec la calculatrice, on obtient une moyenne de 206,69 € et un écart-type de 77,63 € au centime près.
2. La moyenne diminue et vaut 176,94 €, par contre l'écart-type augmente et vaut 106,80 €.

55 **1.** Voir tableau ci-dessous :

	2007	2008	2009
Moyenne	27 145	27 620	48 349
Écart-type	2 743	4 420	6 278

2. La moyenne a peu évolué entre 2007 et 2008, alors que l'écart-type a lui nettement augmenté, il n'y a pas beaucoup plus d'entreprises crées en 2008 qu'en 2007, par contre ce nombre est beaucoup plus variable d'un mois à l'autre.
Entre 2008 et 2009, la moyenne a presque doublé, l'écart-type a lui aussi augmenté mais dans une proportion moindre.

57 **1.** L'affirmation est fausse.
Par exemple les séries 7 – 10 – 11 – 12 et 8 – 9 – 10 – 13 sont différentes, pourtant elles ont la même moyenne : 10 et le même écart-type : environ 1,87.
2. La réciproque est : « Si deux séries ont exactement les mêmes valeurs, alors ces deux séries ont exactement la même moyenne et le même écart-type ».
Cette réciproque est vraie.

58 Vrai, la moyenne et l'écart-type sont divisés par 2.

59 Faux, par exemple la série 8 – 9 – 10 – 11 – 12 a cinq valeurs et un écart-type de 1,4 environ alors que la série 8 – 10 – 12 a trois valeurs et un écart-type de 1,6 environ.

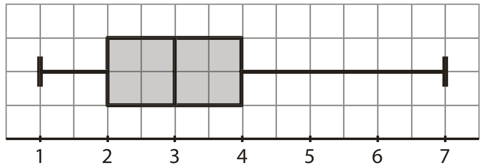
60 On ordonne les valeurs de la série : 2 h 04 – 2 h 24 – 2 h 30 – 2 h 31 – 2 h 36 – 2 h 51 – 3 h 01 – 3 h 13 – 3 h 22 – 3 h 23 – 3 h 24, –3 h 30 – 3 h 41 – 3 h 56 – 3 h 59.
Il y a 15 valeurs, donc la médiane est la 8^{e} valeur : 3 h 13.
Le premier quartile est la 4^{e} valeur, soit 2 h 31.
Le troisième quartile est la 12^{e} valeur, soit 3 h 30.
L'écart interquartile est donc : 0 h 59, soit 59 min.

61 **1.** Déterminons les effectifs cumulés :

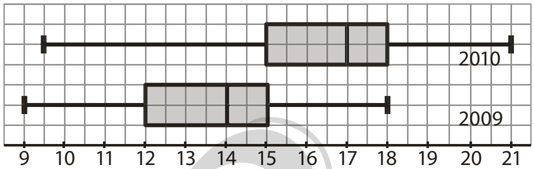
Nombre d'employés	1	2	3	4	5	6	7
Effectifs	40	105	114	72	12	10	2
Effectifs cumulés	40	145	259	331	343	353	355

Il y a 355 valeurs, donc la médiane est la 178^{e} valeur, soit 3.
Le premier quartile est la 89^{e} valeur, soit 2.
Le troisième quartile est la 267^{e} valeur, soit 4.
L'écart interquartile est donc 2.

2.



62



Les températures sont environ 3 °C plus hautes en 2010 qu'en 2009, par contre leur répartition a sensiblement la même allure, en particulier l'écart interquartile est le même.

63 **1.** Avec la calculatrice, on obtient une moyenne de 356,2 et un écart-type d'environ 73,393.
2. Le score doit être 356 : il faut proposer un score inférieur à la moyenne, le plus près possible de cette moyenne pour que l'écart-type soit le plus petit possible.
On obtient une moyenne d'environ 356,167 et un écart-type d'environ 66,999.

64 **1.** Pour le tireur A, la moyenne est 29 et l'écart-type environ 14,69. Pour le tireur B, la moyenne est 29 et l'écart-type environ 13,75.
2. Les deux tireurs ont le même score moyen. Par contre, le tireur A a des résultats plus dispersés.
Le tireur le plus régulier est le tireur B.

POUR FAIRE LE POINT

1 C ; 2 B ; 3 A ; 4 C ; 5 D ; 6 D ; 7 C ;
8 B ; 9 A ; 10 A ; 11 D ; 12 D ; 13 A.

POUR APPROFONDIR

65 Pour la série initiale, la médiane est 11 et l'écart interquartile 5.
1. Si on ajoute la valeur 11 à la série initiale, la médiane et l'écart interquartile sont inchangés.
2. Si on ajoute la valeur 11 à la série initiale, la médiane est inchangée, mais l'écart interquartile aussi. Si on ajoute une valeur autre que 11, la médiane est modifiée. Il n'est pas possible de modifier seulement l'écart interquartile.
3. Si on ajoute, par exemple, la valeur 17 à la série initiale, la médiane et l'écart interquartile sont modifiés.

66 On peut constater que les trois séries ont la même moyenne. La différence se fera à l'aide de l'écart-type de chaque série.
L'histogramme C est celui qui correspond à l'écart-type le plus faible car les valeurs autour de la moyenne ont des effectifs importants et celles éloignées de la moyenne des effectifs faibles.
C'est le contraire pour les valeurs de l'histogramme B, qui correspond donc à l'écart-type le plus élevé.
Histogramme A – Valeurs 2.
Histogramme B – Valeurs 3.
Histogramme C – Valeurs 1.

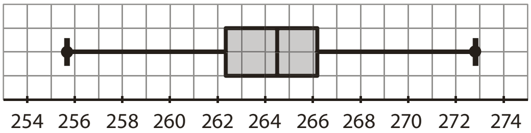
67 **1.** La dispersion des valeurs est plus importante dans le diagramme du haut, ce qui est lié au fait que les lycéens sont en général situés plus loin de leur lycée que les collégiens de leur collège.
2. La durée médiane d'un trajet pour un collégien est de 15 minutes.
3. L'écart interquartile de la série B est environ 20 – 9,5, soit 10,5.
4. Comme 20 est le 3ᵉ quartile du diagramme de la série B, il y a environ 25 % des collégiens qui ont un plus de 20 minutes de trajet.
Pour le diagramme de la série A, 20 correspond au 1ᵉʳ quartile, il y a donc environ 75 % des lycéens qui ont plus de 20 minutes de trajet.
5. *t* correspond au 3ᵉ quartile de la série B, c'est-à-dire 20 minutes.

68 **1.** Pour entrer les données dans la calculatrice, il faut déterminer le centre des classes.

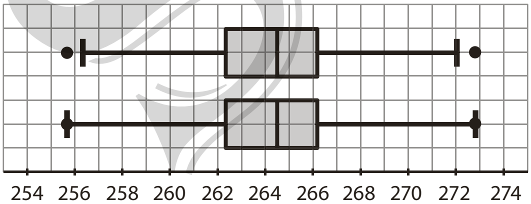
Âge	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[
Centre	25	35	45	55	65
Effectif	6	8	16	16	4

On obtient un âge moyen de 45,8 et un écart-type d'environ 11,3.
2. Dans le premier garage, le total des âges de tous les acheteurs est 2 290 (ce résultat peut être lu sur la calculatrice). Dans le second garage, le total des âges de tous les acheteurs est 30 × 39 = 1 170.
L'âge moyen de tous les acheteurs de la marque est $\frac{2\,290 + 1\,170}{50 + 30} = \frac{3\,460}{80}$, soit 43,25.

69 **1.** On ordonne la série :
255,8 – 258,7 – 259,7 – 260,3 – 260,7 – 261,2 – 261,2 – 261,4 – 262,1 – 262,3 – 262,4 – 263,1 – 263,4 – 263,4 – 263,6 – 264,1 – 264,4 – 264,4 – 264,5 – 264,5 – 264,6 – 264,8 – 265 – 265,3 – 265,5 – 265,6 – 265,9 – 266,1 – 266,2 – 266,2 – 266,4 – 267 – 267,1 – 267,6 – 268,7 – 268,8 – 269,7 – 269,8 – 271 – 272,9.
Il y a 40 valeurs, donc la médiane est la demi-somme de la 20ᵉ et de la 21ᵉ valeur : 264,55.
Le premier quartile est la 10ᵉ valeur, soit 262,3.
Le troisième quartile est la 30ᵉ valeur, soit 266,2.
L'écart interquartile de la série 266,2 – 262,3, soit 3,9.
2.



3. Entre 262,3 et 266,2, il y a 21 valeurs ce qui correspond à $\frac{21}{40} \times 100$, soit 52,5 % des valeurs.
4. On a $Q_1 = 262{,}3$, $Q_3 = 266{,}2$ et $I = 3{,}9$. On obtient l'intervalle [262,3 – 1,5 × 3,9 ; 266,2 + 1,5 × 3,9], soit : [256,45 ; 272,05].
a. Il y a deux valeurs aberrantes, les deux valeurs extrêmes 255,8 et 272,9.
b. Le pourcentage de valeurs aberrantes est $\frac{2}{40} \times 100$, soit 5 %.
5. a.



b. Comme on pouvait s'y attendre, seules les deux extrémités du diagramme sont modifiées pour faire apparaître les deux valeurs aberrantes.

70 **1. a.** Le salaire moyen des employés de l'entreprise Deschamps est :
$\frac{170 \times 1500 + 100 \times 2\,500 + 0 \times 3\,500}{270}$, soit 1 870,37 €.
Le salaire moyen des employés de l'entreprise Laville est :
$\frac{280 \times 1500 + 140 \times 2\,500 + 0 \times 3\,500}{420}$, soit 1 833,33 €.
b. De même, le salaire moyen des cadres de l'entreprise Deschamps est 3 166,67 € et le salaire moyen des cadres de l'entreprise Laville est 3 000 €.
2. Le salaire moyen de tous les salariés de l'entreprise Deschamps est :
$\frac{170 \times 1500 + 110 \times 2\,500 + 20 \times 3\,500}{300}$, soit 2 000 €.
Le salaire moyen de tous les salariés de l'entreprise Laville est :
$\frac{280 \times 1500 + 180 \times 2\,500 + 40 \times 3\,500}{500}$, soit 2 020 €.
Les résultats des questions **1.** et **2.** sont regroupés dans les tableaux ci-après.

Entreprise Deschamps

Salaire (en euros)	[1 000 ; 2 000[	[2 000 ; 3 000[	[3 000 ; 4 000[	Total	Salaire moyen
Centre classe	1 500	2 500	3 500		
Nombre d'employés	170	100	0	270	**1 870,37**
Nombre de cadres	0	10	20	30	**3 166,67**
Nombre total de salariés	170	110	20	300	**2 000,00**

Entreprise Laville

Salaire (en euros)	[1 000 ; 2 000[	[2 000 ; 3 000[	[3 000 ; 4 000[	Total	Salaire moyen
Centre classe	1 500	2 500	3 500		
Nombre d'employés	280	140	0	420	**1 833,33**
Nombre de cadres	0	40	40	80	**3 000,00**
Nombre total de salariés	280	180	40	500	**2 020,00**

3. On a vu dans la question **1.** que le salaire moyen des employés ainsi que celui des cadres est plus élevé dans les entreprises Deschamps, le PDG de cette entreprise dit vrai.

Mais on a aussi vu dans la question **2.** que le salaire moyen de tous les salariés est plus élevé dans les entreprises Laville, le PDG de cette entreprise dit lui aussi vrai.

Ce paradoxe est dû à la répartition des effectifs dans les différentes classes : il y a proportionnellement plus de cadres dans l'entreprise Laville (environ 19 %) que dans l'entreprise Deschamps (environ 11 %).

Les cadres étant en moyenne mieux payés que les employés, cela fait augmenter le salaire moyen de l'ensemble des salariés de l'entreprise.

Pour plus de détails concernant ce phénomène, voir le TP3 page 265.

Il est possible de traiter cet exercice avec un tableur.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 10S_exercice70.xlsx (Excel 2007), 10S_exercice70.xls (Excel 2003) et 10S_exercice70.ods (Open Office).

71 **1.** Salaire moyen en 2010 :

$$\frac{40\times 1200+29\times 1350+12\times 1500+3\times 3\,000+1\times 3750}{40+29+12+3+1} \approx 1\ 387{,}06\ €.$$

2. Situation en 2011 :

Catégorie	Ouvrier	Ouvrier qualifié	Cadre	Cadre supérieur	Dirigeant
Salaire	1 212	1 363,5	1 515	3 030	3 787,5
Effectif	56	39	16	3	1

Salaire moyen en 2011 :

$$\frac{56\times 1212+39\times 1363{,}5+16\times 1515+3\times 3\,030+1\times 3787{,}5}{40+29+12+3+1} \approx 1\ 375{,}36\ €.$$

3. Tous les salaires ont augmenté de 1 %, pourtant le salaire moyen des salariés de l'entreprise a baissé.

Ce paradoxe est dû à la répartition des effectifs dans les différentes catégories : en 2010, les ouvriers représentent environ 47 % des salariés de l'entreprise et les ouvriers qualifiés 34 %. Alors qu'en 2011, les ouvriers représentent environ 66 % des salariés de l'entreprise et les ouvriers qualifiés 46 %.

Ces salariés (ouvriers et ouvriers qualifiés) ayant un salaire inférieur au salaire moyen, comme ils sont en plus grande proportion dans l'entreprise en 2011, cela fait baisser le salaire moyen.

Pour plus de détails concernant ce phénomène, voir le TP3 p 265.

Il est possible de traiter cet exercice avec un tableur.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 10S_exercice71.xlsx (Excel 2007), 10S_exercice71.xls (Excel 2003) et 10S_exercice71.ods (Open Office).

72 **1.** On utilise la calculatrice. On obtient : $\overline{x} = 0{,}3$ et $\sigma \approx 0{,}0217$.

2. a. Les limites de confiance sont 0,2566 et 0,3434 ; elles ont été dépassées deux fois (0,25 et 0,38).

Les limites d'alerte sont 0,2349 et 0,3651 ; elles ont été dépassées une seule fois (0,38).

b. Ces limites agissent comme des avertisseurs pour le biologiste : dès qu'on dépasse les limites d'alerte, la machine doit être réétalonnée ; si on dépasse deux fois de suite les limites de confiance, il faut aussi procéder immédiatement à un nouveau réglage de la machine.

73 **1.** On sait qu'augmenter une valeur de 10 % revient à multiplier cette valeur par 1,1.

On note $\overline{x}$ la moyenne de la série initiale, V sa variance et σ son écart-type.

Si la série initiale est $x_1, x_2, \ldots, x_n$; une fois augmentée

de 10 % elle devient $1{,}1x_1, 1{,}1x_2, \dots, 1{,}1x_n$.
La nouvelle moyenne est alors :

$$\frac{1{,}1x_1 + 1{,}1x_2 + \dots + 1{,}1x_n}{n} = 1{,}1 \times \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$
$$= 1{,}1\overline{x}$$

La nouvelle variance est :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1{,}1x_i - 1{,}1\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1{,}1^2(x_i - \overline{x})^2$$
$$= 1{,}1^2 \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 1{,}1^2V.$$

Le nouvel écart-type est $\sqrt{1{,}1^2 \times V} = 1{,}1\sqrt{V} = 1{,}1\sigma$.
La moyenne et l'écart-type sont bien eux aussi augmentés de 10 %.

2. La nouvelle moyenne est $1{,}1 \times 9{,}5 = 10{,}45$ et le nouvel écart-type est environ $1{,}1 \times 2{,}17$, soit 2,39.

74 **1. a.** Notons $\overline{t}$ la moyenne des écarts centrés réduits. On a :

$$\overline{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$$
$$= \frac{1}{\sigma} \times \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}\right) = \frac{1}{\sigma} \times \left(\overline{x} - \frac{1}{n}n \times \overline{x}\right)$$
$$= \frac{1}{\sigma} \times (\overline{x} - \overline{x}) = 0.$$

Notons V_t la variance des écarts centrés réduits et σ_t leur écart-type. On a :

$$V_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2 - \overline{t}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}\right)^2 - 0^2$$
$$= \frac{1}{\sigma^2} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \times \sigma^2 = 1.$$

Alors, $\sigma_t = \sqrt{V_t} = \sqrt{1} = 1$.
La série des écarts centrés réduits a donc pour moyenne 0 et pour écart-type 1.

b. Cette série des écarts centrés réduits permet de comparer deux séries qui n'ont ni la même moyenne ni le même écart-type.

2. La moyenne de Lionel calculée avec la série des écarts centrés réduits est $\frac{11-8}{2} = 1{,}5$.
La moyenne d'Olivier, calculée avec la série des écarts centrés réduits est égale à $\frac{14-10}{3} = 1$. Puisque $1{,}5 > 1$, on peut dire que Lionel a de meilleurs résultats qu'Olivier (en supposant les deux classes de même niveau).

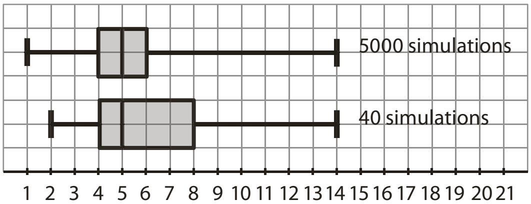
75 **1.** Dans la liste **5** – **10** – **11** – 4 – 8 – **15** – **20** – 12 – **21** – 6 – 12 – 5 – 14 – 18, il y a 6 records.

2. a. Au minimum dans une liste, il y a 1 record (si la première valeur de la liste en est aussi le maximum).

b. Une liste de n termes peut avoir jusqu'à n records (si chaque terme de la liste est supérieur à tous les termes qui le précède). Exemple : 1 – 3 – 6 – 8 – 11.

3. a. Le nombre moyen de records par siècles obtenu à l'aide de cette simulation est 6,025.

b.



4. a. Voir le diagramme ci-dessus.

b. La série de 5 000 simulations est moins dispersée, la boîte est beaucoup plus petite, bien resserrée autour de la médiane : 5. On se rend compte qu'environ une fois sur deux on a entre 4 et 6 records.

76 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 10S_exercice76.xlsx (Excel 2007), 10S_exercice76.xls (Excel 2003), 10S_exercice76.ods (Open Office). 10S_exercice76_correction.xlsx (Excel 2007), 10S_exercice76_correction.xls (Excel 2003), 10S_exercice76_correction.ods (Open Office)***

1. On entre dans chacune des cellules de la zone **A3:A102** la formule : **=ALEA()**.

2. a. La cellule **B1** contient la valeur 1, car la première valeur est forcément un record.

b. La formule dans la cellule **B4** est **=SI(A4<A3;0;1)**.

c. La formule dans la cellule **B5** est :

=SI(A5<MAX($A$3:A4);0;1).

3. La formule dans la cellule **B1** est : **=SOMME(B3:B102)**.
On compte le nombre de 1, donc on compte le nombre de records.

4. On obtient un nombre moyen de records autour de 5,25 (la plupart du temps entre 4,5 et 6).

77 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 10S_exercice77_algo1.alg et 10S_exercice77_algo2.alg (Algobox), 10S_exercice77_algo1_correction.alg et 10S_exercice77_algo2_correction.alg (Algobox).***

1. a. Le nombre NR représente le nombre de records rencontrés dans la liste de 100 nombres aléatoires.

b. Le nombre R contient la valeur record, c'est-à-dire le plus grand des nombres parmi ceux déjà simulés.

c. Le nombre N est un compteur qui donne combien de nombre il faut encore simuler pour obtenir la liste de les 100 nombres aléatoires.

d. Le nombre A contient successivement les différents nombres simulés.

2. La boucle « **Tant que** » permet de simuler successivement les 100 nombres aléatoires.
À chaque boucle, on regarde si le nombre obtenu est supérieur au dernier record rencontré. Si c'est le cas, on stocke sa valeur dans R et on augmente le nombre de records NR de 1. Sinon, on simule le nombre suivant.

3. *Programmation de cet algorithme :*

TI	CASIO
PROGRAM:RECORD :100→N :0→R :0→M :While N≥1 :rand→A :If A>R :Then	======RECORD ====== 100→N↵ 0→R↵ 0→M↵ While N≥1↵ Ran# →A↵ If A>R↵ TOP BTM SRC MENU A↔a CHAR
PROGRAM:RECORD :Then :A→R :M+1→M :End :N-1→N :End :M	======RECORD ====== If A>R↵ Then A→R↵ M+1→M↵ IfEnd↵ N-1→N↵ WhileEnd↵ TOP BTM SRC MENU A↔a CHAR
	======RECORD ====== IfEnd↵ N-1→N↵ WhileEnd↵ "RECORD"↵ M↵ TOP BTM SRC MENU A↔a CHAR

4. Modifications avec Algobox :

De nouvelles variables ont été déclarées :

– S qui fait la somme de tous les records rencontrés lors des 40 simulations ;

– I qui compte le nombre de simulations déjà effectuées parmi les 40 souhaitées dans la boucle « pour » ;

– M le nombre moyen de records rencontrés lors des 40 simulations.

Pour cette question :

– soit on laisse les élèves compléter seuls l'algorithme en partant de celui utilisé dans les questions précédentes ;

– soit on demande aux élèves d'utiliser l'algorithme en partie déjà réalisé (***fichier 10S_exercice77_algo2.alg***).

Dans ce cas, ils n'auront qu'à compléter certaines parties de l'algorithme (celle grisées dans l'écran ci-dessous).

```
VARIABLES
  R EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  NR EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  M EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  S PREND_LA_VALEUR 0
  POUR I ALLANT_DE 1 A 40
    DEBUT_POUR
    N PREND_LA_VALEUR 100
    R PREND_LA_VALEUR 0
    NR PREND_LA_VALEUR 0
    TANT_QUE (N>=1) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      A PREND_LA_VALEUR random()
      SI (A>R) ALORS
        DEBUT_SI
        R PREND_LA_VALEUR A
        NR PREND_LA_VALEUR NR+1
        FIN_SI
      N PREND_LA_VALEUR N-1
      FIN_TANT_QUE
    AFFICHER "Série : "
    AFFICHER I
    AFFICHER " - Nombre de records : "
    AFFICHER NR
    S PREND_LA_VALEUR S+NR
    FIN_POUR
  M PREND_LA_VALEUR S/40
  AFFICHER "Nombre moyen de records : "
  AFFICHER M
FIN_ALGORITHME
```

78 **1. a.** On commence par ordonner les valeurs des séries : 7,5 – 10 – 13 – 15 – 17 et 9 – 12 – 14 – 15.

Pour les deux séries, la moyenne est 12,5 et la médiane est 13. L'étendue de la 1re série est 9,5 et celle de la 2e série est 6.

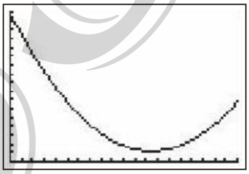
b. Les deux séries ont les mêmes caractéristiques de position : moyenne et médiane, par contre la première série a une plus grande étendue et semble plus dispersée.

c. La moyenne et la médiane de la 2e série augmentent légèrement, par contre les étendues deviennent identiques.

2. a. Par définition d'une moyenne : on calcule la somme des carrés des écarts et on divise par le nombre de valeurs.

b. Avec la calculatrice, on obtient :

```
WINDOW
 Xmin=0
 Xmax=20
 Xscl=1
 Ymin=0
 Ymax=170
 Yscl=10
↓Xres=1
```



Cette courbe a l'allure d'une parabole.

c. Il suffit de développer $f(x)$ pour obtenir l'expression cherchée.

d. Si la moyenne de la classe vaut 11,8 ; l'expression vaut $f(11{,}8) = 12{,}09$.

e. $f'(x) = 2x - 25$. On a $f'(x) = 0$ pour $x = 12{,}5$ d'où le tableau :

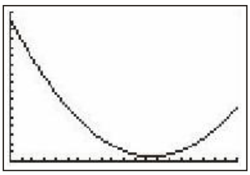
x	0	12,5	20
$f(x)$	167,85 ↘	11,6	↗ 67,85

La fonction f est minimale pour $x = 12{,}5$, c'est-à-dire quand x est égal à la moyenne de la série.

3. Cette fois, la valeur moyenne est donnée par :

$$h(x) = \frac{1}{4}\left((x-9)^2 + (x-12)^2 + (x-14)^2 + (x-15)^2\right).$$

Avec la même fenêtre graphique que pour la question précédente, on obtient :



En développant $h(x)$, on obtient : $h(x) = x^2 - 25x + \dfrac{323}{2}$.

$h'(x) = 2x - 25$, d'où $h'(x) = 0$ pour $x = 12{,}5$.

On obtient le tableau :

x	0	12,5	20
$h(x)$	161,5 ↘	5,25	↗ 61,5

La fonction h est minimale pour $x = 12{,}5$, c'est-à-dire quand x est égal à la moyenne de la série. (On arrive aux mêmes conclusions que dans la question **1.**)

3. a. La valeur moyenne est donnée par :

$$g(x) = \frac{1}{4}\left((x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 + (x-d)^2\right).$$

b. En développant $g(x)$, on obtient :

$$g(x) = x^2 - -\frac{a+b+c+d}{2}x + \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}.$$

c. $g'(x) = 2x - \dfrac{a+b+c+d}{2}$,

d'où $g'(x) = 0$ pour $x = \dfrac{a+b+c+d}{4}$.

Les variations sont données dans le tableau ci-dessous :

x	0	$\frac{a+b+c+d}{4}$	20
$g(x)$	↘		↗

d. La fonction g est minimale pour $x = \dfrac{a+b+c+d}{4}$.

Cette valeur est la moyenne des quatre valeurs a, b, c et d.

79 **1.** La première somme représente la somme des carrés des écarts entre la quantité x et chacune des mesures observées (a, a', a'', …) de cette quantité.

Cette somme représente donc n fois la variance de la série, si n est le nombre d'observations.

2. L'expression signifie que Legendre considère la valeur x pour laquelle cette somme est minimale.

3. Legendre démontre que l'expression est minimale quand le réel x est égal à la moyenne des mesures a, a', a'', … observées.

80 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 10S_exercice80.xlsx (Excel 2007), 10S_exercice80.xls (Excel 2003) et 10S_exercice80.ods (Open Office).***

1. a. La médiane est la demi-somme des 30^{e} et 31^{e} valeurs, soit 52. Le 1er quartile est la 15^{e} valeur, soit 50. Le 3^{e} quartile est la 45^{e} valeur, soit 54.

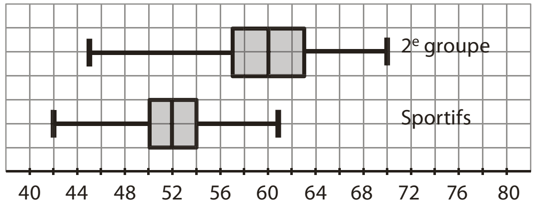
b. Voir le diagramme ci-après.

2. a. En utilisant la calculatrice, on obtient une moyenne de 52 et un écart-type d'environ 4,06.

b. On obtient l'intervalle [43,88 ; 60,12].

Dans cet intervalle, il y a 57 valeurs ce qui correspond à un pourcentage de $\frac{57}{60} \times 100$, soit 95 %.

3.



4. On peut constater que les FCR sont globalement plus basses chez les sportifs, ce que l'on retrouve si on compare les moyennes des deux séries.

Les diagrammes montrent aussi que les FCR sont plus dispersées chez les non sportifs, ce que l'on retrouve si on compare les écart-types des deux séries.

On peut émettre l'hypothèse qu'avoir une activité sportive aide à diminuer la FCR.

81 **1.** On a le tableau :

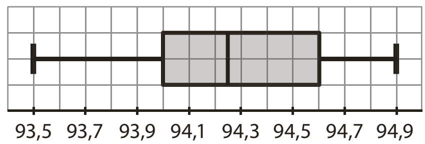
Valeurs	93,5	93,6	93,7	93,8	93,9	94	94,1	94,2
Effectifs	1	1	3	1	4	5	6	4
Cumulés	1	2	5	6	10	15	21	25

Valeurs	94,3	94,4	94,5	94,6	94,7	94,8	94,9
Effectifs	2	2	6	4	7	3	1
Cumulés	27	29	35	39	46	49	50

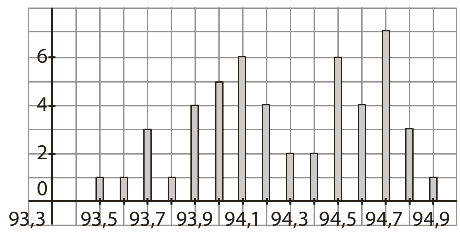
2. La médiane est la demi-somme des 25^{e} et 26^{e} valeurs, soit 94,25. Le 1er quartile est la 13^{e} valeur, soit 94. Le 3^{e} quartile est la 38^{e} valeur, soit 94,6. L'écart interquartile est 94,6 – 94, soit 0,6.

En utilisant la calculatrice, on obtient une moyenne de 94,28 et un écart-type d'environ 0,365.

3.



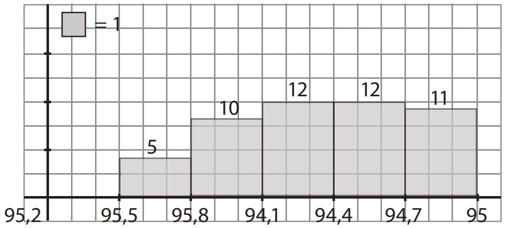
4.



5. On peut constater que les données ne sont pas réparties de façon homogène : il y a beaucoup de valeurs concentrées autour de 94,1 et de 94,6.

Cette constatation n'a pas pu être faite avant, car ni les paramètres statistiques ni le diagramme en boîte ne le permettent.

6. L'histogramme donne l'impression que les données sont réparties équitablement. Le choix de ce rangement en classes n'est donc pas pertinent.



Il est possible de traiter cet exercice avec un tableur.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :
10S_exercice81.xlsx (Excel 2007),
10S_exercice81.xls (Excel 2003)
et 10S_exercice81.ods (Open Office).

82 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :***
10S_exercice82.xlsx (Excel 2007),
10S_exercice82.xls (Excel 2003)
et 10S_exercice82.ods (Open Office).
10S_exercice82_correction.xlsx (Excel 2007),
10S_exercice82_correction.xls (Excel 2003)
et 10S_exercice82_correction.ods (Open Office).

On calcule les différents paramètres statistiques.

Rang	Semaine du 30/06/2010	Semaine du 22/09/2010	Semaine du 22/09/2010
Moyenne	183 894	121 361	213 590
Écart type	368 927	124 381	204 803
Min	16 853	32 335	52 856
Q_1	45 870	42 211	64 020
Médiane	84 884	57 278,5	92 548
Q_3	172 154	104 803	321 969
Max	1 722 859	456 929	687 101
Étendue	1 706 006	424 594	634 245
Interquartile	126 284	62 592	257 949

On peut observer que pour les séries 2 et 3, l'écart-type est à chaque fois très voisin de la moyenne. Pour la série 1, l'écart-type est même le double de la moyenne. Cela signifie que ces séries ont des valeurs très dispersées.

Ces observations sont confirmées par les valeurs des étendues et des écarts interquartile.

Pour la série 1, on peut observer que la plus grande valeur est 10 fois supérieure à la valeur du troisième quartile.

On peut ensuite tracer les diagrammes en boîte de ces trois séries (voir bas de page).

Ils confirment les observations déjà faites.

Les valeurs sont très dispersées après la médiane et beaucoup plus concentrées avant. C'est, en partie, ce qui explique que la moyenne est à chaque fois deux fois plus élevée que la médiane.

À noter que si l'on supprime la valeur maximale de la série 1, son diagramme devient presque symétrique et la moyenne est divisée par deux.

La fréquentation de la semaine du 30/06 est fortement influencée par la valeur maximale. Globalement, la fréquentation est plus faible la semaine du 22/09 et c'est le 22/10 que les résultats sont les moins homogènes.

83 La valeur qui rendra l'écart-type le plus petit possible est celle qui sera le plus près possible de la moyenne. La moyenne étant environ 11,44 ; la valeur entière la plus proche est 11.

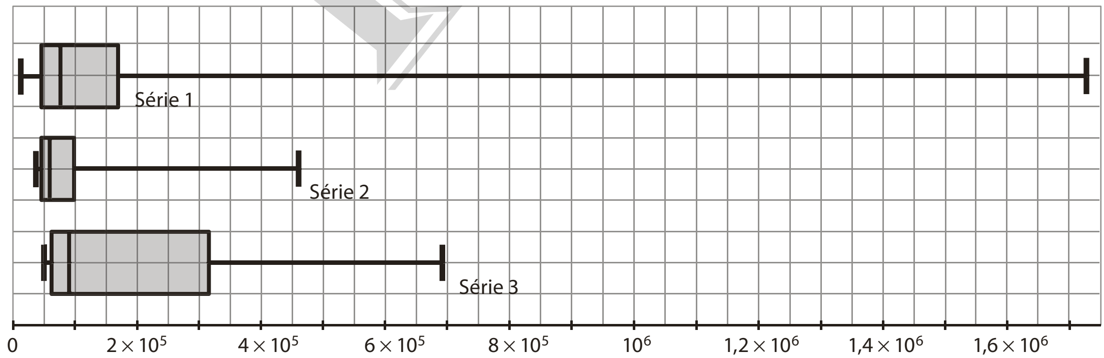
84 La moyenne étant 133,1, on peut écrire :

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{50}}{50} = 133{,}1.$$

On a : $x_1 + x_2 + \ldots + x_{50} = 133{,}1 \times 50 = 6\,655$. On en déduit que $x_1 + x_2 + \ldots + x_{49} = 6\,655 - 159 = 6\,496$.

La nouvelle moyenne est $\frac{6\,496}{49} = \frac{928}{7}$, soit environ 132,57.

L'écart-type étant $\sigma \approx 4{,}29$, la variance de la série est $V \approx 4{,}29^2 \approx 18{,}404\,1$.



D'après la formule de la variance, on peut écrire :

$$\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_{50}^2}{50}-133{,}1^2\approx 18{,}4041.$$

On a $x_1^2+x_2^2+\dots+x_{50}^2=(18{,}404\,1+133{,}1^2)\times 50$
$\approx 886\,701.$

On en déduit que :

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_{49}^2\approx 886\,701-159^2\approx 861\,420.$$

La variance de la nouvelle série est :

$\dfrac{861420}{49}-\left(\dfrac{928}{7}\right)^2\approx 4{,}81$ et son écart-type est $\sigma\approx\sqrt{4{,}81}$ soit $\sigma\approx 2{,}19$.

On peut noter que la suppression de la valeur 159 modifie notablement l'écart-type.

85 • La moyenne de la première série étant 171,5 ; la somme des 36 premières valeurs est :

$$x_1+x_2+\dots+x_{36}=171{,}5\times 36=6\,174.$$

• La moyenne de la seconde série étant 172 ; la somme des 33 dernières valeurs est :

$$y_1+y_2+\dots+y_{36}=172\times 33=5\,676.$$

• La moyenne de toutes les valeurs regroupées est :

$$\frac{6\,174+5\,676}{36+33}=\frac{11\,850}{69}=\frac{3\,950}{23}\approx 171{,}74.$$

• L'écart-type de la première série étant $\sigma\approx 2{,}73$, la variance de cette série est $V_1\approx 2{,}73^2\approx 7{,}4529$.

D'après la formule de la variance, on peut écrire :

$$\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_{36}^2}{36}-171{,}5^2\approx 7{,}4529.$$

On en déduit que :

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_{36}^2\approx(7{,}452\,9+171{,}5^2)\times 36$$
$$\approx 1\,059\,109{,}3.$$

• De même, l'écart-type de la seconde série étant $\sigma\approx 1{,}87$, la variance est $V_2\approx 1{,}87^2\approx 3{,}4969$.

D'après la formule de la variance, on peut écrire :

$$\frac{y_1^2+y_2^2+...+y_{33}^2}{33}-172^2\approx 3{,}4969.$$

On en déduit que :

$$y_1^2+y_2^2+\dots+y_{33}^2\approx(3{,}496\,9+172^2)\times 33\approx 976\,387{,}4.$$

• La variance de toutes les valeurs regroupées est :

$$\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_{36}^2+y_1^2+y_2^2+...+y_{33}^2}{36+33}-\left(\frac{3\,950}{23}\right)^2$$
$$\approx\frac{1\,059\,109{,}3+976\,387{,}4}{69}-\left(\frac{3\,950}{23}\right)^2\approx 5{,}623\,3$$

• L'écart-type de toutes les valeurs regroupées est $\sigma\approx\sqrt{5{,}6233}$, soit $\sigma\approx 2{,}37$.Xeruptatem ariossiti reic tem et faceatum aut acit aut qui offic tem es qui conecae

F Activités TICE

TP 1 Production dans une usine

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :
10S_TP1.xlsx (Excel 2007), 10S_TP1.xls (Excel 2003) et 10S_TP1.ods (Open Office).
10S_correctionTP1.xlsx (Excel 2007), 10S_correctionTP1.xls (Excel 2003) et 10S_correctionTP1.ods (Open Office).

Partie A

1. Voir ci-contre les différentes formules à utiliser.

	A	B	C	D
1	24,9		Moyenne	=MOYENNE(A1:A10)
2	25,05		Ecart-type	=ECARTYPEP(A1:A10)
3	25		Minimum	=MIN(A1:A10)
4	24,85		1er quartile	**=QUARTILE(A1:A10;1)**
5	25,2		Médiane	=MEDIANE(A1:A10)
6	25		3ème quartile	**=QUARTILE(A1:A10;3)**
7	24,95		Maximum	=MAX(A1:A10)
8	25,1			
9	25			
10	25,05			

2. La série ordonnée est :
24,85 – 24,9 – 24,95 – 25 – 25 – 25 – 25,05 – 25,05 – 25,1 – 25,2.

Le premier quartile est la 3e valeur, soit 24,95. Ce n'est pas la valeur affichée par le tableur : 24,96.

Cela s'explique par le fait que les méthodes de calcul des quartiles sont différentes de celle préconisées dans les programmes.

Sur un tableur, les valeurs des quartiles ne sont pas nécessairement des valeurs de la série.

À noter que l'on rencontre le même phénomène sur les calculatrices.

Partie B

1. Voir ci-dessous les différentes formules à utiliser.

	A	B	C	D	E	F
1	Taille x_i	Nombre n_i	n_ix_i	$n_ix_i^2$	Fréquences cumulées	
2	24,75	1	=B2*A2	=B2*A2*A2	=B2/B13	
3	24,8	2	=B3*A3	=B3*A3*A3	=B3/$B$13+E2	
4	24,85	2	=B4*A4	=B4*A4*A4	=B4/$B$13+E3	
5	24,9	4	=B5*A5	=B5*A5*A5	**=B5/$B$13+E4**	1er quartile
6	24,95	6	=B6*A6	=B6*A6*A6	=B6/$B$13+E5	
7	25	7	=B7*A7	=B7*A7*A7	=B7/$B$13+E6	
8	25,05	5	=B8*A8	=B8*A8*A8	**=B8/$B$13+E7**	3eme quartile
9	25,1	5	=B9*A9	=B9*A9*A9	=B9/$B$13+E8	
10	25,15	3	=B10*A10	=B10*A10*A10	=B10/$B$13+E9	
11	25,2	0	=B11*A11	=B11*A11*A11	=B11/$B$13+E10	
12	25,25	1	=B12*A12	=B12*A12*A12	=B12/$B$13+E11	
13	Somme	=SOMME(B2:B12)	=SOMME(C2:C12)	=SOMME(D2:D12)		
14		Moyenne	=C13/B13			
15		Variance	=D13/B13-C14*C14			
16		Ecart-type	=RACINE(C15)			
17						
18		$m - 2\sigma$	=C14-2*C16			
19		$m + 2\sigma$	=C14+2*C16			
20						
21	Nombre de valeurs dans l'intervalle				=SOMME(B3:B11)	
22	Pourcentage correspondant				=E21/B13	

Ci-contre les valeurs obtenues à l'aide du tableur.

	A	B	C	D	E	F
1	Taille x_i	Nombre n_i	n_ix_i	$n_ix_i^2$	Fréquences cumulées	
2	24,75	1	24,75	612,56	2,8%	
3	24,8	2	49,6	1230,08	8,3%	
4	24,85	2	49,7	1235,05	13,9%	
5	24,9	4	99,6	2480,04	**25,0%**	1er quartile
6	24,95	6	149,7	3735,02	41,7%	
7	25	7	175	4375	61,1%	
8	25,05	5	125,25	3137,51	**75,0%**	3ème quartile
9	25,1	5	125,5	3150,05	88,9%	
10	25,15	3	75,45	1897,57	97,2%	
11	25,2	0	0	0	97,2%	
12	25,25	1	25,25	637,56	100,0%	
13	Somme	36	899,8	22490,44		
14		Moyenne	24,994			
15		Variance	0,0121			
16		Ecart-type	0,110			
17						
18		$m - 2\sigma$	24,77			
19		$m + 2\sigma$	25,21			
20						
21	Nombre de valeurs dans l'intervalle				34	
22	Pourcentage correspondant				94,4%	

La cellule **B13** contient l'effectif total, la cellule **C13** contient la somme des n_ix_i et la cellule **D13** la somme des $n_ix_i^2$.
Cela explique les formules des cellules **C14** et **C15** pour le calcul de la moyenne et de la variance.

2. a. Les formules des cellules **C18** et **C19** calculent les bornes de l'intervalle $[m - 2\sigma ; m + 2\sigma]$. Cela permet, dans la cellule **E21**, de déterminer le nombre de valeurs situées dans cet intervalle et, dans la cellule **E22**, de calculer le pourcentage correspondant.
On obtient 34 valeurs, soit environ 94,4%.

b. En fonction des critères énoncés, la machine n'est pas considérée comme étant correctement réglée.

3. Pour déterminer la valeur des quartiles, il suffit de chercher à partir de quelle valeur la fréquence cumulée croissante est supérieure à 25 % pour le 1er quartile et à 75 % pour le troisième quartile.
On obtient $Q_1 = 24,9$ (ligne **5**) et $Q_3 = 25,05$ (ligne **8**).

Partie C

Il suffit de commencer par déterminer le centre des classes, ensuite les formules utilisées sont identiques.

À 0,01 près, on obtient une moyenne de 25,02, une variance 0,03 et un écart-type de 0,16.

	A	B	C	D	E	F
1	Borne Inf	Borne Sup	Centre c_i	Effectif n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
2	24,5	24,6	24,55	1	24,55	602,7
3	24,6	24,7	24,65	2	49,3	1215,25
4	24,7	24,8	24,75	5	123,75	3062,81
5	24,8	24,9	24,85	13	323,05	8027,79
6	24,9	25	24,95	25	623,75	15562,56
7	25	25,1	25,05	24	601,2	15060,06
8	25,1	25,2	25,15	18	452,7	11385,41
9	25,2	25,3	25,25	8	202	5100,5
10	25,3	25,4	25,35	3	76,05	1927,87
11	25,4	25,5	25,45	1	25,45	647,7
12			Somme	100	2501,8	62592,65
13				Moyenne	25,02	625,93
14				Variance	0,03	
15				Ecart-type	0,16	

TP 2 Simulation de sondages : temps d'attente à un arrêt de bus

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :
10S_TP2.xlsx (Excel 2007), 10S_TP2.xls (Excel 2003) et 10S_TP2.ods (Open Office).
10S_correctionTP2.xlsx (Excel 2007), 10S_correctionTP2.xls (Excel 2003) et 10S_correctionTP2.ods (Open Office).

Partie A

Voir ci-contre les différentes formules à utiliser.
Comme il s'agit d'une simulation, les valeurs obtenues son bien sûr à chaque fois différentes.
On obtient un temps d'attente moyen de 7,5 min environ.

	A	B
1	Sondage	n°1
2	Moyenne	=MOYENNE(B11:B20)
3	Écart-type	=ECARTYPEP(B11:B20)
4	Médiane	=MEDIANE(B11:B20)
5	Écart interquartile	=QUARTILE(B11:B20;3)-QUARTILE(B11:B20;1)
6	Étendue	=MAX(B11:B20)-MIN(B11:B20)
7		
8		
9		
10	Sondage	n°1
11	Personne 1	=15*ALEA()
12	Personne 2	=15*ALEA()
13	Personne 3	=15*ALEA()
14	Personne 4	=15*ALEA()
15	Personne 5	=15*ALEA()
16	Personne 6	=15*ALEA()
17	Personne 7	=15*ALEA()
18	Personne 8	=15*ALEA()
19	Personne 9	=15*ALEA()
20	Personne 10	=15*ALEA()

Partie B

Voir ci-contre les différentes formules à utiliser.
On peut observer la fluctuation des résultats.
L'amplitude de ces fluctuations est d'environ une unité.

	A	AF	AG	AH
1	Sondage		Moyenne	Ecart-type
2	Moyenne		=MOYENNE(B2:AE2)	=ECARTYPEP(B2:AE2)
3	Écart-type		=MOYENNE(B3:AE3)	=ECARTYPEP(B3:AE3)
4	Médiane		=MOYENNE(B4:AE4)	=ECARTYPEP(B4:AE4)
5	Écart interquartile		=MOYENNE(B5:AE5)	=ECARTYPEP(B5:AE5)
6	Étendue		=MOYENNE(B6:AE6)	=ECARTYPEP(B6:AE6)

Partie C

On peut observer que la moyenne des moyennes des différentes simulations (cellule **AG2**) est sensiblement la même pour 10 personnes et pour 1 000 personnes. Il en est même pour la moyenne des différentes médianes (cellule **AG4**).

Par contre, les moyennes des différents des différents écart-types (cellule **AG3**) des différents écarts interquartiles (cellule **AG5**) et des différentes étendues (cellule **AG6**) sont légèrement inférieures dans le cas de 10 personnes.

Les écart-types des moyennes des différentes simulations et de leurs écart-type (cellules **AH2** et **AH3**) sont environ 10 fois plus grands pour 10 personnes que pour 1 000 personnes.

Ce résultat se généralise : si le nombre de personnes sondées est multiplié par n, les valeurs moyennes sont sensiblement les mêmes alors que les valeurs des différents écart-types sont multipliées par $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

TP 3 Un drôle de paradoxe

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :
10S_TP3.xlsx (Excel 2007), 10S_TP3.xls (Excel 2003) et 10S_TP3.ods (Open Office).
10S_correctionTP3.xlsx (Excel 2007), 10S_correctionTP3.xls (Excel 2003) et 10S_correctionTP3.ods (Open Office).
10S_TP3.ggb (Geogebra)

Partie A

1. Pour un graphiste comme pour un journaliste, c'est le site du « Canard déchaîné » qui propose le meilleur salaire.

2. a. Le salaire moyen d'un employé du « Canard déchaîné » est $\frac{20 \times 1800 + 5 \times 2700}{20 + 5}$, soit 1 980 €.

b. Le salaire moyen d'un employé du « Bigaro » est $\frac{11 \times 1600 + 14 \times 2500}{14 + 11}$, soit 2 104 €.

3. On a vu dans la question **1.** que le salaire moyen des graphistes ainsi que celui des journalistes est plus élevé au « Canard déchaîné ».

Mais on a aussi vu dans la question **2.** que le salaire moyen de tous les employés est plus élevé au « Bigaro ».

Ce paradoxe est dû à la répartition des effectifs dans les différentes catégories : il y a proportionnellement plus de journalistes au « Bigaro » (environ 56 %) qu'au « Canard déchaîné » (environ 20 %).

Les journalistes étant en moyenne mieux payés que les graphistes, cela fait augmenter le salaire moyen de l'ensemble des employés de l'entreprise.

Individuellement, quelle que soit la catégorie, il vaut mieux se faire embaucher au « Canard déchaîné ».

Partie B

1. La formule dans la cellule **C4** est `=(B2*C2+B3*C3)/(B2+B3)`.

La formule dans la cellule **E4** est `=(D2*E2+D3*E3)/(D2+D3`.

2. Sélectionner les deux zones (touche ctrl) et choisir le type de diagramme approprié.

On peut observer que pour les deux premiers diagrammes, la bande verte est au-dessus de la bleue et que c'est le contraire pour le troisième diagramme.

3. La formule dans les cellules **B2**, **B3**, **D2**, **D3** est `=ENT(30*ALEA()+1)`.

4. Sélectionner les deux zones (touche ctrl), puis choisir le type de diagramme approprié.

5. Sur le troisième diagramme du graphique 1 (Salaire moyen), on peut observer qu'en général, la bande verte est au-dessus de la bleue.

Quand cela n'est pas le cas, on peut constater (dans le tableau ou sur le graphique 2) que la proportion de journalistes parmi les employés est beaucoup plus importante au « Bigaro » qu'au « Canard déchaîné ».

Partie C

On peut constater qu'en général l'abscisse du point M_1 est supérieure à celle du point M_2; c'est-à-dire que c'est le site du « Canard déchaîné » qui propose le meilleur salaire moyen.

Pour obtenir le contraire, il faut soit augmenter la valeur de **NG1** ou de **NJ2** soit diminuer la valeur de **NJ1** ou de **NG2**. Cela revient à augmenter la proportion de journalistes au « Bigaro » ou la baisser au « Canard déchaîné ».

CHAPITRE 11

Probabilités : variables aléatoires

A Le programme

La notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire permet de modéliser des situations aléatoires, d'en proposer un traitement probabiliste et de justifier certains faits observés expérimentalement en classe de seconde.
L'utilisation des arbres pondérés est développée pour modéliser la répétition d'expériences identiques et indépendantes. Elle est restreinte à ce cadre afin d'éviter toute confusion avec des situations relevant des probabilités conditionnelles.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Probabilités Variable aléatoire discrète et loi de probabilité. Espérance, variance et écart-type.	• Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire. • Interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.	À l'aide de simulations et d'une approche heuristique de la loi des grands nombres, on fait le lien avec la moyenne et la variance d'une série de données. On exploite les fonctionnalités de la calculatrice ou d'un logiciel pour déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire. ⊡ On démontre les formules suivantes sur l'espérance et la variance : $E(aX+b)=a\,E(X)+b$ $V(aX)=a^2\,V(X)$
Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues.	• Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré. • Utiliser cette représentation pour déterminer la loi d'une variable aléatoire associée à une telle situation.	Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat. La notion de probabilité conditionnelle est hors programme. On peut aussi traiter quelques situations autour de la loi géométrique tronquée. ◇ On peut simuler la loi géométrique tronquée avec un algorithme.

B Notre point de vue

Nous avons regroupé dans ce chapitre la partie du programme relative aux variables aléatoires, et celle concernant la répétition d'expériences identiques et indépendantes. En effet, cette dernière notion permet d'enrichir le domaine des variables aléatoires que l'on donne à étudier aux élèves.
La notion de variable aléatoire est introduite par l'activité 1 « Lancers de pièces » : celle-ci permet de bien distinguer l'ensemble des issues d'une expérience et l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire. L'activité 2, « Une tombola », introduit la notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire. Ces notions constituent l'essentiel de la première page de cours.
La seconde page de cours est consacrée à l'espérance mathématique et à la variance d'une variable aléatoire. L'activité 3 « Camille et la machine » permet, conformément au programme, d'interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions. Les élèves doivent savoir calculer l'espérance et l'écart-type à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur : les méthodes sont décrites dans cette page.
La troisième page de cours traite de la répétition d'expériences identiques et indépendantes. Nous avons introduit l'indépendance de façon très perceptive, puisqu'aucune définition de l'indépendance n'est au programme de la classe. Nous avons considéré que le plus important est que l'élève sache construire un arbre pondéré et qu'il soit capable de mener à bien des calculs de probabilités à l'aide de ce support. L'activité 5 « Des arbres aux arbres pondérés » essaie de justifier auprès des élèves les propriétés d'un arbre pondéré en partant d'un arbre bien classique de dénombrement de toutes les issues possibles, pour arriver à un arbre pondéré après regroupement de certaines branches. Une application de ces arbres pondérés est la découverte d'une loi, la loi géométrique tronquée, qui est abordée pour la première fois dès le savoir-faire 8.
La page « **Chercher avec méthode** » s'attache à aider l'élève dans ce qui est le plus important pour lui dans ce chapitre : savoir déterminer de manière autonome la loi de probabilité d'une variable aléatoire donnée.
Le premier TP, « La chasse aux canards », utilise le tableur pour résoudre expérimentalement un problème : celui-ci est résolu ensuite de façon exacte grâce à l'utilisation d'une variable aléatoire. Le second TP, « Le lièvre et la tortue », traite d'un problème relatif à une loi géométrique tronquée : dans un premier temps, on élabore un algorithme pour résoudre expérimentalement le problème, puis on le résout de manière exacte grâce à l'utilisation des arbres pondérés.

Les notions abordées dans le chapitre 11

1. Variable aléatoire
2. Espérance mathématique et variance
3. Répétition d'expériences identiques et indépendantes

C Avant de commencer

Se tester avec des QCM

1 D ; **2** C ; **3** C ; **4** C ; **5** D.

Se tester avec des exercices

6 8 issues possibles.

7 $\frac{1}{36}$.

8 **1.** 25 résultats.

2. Une erreur s'est glissée en fin de manuel le résultat est $\frac{7}{25}$, soit 0,28.

9 $P(\overline{A}) = \frac{3}{4}$

et $P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{15+20-12}{60} = \frac{23}{60}$.

D Activités

Activité 1 Lancers de pièces

Cette activité introduit la notion de variable aléatoire à l'aide de l'expérience aléatoire consistant à lancer trois fois de suite une pièce de monnaie : un des objectifs essentiels est que l'élève se rende compte que les issues de l'expérience sont modifiées par l'introduction d'une variable aléatoire.

1. E = {PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF}.

2. a. Avec l'issue PPP, on gagne 3 €.
Avec les issues PPF, PFP, FPP, on gagne 4 €.
Avec les issues PFF, FPF, FFP, on gagne 5 €.
Avec l'issue FFF, on gagne 6 €.

b. L'ensemble des gains possibles est : {3, 4, 5, 6}.

3. a. C'est l'issue PPP.

b.

	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$
Issues de E	PPP	PPF PFP FPP	PFF FPF FFP	FFF

4. L'événement « $X \geqslant 4$ » est constitué des issues PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF.
L'événement « $X < 5$ » est formé des issues PPP, PPF, PFP, PFF.

Activité 2 Une tombola

Cette activité permet d'introduire la notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire ; le professeur pourra définir cette notion aisément en s'appuyant sur cette activité.

1. a. $P(\text{A}) = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$. **b.** $P(\text{B}) = \dfrac{10}{100} = 0{,}1$.

2. a. L'ensemble des gains possibles est : {0, 10, 50}.

b. $P(X = 50) = P(\text{A}) = 0{,}01$.
$P(X = 10) = P(\text{B}) = 0{,}1$.
$P(X = 0) = \dfrac{89}{100} = 0{,}89$.

Activité 3 Camille et la machine

Dans cette activité, on simule un très grand nombre de fois une expérience aléatoire conduisant à un gain pour le joueur. Le tableur permet de calculer la moyenne de ces gains sur 10 000 parties. On se rend compte que cette moyenne est relativement stable, et aussi qu'elle peut être obtenue par un calcul direct avec les données du problème. Ceci permet d'introduire de façon non artificielle la formule donnant l'espérance mathématique d'une variable aléatoire. En cela, on satisfait une recommandation du programme qui est d'interpréter l'espérance comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :
11S_activite3.xls (Excel 2003),
11S_activite3.xlsx (Excel 2007),
11S_activite3.ods (Open Office).

1. La formule à introduire en **B2** est : $\boxed{\texttt{=ALEA()}}$.
La formule à introduire dans la cellule **C2** est :
$\boxed{\texttt{=SI(B2<0,2;8;SI(B2<0,5;-1;-2))}}$.

2. On simule plusieurs fois 10 000 parties à l'aide de la touche $\boxed{\text{F9}}$. La moyenne des gains obtenue dans la cellule **F6** prend des valeurs voisines de 0,30 €.

a. Les fréquences obtenues dans les cellules **H2** à **H4** sont voisines respectivement de 0,5 – 0,3 – 0,2 : ceci est lié à la formule introduite dans la colonne **C** et qui prend en compte ces fréquences.

b. Pour obtenir le gain moyen trouvé en **F6** à partir des fréquences, il suffit de multiplier les trois fréquences trouvées respectivement par –2, –1 et 8.
La formule à entrer est alors : $\boxed{\texttt{=(-2)*H2+(-1)*H3+8*H4}}$.

c. Sans simulation, on peut donc déterminer le gain moyen avec la formule $(-2) \times 0{,}5 + (-1) \times 0{,}3 + 8 \times 0{,}2$.
Le résultat est 0,3.

Activité 4 Machines à sous

Cette courte activité a pour objectif la découverte de la formule donnant $E(aX + b)$ dans un cas simple : le fait que G' soit égal à $\frac{1}{2}G - b$, avec b variable, permet de faire apparaître assez clairement la formule qui sera ensuite démontrée dans le cours.

1. $E(G) = 1{,}8$.

2. a. Loi de G' :

x_i	$-b$	$10 - b$	$50 - b$
$P(G' = x_i)$	0,95	0,04	0,01

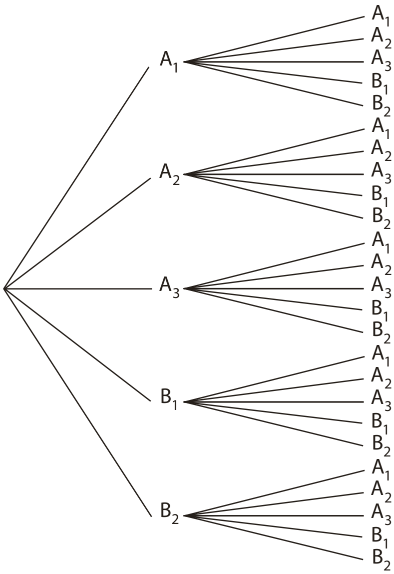
b. $E(G') = -0{,}95\,b + 0{,}04\,(10 - b) + 0{,}01(50 - b) = 0{,}9 - b$.
On en déduit : $E(G') = \dfrac{1}{2}E(G) - b$.

Activité 5 Des arbres aux arbres pondérés

Dans cette activité, on se propose de donner du sens à la notion d'arbre pondéré : pour cela, on part de la notion bien connue d'arbre de choix et on regroupe certaines branches de cet arbre. Les probabilités que l'on place sur les branches apparaissent alors très naturellement : le professeur peut

ainsi, à partir de cet exemple, décrire les règles d'utilisation des arbres pondérés. Pour cette activité, une animation est disponible sur le manuel numérique premium.

1. a. L'arbre montre qu'il y a bien 25 issues possibles.

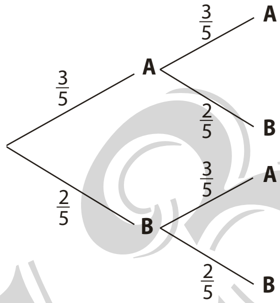


b. $P(\text{AA}) = \dfrac{9}{25} = 0{,}36$; $P(\text{AB}) = \dfrac{6}{25} = 0{,}24$;

$P(\text{BA}) = \dfrac{6}{25} = 0{,}24$; $P(\text{BB}) = \dfrac{4}{25} = 0{,}16$.

2. a. La probabilité d'avoir A au premier tirage est $\dfrac{3}{5}$, celle d'avoir B est $\dfrac{2}{5}$.

c. On constate que $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{25}$, probabilité d'obtenir le mot AA. On fait de même pour AB, BA et BB.



On en déduit la méthode : « pour déterminer la probabilité du mot XY, où X est la lettre du premier tirage et Y celle du second tirage, on fait le produit des probabilités d'obtenir chacune des lettres X et Y à chaque tirage. »

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 **1.** X prend les valeurs 0, 1 et 2.
2. « $X = 1$ » est l'événement « obtenir une fois PILE ».

2 **1.** X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.
2. « $X = 2$ » est l'événement « tirer deux boules vertes ;
« $X \geqslant 1$ » est l'événement « tirer au moins une boule verte ».

3 $P(X = 1) = \dfrac{5}{6}$; $P(X = 2) = \dfrac{1}{6}$.

4 **1.** $a + 0{,}3 + 0{,}5 = 1$, soit $a = 0{,}2$.
2. Correctif : il est plus intéressant de calculer $P(X \geqslant 4)$.
$P(X \geqslant 4) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8$.

5 X prend les valeurs 3 et 27.
Loi de probabilité de X : $P(X = 3) = \dfrac{1}{2}$; $P(X = 27) = \dfrac{1}{2}$.

6 Loi de X :

x_i	40	60	100
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,5

7 $E(X) = 0 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$V(X) = \left(0 - \dfrac{1}{2}\right)^2 \times \dfrac{1}{2} + \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

8 $E(X) = 1 \times \dfrac{1}{4} + 2 \times \dfrac{1}{4} + 3 \times \dfrac{1}{4} + 4 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{2}$.

$$V(X) = \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

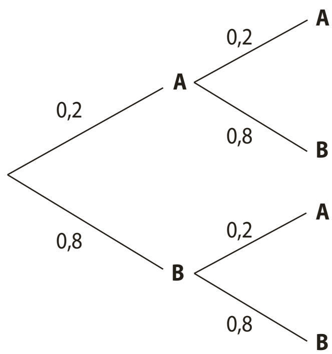
d'où : $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

9 On utilise la calculatrice. On obtient :
$E(X) = 3{,}83$ et $V(X) \approx 4{,}48$.

10 $E(Y) = 2E(X) = 10$; $V(2X) = 4\,V(X) = 16$.

11 **1.** La probabilité de la liste AA est : $0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.
2. La probabilité de la liste BA est : $0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$.

12 **1.**



2. $P(\text{BB}) = 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64$.

POUR S'ENTRAÎNER

13 **1.** $\Omega = \{(J_2, J_2), (J_2, J_3), (J_3, J_2), (J_3, J_3)\}$; X prend les valeurs 4, 6 et 9.

2. L'événement associé à « $X = 6$ » est « tirer un jeton 2 et un jeton 3 », soit $\{(J_2, J_3), (J_3, J_2)\}$.

14 **1.** X prend les valeurs 1, 2, 3.

2. « $X = 2$ » est l'événement « tirer le carton « Hasard » ou le carton « Monde ».

3. On peut par exemple définir la variable aléatoire Y associée au nombre de consonnes du mot tiré, ou la variable aléatoire Z associée au nombre de lettres du mot tiré.

15 **1.** X prend les valeurs 2 et 3.

2. « $X = 3$ » est l'événement « une des faces est apparue deux fois au bout de 3 lancers » : il correspond aux résultats PFF, PFP, FPP et FPF.

3. L'événement « $X = 4$ » ne peut pas se réaliser puisqu'au bout de 3 lancers, il y a toujours une face qui est apparue deux fois.
C'est l'événement impossible.

16 Faux : X prend les valeurs –1 et 2.

17 Faux : Y prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36.

18 X prend les valeurs 1, 5 et 100. Il y a équiprobabilité pour le tirage des huit cartes.

Loi de probabilité de X :

x_i	1	5	100
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

19 Loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{23}{40}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$

20 Loi de probabilité de X :

x_i	200	240	260	280
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,4

21 Loi de probabilité de X :

x_i	–50	24	48	72
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

22 **1.** Les tirages possibles pour les entiers inscrits sur les boules sont : –1 et +2, –1 et –3, –1 et +4, +2 et –3, +2 et +4, –3 et +4.

2. X prend les valeurs – 4, –1, 1, 3 et 6. Les six tirages possibles sont équiprobables.

Loi de probabilité de X :

x_i	–4	–1	1	3	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

23 **1.** Les triplets possibles sont : (1 ; 1 ; 1), (1 ; 1 ; 2), (1 ; 2 ; 1), (2 ; 1 ; 1), (1 ; 2 ; 2) , (2 ; 1 ; 2), (2 ; 2 ; 1), (2 ; 2 ; 2).
Les 8 triplets trouvés sont équiprobables.

2. X prend les valeurs 3, 4, 5 et 6.

Loi de probabilité de X :

x_i	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

24 **1.** Il y a 36 issues possibles.

2. S prend les valeurs 2, 3, 4, 5 et 6.

3. $S = 3$ est réalisé avec les trois issues (1, 2) et les trois issues (2 ; 1). Ainsi : $P(S = 3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

4. a. Tableau des valeurs prises par S :

	1	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**
1	2	3	3	3	4	4
2	3	4	4	4	5	5
2	3	4	4	4	5	5
2	3	4	4	4	5	5
3	4	5	5	5	6	6
3	4	5	5	5	6	6

b. Loi de probabilité de S :

s_i	2	3	4	5	6
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

25 **1.** Les valeurs possibles du gain algébrique du joueur sont : –2, 4 et 10.

2. Il y a $26 \times 25 = 650$ tirages distincts possibles.

$P(X = -2) = \frac{20 \times 19}{650} = \frac{38}{65} \approx 0{,}585$.

$P(X = 4) = \frac{6 \times 20 \times 2}{650} = \frac{24}{65} \approx 0{,}369$.

$P(X = 10) = \frac{6 \times 5}{650} = \frac{3}{65} \approx 0{,}046$.

27 Il y a 18 issues possibles : ce sont les triplets (étoile, étoile, étoile), (étoile, cœur, fleur)…
X prend les valeurs 0, 2 et 5.

$P(X = 5) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$, car il n'y a que deux triplets avec trois symboles identiques : (étoile, étoile, étoile) et (cœur, cœur, cœur).

$P(X = 0) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$, car il n'y a que quatre triplets avec des symboles tous différents, deux commençant par « étoile » et deux commençant par « cœur ».

$P(X = 2) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$.

28 **1.** Une erreur s'est glissée dans l'énoncé : il ne faut pas utiliser deux boucles « Si… Alors » imbriquées.
On appelle random la fonction donnant 0 ou 1 de façon aléatoire. Algorithme :

```
P prend la valeur random + random
Afficher P
```

2. On obtient l'algorithme suivant :

```
Variables
A, B, C, I, N, P variables entières
Entrées
Saisir N
Initialisations
A prend la valeur 0
B prend la valeur 0
C prend la valeur 0
Traitement
  Pour I allant de 1 à N
  P prend la valeur random + random
    Si P = 0
    Alors A prend la valeur A + 1
    Sinon | Si P = 1
          | Alors B prend la valeur B + 1
          | Sinon C prend la valeur C + 1
          | Fin Si
    Fin Si
  Fin Pour
Sorties
Afficher A, B, C
```

3. a. Pour obtenir une fonction donnant aléatoirement 0 ou 1 sur une calculatrice, soit elle possède cette fonction, soit on saisit Int (Ran# × 2) sur Casio ou ent (NbrAléat*2) sur Texas.

Programmation de cet algorithme :

TI

```
Prompt N
0 ↦ A
0 ↦ B
0 ↦ C
For (I, 1, N)
ent (NbrAléat*2) + ent (NbrAléat*2) ↦ P
If P = 0
Then
A + 1 ↦ A
Else
If P = 1
Then
B + 1 ↦ B
Else
C + 1 ↦ C
End
End
End
Disp A, B, C
```

CASIO

```
"N"? ↦ N
0 ↦ A
0 ↦ B
0 ↦ C
For 1 ↦ I To N
Int (Ran# × 2) + Int (Ran# × 2) ↦ P
IIf P = 0
Then A + 1 ↦ A
Else If P = 1
Then B + 1 ↦ B
Else C + 1 ↦ C
IfEnd
IfEnd
Next
A◢
B◢
C
```

b. On peut alors comparer avec les valeurs théoriques : $P(X=0)=0{,}25$; $P(X=1)=0{,}5$; $P(X=2)=0{,}25$. On doit donc obtenir des valeurs assez voisines de 25, 50 et 25 pour A, B et C pour cette simulation.

29 **1.** Liste des 27 tirages possibles :
(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 3), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 1), (2, 3, 2), (2, 3, 3), (3, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 3).
2. X prend les valeurs 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
3. Loi de probabilité de X :

x_i	3	4	5	6	7	8	9
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

30 Faux : $P(X \geqslant 0) = 1$.

31 Vrai : $P(N=2) = \frac{1}{4}$.

32 Faux : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + a = 1$, soit $a = \frac{1}{6}$.

33 Vrai : $P(X=3) = \frac{6 \times 3 \times 2}{9 \times 8} = \frac{1}{2}$.

34 **1.** Si on tire (1,1), le score est 3 ; si on tire (1,2), le score est 6 ; si on tire (2,1), le score est 5 ; si on tire (2, 2), le score est 8. D'où la loi de probabilité de X :

x_i	3	5	6	8
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

2. $P(X > 4) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$.

35 X prend les valeurs 0, 1 et 2. Il y a 12 tirages distincts possibles. X prend la valeur 0 quand on tire un jeton marqué 2 ou un jeton marqué 3 dans chaque urne, soit $P(X=0) = \frac{1+2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. X prend la valeur 1 quand on tire un jeton 1 dans l'urne U_1 et le jeton 2 dans l'urne U_2, le jeton 3 dans l'urne U_1 et le jeton 2 dans l'urne U_2, le jeton 2 dans l'urne U_1 et un jeton 3 dans l'urne U_2, soit :

$$P(X=1) = \frac{2+1+2}{12} = \frac{5}{12}.$$

X prend la valeur 2 quand on tire un jeton 1 dans l'urne U_1 et un jeton 3 dans l'urne U_2, soit $P(X = 2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

36 **1.** $a = 0{,}05$.

2. a. $P(X > 3) = 1 - P(X \leqslant 3) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$.

b. $P(X \leqslant 5) = 1 - P(X \geqslant 6) = 0{,}15$.

37 **1.** $P(X = 2) = 0{,}31$, car la somme des probabilités $P(X = k)$ est égale à 1.

2. $P(X \geqslant 2) = 0{,}31 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}51$.

38 $P(X \geqslant 600) = 0{,}32 + 0{,}27 + 0{,}04 = 0{,}63$.

39 **1.** Vrai, car $0{,}91 + 0{,}06 + 0{,}02 + a = 1$, soit $a = 0{,}01$.

2. Faux, car $P(X \geqslant 0) = 1$.

3. Faux, car la probabilité qu'il y ait moins de deux incidents par mois est $P(X < 2)$, soit 0,97.

40 **1.** X prend les valeurs 0, 1, 2 et 6.

La probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{6}$, donc $P(X = 6) = \frac{1}{6}$.

De même, la probabilité d'obtenir 5 est 16, et on gagne 2 € pour la sortie du 5, donc $P(X = 2) = \frac{1}{6}$.

On a aussi : $P(X = 1) = \frac{1}{6}$, et ainsi $P(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ car la somme des probabilités est 1.

2. $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Avec la calculatrice : $V(X) \approx 4{,}58$.

41 **1.** X prend les valeurs –5, 0, 65 et 615.

2. $P(X = 615) = \frac{1}{500}$; $P(X = 65) = \frac{9}{500} = 0{,}018$;

$P(X = 0) = \frac{50}{500} = 0{,}1$.

D'où la loi de probabilité de X :

x_i	–5	0	65	615
$P(X = x_i)$	0,880	0,100	0,018	0,002

3. $E(X) = -2$; en moyenne, le joueur perd deux euros en participant à cette tombola.

4. $\sigma(X) \approx 29{,}2$ (à 0,1 près).

42 **1.** $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}08$.

2. $E(X) = 0{,}104$; $V(X) \approx 0{,}149$ (à 0,001 près).

44 $E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1)$, soit $P(X = 1) = \frac{1}{4}$.

On en déduit : $P(X = 0) = \frac{3}{4}$.

2. $V(X) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$.

45 **1.** Loi de probabilité de X :

x_i	$-a$	0	5	8
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

2. $E(X) = -\frac{3a}{5} + 0 + \frac{10}{15} + \frac{8}{15} = \frac{-9a + 18}{15}$.

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X) = 0$, soit $a = 2$.

46 **1.** $0{,}26 + 0{,}23 + a + 0{,}15 + 0{,}05 = 1$, soit $a = 0{,}31$.

2. $E(X) = 1{,}5$. Ainsi, le nombre moyen de voitures vendues en une année est environ : $52 \times 1{,}5 = 78$.

3. Le montant de la commission sur une voiture est $13\,500 \times \frac{0{,}4}{100} = 67{,}5$ €. Le montant moyen perçu en un an est donc : $67{,}5 \times 78 = 5\,265$ €.

47 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :***
11S_exercice47.xls (Excel 2003),
11S_exercice47.xlsx (Excel 2007),
et 11S_exercice47.ods (Open Office).

1. $E(X) = 10 \times 0{,}3 + (-5) \times 0{,}7 = -0{,}5$.

2. On simule cette expérience avec la formule :

`= SI(ALEA()<0,3 ;10 ;-5)`.

4. a. Si on a simulé les 100 expériences dans les cellules **A1** à **A100**, on obtient la moyenne avec la formule :

`=MOYENNE(A1 :A100)`.

b. Faire plusieurs simulations avec la touche F9.

48 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :***
11S_exercice48.xls (Excel 2003),
11S_exercice48.xlsx (Excel 2007),
et 11S_exercice48.ods (Open Office).

1. Cette formule simule l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé équilibré, et on gagne 20 € si le numéro de la face supérieure du dé est 1 ou 2, on perd 15 € dans les autres cas.

2. Si on a simulé les 500 expériences dans les cellules **A1** à **A500**, on obtient la moyenne avec la formule :

`=MOYENNE(A1 :A500)`.

3. On appelle X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur. Sa loi de probabilité est donnée par : $P(X = -15) = \frac{2}{3}$ et $P(X = 20) = \frac{1}{3}$.

On calcule alors : $E(X) = -15 \times \frac{2}{3} + 20 \times \frac{1}{3} = -\frac{10}{3}$.

49 **1.** Vrai. **2.** Faux : $V(X) = 1\,085 - 15^2 = 860$.

3. Vrai, car $\sqrt{860} \approx 29$.

50 $E(Y) = E(-X) = -E(X) = -100$.

$V(Y) = V(-X) = (-1)^2 V(X) = V(X) = 20^2$.

Puisque $\sigma(Y) = V(Y)$, on a : $\sigma(Y) = 20$.

51 $E(Y) = 5E(X) + 40 = 140$.

52 $R = 10N$, donc $E(R) = 10 \times 5\,000 = 50\,000$.

$V(R) = 10^2 \times V(R) = 100 \times 2\,000^2 = 4 \times 10^8$.

53 **1.** D'après l'énoncé : $Y = 2X + 1\,000$.

2. $E(Y) = (2x_1 + 1\,000)p_1 + (2x_2 + 1\,000)p_2 + \ldots + (2x_r + 1\,000)p_r$.

$E(Y) = 2(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_rp_r) + 1\,000\,(p_1 + p_2 + \ldots + p_r)$
$= 2E(X) + 1\,000$, puisque $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$.

On en déduit : $E(Y) = 2 \times 500 + 1\,000 = 2\,000$.

54 **1.** $V(Y) = p_1[4x_1 - E(4X)]^2 + p_2[4x_2 - E(4X)]^2 + \ldots + p_r[4x_r - E(4X)]^2$.

$V(Y) = p_1[4x_1 - 4E(X)]^2 + p_2[4x_2 - 4E(X)]^2 + \ldots + p_r[4x_r - 4E(X)]^2$, car $E(4X) = 4E(X)$.

$V(Y) = 16\, p_1[x_1 - E(X)]^2 + 16\, p_2[x^2 - E(X)]^2$
$+ \ldots + 16p_r\,[x_r - E(X)]^2.$
soit $V(Y) = 16p_1[x_1 - E(X)]^2 + p_2[x_2 - E(X)]^2$
$+ \ldots + p_r\,[x_r - E(X)]^2 = 16V(X).$

2. On a :
$Y = 4X$, d'où : $V(Y) = 16 \times 3^2 = 144$ et $\sigma(X) = \sqrt{144} = 12$.

55 $Y = 50X + 10\,000$,
d'où : $E(Y) = 50 \times 1\,000 + 10\,000 = 60\,000$.

56 **1.** Soit R la variable aléatoire associée à la recette mensuelle. Alors : $R = 2X$.
D'où : $E(R) = 2 \times 120 = 240$ et $V(R) = 2^2 \times 10^2$,
soit $\sigma(R) = 20$.
2. Soit R' la variable aléatoire associée à la recette annuelle. Alors : $R' = 12R$.
On en déduit : $E(R') = 12 \times 240 = 2\,880$ et $\sigma(R') = 240$.

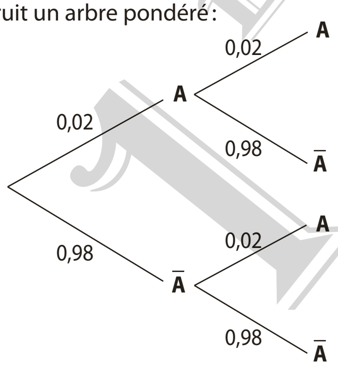
57 **1.** $[x_i - E(X)]^2 = x_i^2 - 2x_iE(X) + [E(X)]^2$.

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=r}[x_i - E(X)]^2p_i = \sum_{i=1}^{i=r}(p_i x_i^2 - 2p_i x_i E(X) + p_i[E(X)]^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{i=r}p_i x_i^2 - 2E(X)\sum_{i=1}^{i=r}p_i x_i + [E(X)]^2\sum_{i=1}^{i=r}p_i$$

2. On a : $\sum_{i=1}^{i=r}p_i x_i = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{i=r}p_i = 1$, d'où :
$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=r}p_i x_i^2 - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{i=r}p_i x_i^2 - [E(X)]^2.$$

58 **1.** Vrai, car $E(Y) = -50 + 100 = 50$.
2. Faux, car $V(Z) = 3^2 \times 16 = 144$.
3. Vrai, car $V(T) = \frac{1}{4} \times 16 = 4$, soit $\sigma(T) = 2$.
4. Faux, car $E(U) = 10 \times 50 + 30 = 530$.

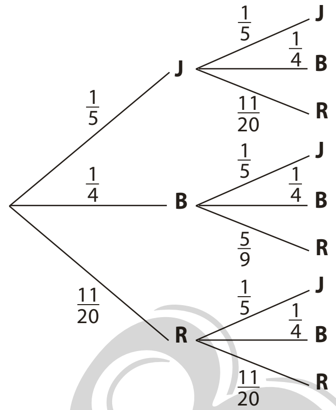
59 On note A l'issue « un pneu est crevé ».
Comme $P(\text{A}) = 0{,}02$, alors $P(\overline{\text{A}}) = 1 - P(\text{A}) = 0{,}98$.
On construit un arbre pondéré :



a. La probabilité d'avoir les deux pneus crevés est la probabilité de la liste AA, soit $0{,}02 \times 0{,}02 = 0{,}0004$.
b. La probabilité de ne pas avoir de crevaison est la probabilité de la liste $\overline{\text{A}}\overline{\text{A}}$, soit $0{,}98 \times 0{,}98 = 0{,}9604$.

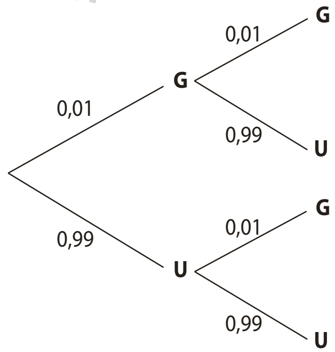
60 **1.** La probabilité que la roue s'arrête sur le secteur rouge est : $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20} = 0{,}55$.

On construit un arbre modélisant l'expérience :



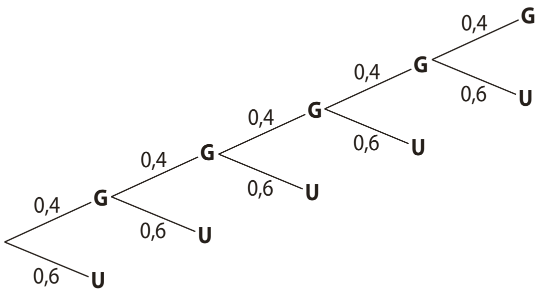
2. la probabilité qu'elle s'arrête deux fois sur le secteur jaune est : $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = 0{,}04$.
3. La probabilité pour qu'elle s'arrête sur deux secteurs bleus est $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$, et la probabilité pour qu'elle s'arrête sur deux secteurs rouges est :
$$\frac{11}{20} \times \frac{11}{20} = \frac{121}{400} = 0{,}3025.$$
La probabilité qu'elle s'arrête sur deux secteurs de la même couleur est : $0{,}04 + 0{,}062\,5 + 0{,}302\,5 = 0{,}405$.

61 **1.** On note G l'issue « gagné » et U l'issue « perdu », et on construit l'arbre pondéré associé à cette épreuve.



D'où la loi de probabilité de X :
$P(X = 0) = P(\text{UU}) = 0{,}99 \times 0{,}99 = 0{,}980\,1$.
$P(X = 1) = P(\text{GU}) + P(\text{UG}) = 0{,}01 \times 0{,}99 \times 2 = 0{,}019\,8$.
$P(X = 2) = P(\text{GG}) = 0{,}01 \times 0{,}01 = 0{,}000\,1$.
2. $E(X) = 0{,}02$.

62 **1.** On note G l'issue « gagné » et U l'issue « perdu », et on construit l'arbre pondéré associé à cette épreuve (cf. page suivante).
On a : $P(X = 2) = P(\text{GU}) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$.
Puis $P(X = 3) = P(\text{GGU})$, $P(X = 4) = P(\text{GGGU})$,
$P(X = 5) = P(\text{GGG})$.



On en déduit la loi de X :

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,6	0,24	0,096	0,038 4	0,025 6

2. $E(X) = 1{,}649\,6$. En moyenne, Noé va jouer entre une et deux parties dans ce tournoi.

63 On peut faire un arbre pondéré avec deux branches initiales et cinq niveaux.
Si on note A l'issue « on obtient un nombre pair » et B l'issue » on obtient un nombre impair », alors la probabilité cherchée est celle de la liste de résultats AAAAA.
On suppose l'indépendance des résultats à chaque lancer. On a : $P(\text{A}) = 0{,}5$.
D'où : $P(\text{AAAAA}) = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5$
$= 0{,}5^5 = 0{,}031\,25$.

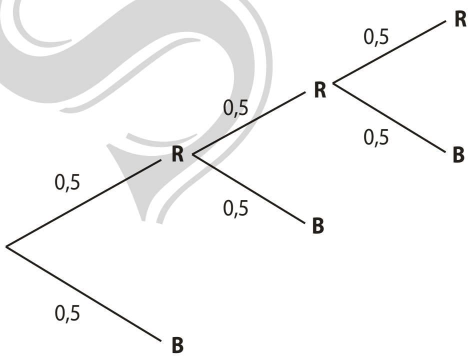
65 On note F l'issue « le forage est productif » et D l'issue « le forage n'est pas productif ».
On a : $P(\text{F}) = 0{,}1$ donc $P(\text{D}) = 0{,}9$.
On peut construire un arbre (incomplet) avec 10 niveaux.
On suppose les résultats de chaque forage indépendants les uns des autres.
Soit A l'événement « parmi 10 forages, l'un au moins est productif » ; son événement contraire $\overline{\text{A}}$ est « parmi 10 forages, aucun n'est productif », donc $P(\overline{\text{A}}) = P(\text{DDDDDDDDDD}) = 0{,}9^{10}$.
On en déduit : $P(\text{A}) = 1 - 0{,}9^{10} \approx 0{,}651$ (à 0,001 près).

66 On note F l'issue « on obtient 10 m de fil sans défaut ». On a : $P(\text{F}) = 0{,}81$.
On construit un arbre (incomplet) avec quatre niveaux.
La probabilité d'avoir 40 m de fil sans défaut est : $0{,}81 \times 0{,}81 \times 0{,}81 \times 0{,}81 = 0{,}81^4 \approx 0{,}430$ (à 0,001 près).

67 On note A l'issue « une personne de plus de 75 ans est atteinte de la maladie d'Alzheimer » et B l'issue « une personne de plus de 75 ans n'est pas atteinte de la maladie d'Alzheimer ».
On a : $P(\text{A}) = 0{,}18$, et ainsi : $P(\text{B}) = 0{,}82$.
On peut construire un arbre pondéré avec 10 niveaux.
Il y a indépendance entre le fait qu'une personne soit atteinte de cette maladie et le fait qu'une autre personne soit atteinte de cette maladie.
Soit E l'événement « au moins une personne de plus de 75 ans dans le groupe est atteinte de la maladie ».
L'événement contraire de E est « aucune personne de plus de 75 ans dans le groupe n'est atteint de la maladie » : $\overline{\text{E}}$ est la liste de résultats BBBBBBBBBB.
Ainsi : $P(\overline{\text{E}}) = P(\text{BBBBBBBBBB}) = 0{,}82^{10}$,
d'où $P(\text{E}) = 1 - 0{,}82^{10} \approx 0{,}863$.

68 **1.** On note R l'issue « Corentin réussit un lancer franc » et E l'issue « Corentin rate un lancer franc ».
Puisque $P(\text{R}) = 0{,}15$, on a $P(\text{E}) = 0{,}85$.
On peut construire un arbre pondéré avec n niveaux.
L'événement « Corentin ne réussit aucun lancer franc en n lancers » est la liste EEE… E, avec n échecs.
D'où : $p_n = 0{,}85^n$.
2. À l'aide de la calculatrice, on obtient :
$0{,}85^{28} \approx 0{,}011$ et $0{,}85^{29} \approx 0{,}009$.
La plus petite valeur de n cherchée est 29.

69 **1.** On construit un arbre pondéré.



$P(X = -1) = P(\text{B}) = 0{,}5$.
$P(X = 0) = P(\text{RB}) = 0{,}25$.
$P(X = 1) = P(\text{RRB}) = 0{,}125$.
$P(X = 2) = P(\text{RRR}) = 0{,}125$.
2. $E(X) = -0{,}125$.
3. a. Algorithme donnant le gain algébrique du joueur.
On note « random » la fonction aléatoire donnant un réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1[.

```
Traitement
Si random < 0,5
Alors Afficher –1
Sinon | Si random < 0,5
      | Alors Afficher 0
      | Sinon | Si random < 0,5
      |       | Alors Afficher 1
      |       | Sinon Afficher 2
      |       | Fin Si
      | Fin Si
  Fin Si
Sortie
En cours de traitement
```

Programmation de cet algorithme :

TI

```
If NbrAléat < 0,5
Then
Disp "–1"
Else
If NbrAléat < 0,5
Then
Disp "0"
Else
If NbrAléat < 0,5
Then
Disp "1"
Else
Disp "2"
End
End
End
```

CASIO

```
If Ran# < 0.5
Then "–1"
Else
If Ran# < 0.5
Then "0"
Else
If Ran# < 0.5
Then "1"
Else "2"
IfEnd
IfEnd
IfEnd
```

70 **1.** Vrai, car la probabilité est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^5$, soit $\frac{1}{32}$.

2. Faux : la probabilité est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^5$, soit $\frac{1}{32}$.

3. Faux : la probabilité est égale à $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$.

71 Loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$

72 Loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

73 Loi de probabilité de S :

s_i	1	1,5	2	2,5	3
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

74 $E(X) = 3{,}4$; $\sigma(X) \approx 2{,}62$ (à 0,01 près).

75 **1.** On fait l'ébauche d'un arbre pondéré. La probabilité que les dix personnes soient du groupe O est $0{,}43^{10} \approx 0{,}000\,2$.

2. La probabilité pour qu'aucune de ces personnes soit du groupe O est $0{,}57^{10}$.

L'événement « au moins une personne est du groupe O » est l'événement contraire de l'événement précédent, donc sa probabilité est : $1 - 0{,}57^{10} \approx 0{,}996\,4$.

POUR FAIRE LE POINT

1 B ; **2** A ; **3** B ; **4** C ; **5** C ;
6 A ; **7** B ; **8** B ; **9** B ; **10** C.

POUR APPROFONDIR

76 **1.** Le nombre d'arrivées possibles est : $6 \times 5 = 30$.

2. M. Gold gagne $15\,250 + 7\,625 = 22\,875$ € si ses deux chevaux arrivent premier et second, ce qui arrive de deux façons possibles (le 2 puis le 6, ou le 6 puis le 2).

Ainsi : $P(X = 22\,875) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

On fait de même pour les autres cas :

$P(X = 15\,250) = \frac{2 \times 4}{20} = \frac{4}{15}$; $P(X = 7\,625) = \frac{4 \times 2}{30} = \frac{4}{15}$;

$P(X = 0) = \frac{4 \times 3}{30} = \frac{2}{5}$.

On obtient la loi de probabilité de X :

x_i	0	7 625	15 250	22 875
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

77 **1.** Le nombre total de tirages est : $20 \times 20 = 400$.

2. $P(X = 2) = \frac{5 \times 5}{400} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

$P(X = 1) = \frac{5 \times 15 \times 2}{400} = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

$P(X = 0) = \frac{15 \times 15}{400} = \frac{225}{400} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$.

78 **1.** Correctif : il faut d'abord calculer $P(X = -2)$ et pas $P(X = 2)$.

$E(X) = (-2) \times P(X = -2) + 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1)$

$= -2P(X = -2) + \frac{1}{3}$.

Puisque $E(X) = 0$, on a : $-2P(X = -2) + \frac{1}{3} = 0$,

soit $P(X = -2) = \frac{1}{6}$.

D'où : $V(X) = (-2)^2 \times \frac{1}{6} + 0^2 \times P(X = 0) + 1 \times \frac{1}{3} - 0^2 = 1$.

2. Loi de probabilité de X :

x_i	–2	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

79 **1.** Loi de probabilité de X :

x_i	950	1 050	1 100	1 200
$P(X = x_i)$	0,90	0,04	0,02	0,04

2. $E(X) = 967$; $\sigma(X) \approx 55{,}3$ (à 0,1 près).

$E(X)$ représente le prix de revient moyen d'un objet produit pour l'usine.

3. a. Non : elle va perdre en moyenne 7 € par objet produit.

b. Elle doit choisir un prix de vente de 1 067 €.

80 **1.** Puisque $p_R + p_V + p_N = 1$,
on a : $p_R + 2p_R + \frac{1}{2}p_R = 1$, soit $p_R = \frac{2}{7}$.
D'où : $p_V = \frac{4}{7}$ et $p_N = \frac{1}{7}$.

2. Soit n le nombre de boules de l'urne.
Alors : $p_N = \frac{3}{n} = \frac{1}{7}$, soit $n = 21$.
L'urne contient 21 boules : 3 noires, 6 rouges et 12 vertes.

3. Loi de probabilité de X :

x_i	0,5	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

Espérance mathématique de X : $E(X) = \frac{10,5}{7} = 1,5$.

4. Correctif : le ticket doit être vendu 1,60 € (et non pas 1,50 €). Le bénéfice espéré est alors de 0,10 € par jeu, soit 100 €.

81 **1.** Liste des diagnostics possibles :
$(\overline{A}, CG, P)$, $(\overline{A}, \overline{CG}, P)$, $(\overline{A}, CG, \overline{P})$, $(\overline{A}, \overline{CG}, \overline{P})$, $(A, \overline{CG}, P)$, $(A, CG, \overline{P})$, $(A, \overline{CG}, \overline{P})$.

2. Loi de probabilité de X :

x_i	105	185	265	345
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

3. $E(X) = \frac{1\,455}{7} \approx 207,86$ (à 0,01 près).

4. Pour que le prix moyen d'une réparation soit de 200 €, il faut diminuer de 7,86 € environ le coût (fixe) de la main-d'œuvre, c'est-à-dire l'établir à 17 € (en arrondissant à l'unité).

82 **1.** Il y a 8 circuits possibles : I – L – O – Z ; I – O – L – Z ; L – O – Z – I ; L – Z – O – I ; L – O – I – Z ; L – I – O – Z ; Z – O – L – I ; Z – L – O – I.

2. Loi de probabilité de X :

x_i	1 400	1 500	1 600	1 800	1 900
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. $E(X) = 1\,575$. La longueur moyenne des circuits possibles est de 1 575 kilomètres.

83 **1.** Loi de probabilité de X_n :

x_i	–10	0	30
$P(X_n = x_i)$	$\frac{n}{n+7}$	$\frac{5}{n+7}$	$\frac{2}{n+7}$

2. $E(X_n) = \frac{-10n + 60}{n + 7}$.
$E(X_n) \leqslant -2$ s'écrit aussi : $-10n + 60 \leqslant -2n - 14$,
soit $n \geqslant 9,25$.
Le nombre minimal de cases rouges à prévoir est 10.

84 **1.** $B = 100N - 10N - 50 \times 5 = 90N - 250$.

On en déduit la loi de probabilité de B :

b_i	–250	–160	–70	20	110	200	290	380
$P(B = b_i)$	0,05	0,1	0,1	0,15	0,25	0,15	0,15	0,05

2. $E(B) = 87,50$.

3. Pour une année de 365 jours, l'espérance mathématique du bénéfice annuel est 31 937,50 €.

85 **1.** On note C l'issue « la crue se produit cette année » et $\overline{C}$ l'issue « la crue ne se produit pas cette année ». Cette expérience se répète 50 fois de façon indépendante. On veut calculer la probabilité de la liste $\overline{C}\,\overline{C}\,\overline{C} \ldots \overline{C}$ (cette liste comprenant 50 termes).
Puisque $P(\overline{C}) = 0,99$, on en déduit :
$$P(\overline{C}\,\overline{C} \ldots \overline{C}) = 0,99^{50} \approx 0,605 \text{ (à 0,001 près).}$$

2. Soit A l'événement « il se produit au moins une crue centennale de la Seine durant les 100 prochaines années » ; alors $\overline{A}$ est l'événement « il ne se produit aucune crue centennale durant les 100 prochaines années ». Ainsi : $P(\overline{A}) = P(\overline{C}\,\overline{C}\,\overline{C} \ldots \overline{C}) = 0,99^{100}$.
D'où : $P(A) = 1 - 0,99^{100} \approx 0,634$.

86 **1.** C'est faux. Si l'on considère la variable aléatoire X prenant les valeurs –1 et 2 telle que :
$$P(X = -1) = 0,1 \text{ et } P(X = 2) = 0,9,$$
on a : $E(X) = -0,1 + 1,8 = 1,7$ et on a bien $E(X) > 0$.

2. C'est vrai. En effet, si $V(X) = 0$,
alors $p_1\,[x_1 - E(X)]^2 + \ldots + p_r\,[x_r - E(X)]^2 = 0$.
Cette somme de nombres positifs étant nulle, tous les termes de la somme sont nuls.
On en déduit : $x_1 - E(X) = \ldots = x_r - E(X) = 0$, car les probabilités p_i ne sont pas nulles. Ainsi, toutes les valeurs x_i sont égales à $E(X)$: il existe bien un réel m tel que toutes les valeurs prises par X sont égales à m.

3. C'est faux. Si, par exemple, $P(X = a) = 0,2$ et $P(X = b) = 0,8$, alors $E(X) = 0,2a + 0,8b = 0$.
On en déduit que $a = -4b$ et non pas que $a = -b$.

87 **1.** La probabilité de n'obtenir aucun jeton de café est $0,9^4$, donc la probabilité d'obtenir au moins un jeton de café est : $1 - 0,9^4 = 0,3439$.

2. Avec le même raisonnement, on trouve pour probabilité $1 - 0,9^n$.

3. On résout : $1 - 0,9^n > 0,99$, ou encore $0,9^n < 0,01$.
À l'aide de la calculatrice, on obtient : $0,9^{43} \approx 0,0108$ et $0,9^{44} \approx 0,0097$.
Le nombre minimal de jetons à introduire est donc 44.

88 **1. a.** La probabilité de n'avoir aucun six en trois lancers de dé est : $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.
Donc, la probabilité d'amener au moins un six avec trois dés est : $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

b. La probabilité cherchée étant $\frac{91}{216}$, on peut parier que cet événement aura lieu 91 fois sur 216, c'est-à-dire dans 91 cas contre 125 cas contraires.

2. a. Avec deux jets, la probabilité de n'avoir aucun 6 est $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$, donc la probabilité d'avoir au moins un six est $\frac{11}{36}$. Si a est l'enjeu, l'attente est donc $\frac{11a}{36}$ (c'est l'espérance de gain du joueur).

b. Avec trois jets, le même calcul donne une attente de $\frac{91a}{36}$.

89 **1.** Si « FACE » apparaît pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ lancer, la banque paiera 2^n euros au joueur.

2. La loi de probabilité de X_n est donnée par le tableau :

x_i	2	4	8	16	…	2^n
$P(X_n = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…	$\frac{1}{2^n}$

$$E(X_n) = 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{8} + \ldots + 2^n \times \frac{1}{2^n}$$
$$= 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n.$$

3. Puisque l'espérance mathématique de gain du joueur est n, le jeu sera équitable si la mise initiale du joueur est de n euros.

4. Si on ne limite pas le nombre de lancers, aucune mise initiale ne pourra rendre le jeu équitable.

En effet, quelle que soit la mise initiale, l'espérance mathématique de gain est positive, puisque n tend vers l'infini quand on augmente indéfiniment le nombre de parties.

Le paradoxe tient dans le fait que la banque n'est pas infiniment riche, et va donc cesser de payer au-delà d'une certaine somme. Par exemple, si la banque possède un milliard d'euros (!!!), elle ne pourra pas payer si le jeu dépasse le 30e coup puisque $2^{30} \approx 1{,}07 \times 10^9$ €. Cependant, la probabilité d'arriver au 30e coup est très faible (une « chance » sur un milliard !).

90 Le candidat peut répondre de façon équiprobable :

(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) ou (c, b, a).

Supposons que la bonne réponse soit (a, b, c).

Alors, il a trois bonnes réponses dans un seul cas.

Il a une bonne réponse dans trois cas :

(a, c, b), (b, a, c) et (c, b, a).

Il n'a aucune bonne réponse dans les deux cas restants.

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	0	200	600
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

91 **1.** Loi de probabilité de X_n :

x_i	$-0{,}7$	$0{,}3$	$3{,}3$
$P(X_n = x_i)$	$\frac{n}{n+4}$	$\frac{3}{n+4}$	$\frac{1}{n+4}$

D'où : $E(X_n) = \dfrac{-0{,}7n + 4{,}2}{n + 4}$.

2. Correctif : il faut calculer le nombre minimal de boules noires (et non maximal).

Pour que le club puisse gagner au moins 0,5 € par partie, le joueur doit perdre plus de 0,5 € par partie. On cherche n de telle façon que $E(X_n) < -0{,}5$.

Ainsi : $-0{,}7n + 4{,}2 < -0{,}5n - 2$, soit $n > 31$.

Le nombre minimal de boules noires contenues dans le sac doit être de 32.

92 Soit X la variable aléatoire associée au nombre de lancers nécessaires afin d'obtenir « PILE ».

Alors, à l'aide d'un arbre pondéré, on obtient:

$P(X = 1) = \frac{1}{2}$; $P(X = 2) = \frac{1}{4}$; $P(X = 3) = \frac{1}{8}$; $P(X = 4) = \frac{1}{16}$.

Ainsi: $P(X < 5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

93 **1.** Soit A l'événement: « les 100 passagers se présentent ». On est en présence de la répétition de 100 expériences indépendantes, telles que l'issue « un passager donné se présente » a pour probabilité 0,9.

Alors : $P(\text{A}) = 0{,}9^{100} \approx 3 \times 10^{-5}$.

2. Soit B l'événement « un seul passager ne se présente pas sur 100 passagers », c'est-à-dire « 99 passagers se présentent sur les 100 passagers ».

Alors : $P(\text{B}) = 0{,}1 \times 0{,}9^{99} \times 100 \approx 3 \times 10^{-4}$.

94 **1.** Loi de probabilité de G :

g_i	$-3{,}5$	1	10
$P(G = g_i)$	$\frac{2n}{(n+1)^2}$	$\frac{n^2}{(n+1)^2}$	$\frac{1}{(n+1)^2}$

2. $E(G) = \dfrac{n^2 - 7n + 10}{(n+1)^2}$.

3. Le jeu est équitable si et seulement si $E(G) = 0$, soit $n^2 - 7n + 10 = 0$, soit $n = 2$ ou $n = 5$.

4. Le jeu risque de rapporter plus d'argent à Romain qu'à Maël si $E(G) < 0$, c'est-à-dire $n^2 - 7n + 10 < 0$, soit encore $2 < n < 5$, c'est-à-dire $n = 3$ ou $n = 4$.

95 **1.** Loi de probabilité de X_n :

x_i	-12	0	2	8	16
$P(X_n = x_i)$	$\frac{4}{n+7}$	$\frac{n^2}{(n+7)^2}$	$\frac{4n}{(n+7)^2}$	$\frac{3n}{(n+7)^2}$	$\frac{3}{n+7}$

2. $$E(X_n) = -12 \times \frac{4}{n+7} + 0 \times \frac{n^2}{(n+7)^2} + 2 \times \frac{4n}{(n+7)^2} + 8 \times \frac{3n}{(n+7)^2} + 16 \times \frac{3}{n+7}$$

soit $E(X_n) = \dfrac{32n}{(n+7)^2}$.

3. f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$

et $f'(x) = \dfrac{(x+7)^2 - 2x(x+7)}{(x+7)^4} = \dfrac{7-x}{(x+7)^3}$.

On en déduit que f est croissante sur $[0\,;\,7]$, et décroissante sur $[7\,;+\infty[$.

4. $E(X_n) = 32f(x)$. Donc l'espérance mathématique de X_n est maximale pour $n = 7$. La valeur de ce maximum est : $\dfrac{8}{7}$, soit environ 1,14 €.

Prises d'initiatives

96 Soit deux variables aléatoires : X est définie par le nombre de points obtenus avec la première stratégie, et Y est définie par le nombre de points obtenus avec la seconde stratégie.

On va comparer leurs espérances mathématiques.

À l'aide d'un arbre, on dénombre tous les cas possibles. On obtient les lois de probabilité ci-dessous.

x_i	0	3	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

y_i	0	1	4
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On a : $E(X) = \dfrac{15}{8} = 1{,}875$ et $E(Y) = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

La première stratégie est donc préférable pour le candidat.

97 Soit X la variable aléatoire associée au gain de l'organisateur avec la stratégie du lot unique, et Y celle associée à son gain avec la stratégie des 50 lots.

On détermine les lois de probabilité de X et de Y.

x_i	–295	5
$P(X = x_i)$	0,01	0,99

y_i	–1	5
$P(Y = y_i)$	0,5	0,5

On calcule : $E(X) = 2$, puis $E(Y) = 2$.

Les deux stratégies sont donc équivalentes pour l'organisateur.

98 Soit X la variable aléatoire associée au nombre de tonneaux que le particulier doit goûter pour goûter un tonneau de Bordeaux. On réalise un arbre donnant toutes les issues (l'arbre s'arrête dès qu'on atteint un tonneau de Bordeaux) : il y a 6 branches à la première étape (dont 3 qui s'arrêtent), 5 à la seconde (dont 3 qui s'arrêtent), 4 à la troisième (dont 2 qui s'arrêtent), et 3 à la quatrième étape.

Ainsi : $P(X=2) = \dfrac{3\times3}{6\times5} = \dfrac{3}{10}$; $P(X=3) = \dfrac{3\times2\times3}{6\times5\times4} = \dfrac{3}{20}$;

$P(X=4) = \dfrac{3\times2\times1\times3}{6\times5\times4\times3} = \dfrac{1}{20}$.

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \dfrac{35}{20} = 1{,}75$.

Le particulier devra goûter en moyenne 1,75 tonneaux, soit près de deux tonneaux.

99 Soit X la variable aléatoire associée au nombre de tirages nécessaires pour n'obtenir dans l'urne que des boules de deux couleurs différentes.

La probabilité de ne faire qu'un tirage est $\dfrac{1}{6}$ (on tire une boule rouge).

Pour deux tirages, il y a 30 cas possibles (6×5) et 7 cas favorables (4 si on tire deux noires et 3 si on tire une noire, puis une rouge), d'où une probabilité de $\dfrac{7}{30}$.

Pour trois tirages, il y a 120 cas possibles ($6 \times 5 \times 4$) et 36 cas favorables (6 pour chacune des possibilités NJR, NJN, JNR, JNN, JJR et JJJ), d'où une probabilité de $\dfrac{36}{120}$, soit $\dfrac{3}{10}$.

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \dfrac{82}{30} \approx 2{,}73$.

On doit faire en moyenne 2,7 tirages, c'est-à-dire près de trois tirages.

F Activités TICE

TP 1 La chasse aux canards

Ce TP étudie, dans un cas simple (trois chasseurs et trois canards), le nombre de survivants lors d'une chasse aux canards. Dans un premier temps, on traite ce problème expérimentalement en simulant cette expérience à l'aide du tableur. Puis on modélise la situation et on résout le problème de façon théorique : on utilise pour cela la notion de variable aléatoire.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :
11S_TP1.xlsx (Excel 2007), 11S_TP1.xls (Excel 2003) et 11S_TP1.ods (Open Office).
11S_correctionTP1.xlsx (Excel 2007),
11S_correctionTP1.xls (Excel 2003)
et 11S_correctionTP1.ods (Open Office)

Partie A

1. Pour que chacune des cellules **A2**, **B2**, **C2** contienne le numéro du canard tué par chacun des trois chasseurs, on entre dans chacune de ces cellules la formule :

`=ALEA.ENTRE.BORNES(1;3)`.

a. Dans la cellule **E2**, on calcule le nombre de fois où le canard numéro 1 est touché par un chasseur lors de la première expérience avec la formule : `=NB.SI($A2:$C2;E$1)` : la fonction **NB.SI** compte le nombre de fois où apparaît le nombre donné en **E$1** (c'est le numéro du canard) dans la plage de cellules **$A2 :$C2**.

Les symboles $ placés dans ces formules permettront de recopier vers la droite cette formule afin de l'appliquer aux deux autres canards.

b. Il suffit de recopier vers la droite la formule écrite en **E2**.

2. Pour compter le nombre de canards survivants, on compte le nombre de 0 qui sont dans les cellules **E2**, **F2** et **G2** : en effet, dès qu'il y a un 0 dans une de ces cellules, cela signifie que le canard associé à cette cellule n'a pas été touché. On compte donc le nombre de survivants avec la fonction **NB.SI** sur la plage de cellules **E2 :G2**.

On entre donc en **H2** la formule : `=NB.SI(E2:G2;0)` .

3. Pour simuler 500 expériences, on recopie vers le bas jusqu'à la ligne 501 les colonnes **A**, **B**, **C**, **E**, **F**, **G** et **H**.

On calcule le nombre moyen de survivants dans la cellule **J2** en utilisant la fonction **MOYENNE** sur la plage de cellules **H2 :H501**.

On saisit en **J2** la formule : `=MOYENNE(H2:H501)`.

4. Pour calculer la fréquence d'avoir 0, 1 ou 2 survivants, on entre dans les cellules **K2** à **K4** les entiers 0, 1 et 2, et on calcule les fréquences correspondantes dans les cellules **I2** à **I4**.

La fréquence de n'avoir aucun survivant est le quotient du nombre de fois où on n'a aucun survivant (obtenu par la fonction **NB.SI** dans la plage **H2 :H501**) par 500. On saisit ainsi en **I2** la formule : `=NB.SI(H$2:H$501;K2)/500`

On obtient la fréquence d'avoir un survivant, puis deux survivants en recopiant cette formule vers le bas (ce qui explique dans la formule précédente la présence des $, afin que la plage **H2 :H501** ne se recopie pas en **H3 :H502**…).

5. Pour recommencer avec 5 000 expériences de ce type, on peut recopier cette feuille de calcul dans une autre feuille (par un clic droit sur le nom de la feuille, dans l'onglet en bas de feuille, puis en n'oubliant pas de cocher la case « créer une copie »). Il suffit alors de modifier en **J2**, **L2**, **L3** et **L4** les formules en remplaçant 501 par 5001 et 500 par 5 000.

6. À l'aide de la touche F9, plusieurs simulations nous indiquent que le nombre moyen de canards survivants est soit 0,88, soit 0,89, soit 0,90. On constate aussi que la fréquence de n'avoir aucun survivant est voisine de 22 %.

Partie B

1. X prend les valeurs 0, 1 et 2.

2. L'arbre contient 3 branches au premier niveau, 9 branches au second niveau et 27 branches au troisième niveau.

3. $P(X = 2)$ est la probabilité qu'il y ait 2 survivants, c'est-à-dire un seul canard touché : ceci arrive dans trois cas seulement, soit $P(X = 2) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

4. À l'aide de l'arbre construit précédemment, on se rend compte qu'il y a 6 issues pour lesquelles il n'y a aucun survivant. D'où : $P(X = 0) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

On en déduit : $P(X = 1) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$.

5. $E(X) = 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}89$. On retrouve les résultats conjecturés dans la **partie A**.

Partie C

1. La probabilité de survie du canard C_3 est $\frac{2^3}{3^3}$, soit $\frac{8}{27}$.

2. Chacun des trois canards survit avec la probabilité $\frac{8}{27}$, donc il y aura en moyenne : $3 \times \frac{8}{27} = \frac{8}{9} = 0{,}89$ canard survivant.

3. Avec 10 chasseurs et 10 canards, la probabilité de survie du canard numéro 10 est $\frac{9^{10}}{10^{10}}$, soit environ 0,35. Il y aura donc en moyenne 3,5 canards survivants.

TP 2 Le lièvre et la tortue

Dans ce TP, on s'intéresse au problème du lièvre et de la tortue. Dans un premier temps, on simule cette expérience un grand nombre de fois à l'aide d'un programme sur le logiciel AlgoBox : une grande partie du programme est donnée à l'élève, il doit d'abord le comprendre, puis le compléter afin de simuler un grand nombre d'expériences de ce type. Dans un second temps, on modélise la situation et on résout le problème en utilisant les résultats vus dans le chapitre sur la répétition d'expériences identiques et indépendantes.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 11S_TP2.alg et 11S_correctionTP2.alg (AlgoBox).

Partie A

1. Algorithme :

```
Variables
a, p variables entières
Initialisation
a prend la valeur 1
p prend la valeur Partie entière (random × 6) + 1
Traitement
  Tant que a ≠ 6 et p ≠ 6
  p prend la valeur p + 1
  a prend la valeur Partie entière (random × 6) + 1
  Fin Tant que
Sortie
Afficher p
```

2. a. La variable a représente, à chaque étape, le numéro de la face obtenue sur le dé.

La variable p représente le nombre de fois où on lance le dé dans une partie.

b. La boucle « **Tant que** » déclenche un nouveau lancer du dé, et ceci tant que le lancer précédent n'a pas donné 6 ($a \neq 6$) et qu'on n'a pas réalisé 6 lancers ($p \neq 6$).

3. a. Algorithme complété :

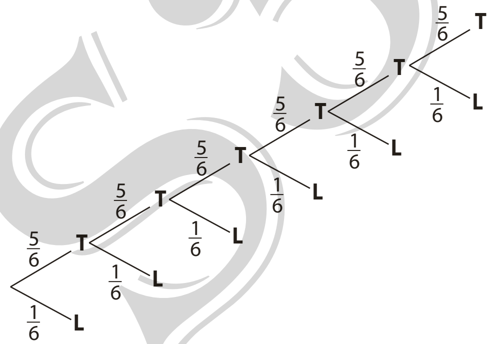
```
Variables
a, p, i, n, s variables entières
Entrée
Saisir n
Traitement
  Pour i allant de 1 à n
  a prend la valeur 1
  p prend la valeur Partie entière (random × 6) + 1
    Tant que a ≠ 6 et p ≠ 6
    p prend la valeur p + 1
    a prend la valeur Partie entière (random × 6) + 1
    Fin Tant que
  s prend la valeur s + p
  Fin Pour
s prend la valeur s/n
Sortie
Afficher s
```

b. Pour compléter le fichier fourni, inutile de tout retaper : on déclare les nouvelles variables i, n, et s, puis on crée la ligne permettant de lire n, et enfin on crée une boucle « **Pour** ». Pour déplacer certaines lignes déjà créées à l'intérieur de la boucle « **Pour** », on utilise Couper ligne puis Coller ligne dans le menu Édition, et pour déplacer tout le bloc de lignes de la boucle « **Tant que** », on fait de même en se plaçant sur la première ligne du bloc de lignes de cette boucle.

4. En faisant fonctionner ce programme pour diverses valeurs de n, on obtient environ 4 comme nombre moyen de parties. On peut conjecturer que le nombre moyen de parties est voisin de 4.

Partie B

1. On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. La probabilité que la tortue gagne est : $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}335$.

La probabilité que le lièvre gagne est : $1-\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}665$.

3. Loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6^2}$	$\frac{5^2}{6^3}$	$\frac{5^3}{6^4}$	$\frac{5^4}{6^5}$	$\frac{5^5}{6^6}$
Valeur approchée à 0,001 près	0,167	0,139	0,116	0,096	0,080	0,402

4. $E(X) = \dfrac{6^4 + 10 \times 6^3 + 75 \times 6^2 + 500 \times 6 + 5^5 + 6 \times 5^5}{6^5}$

$= \dfrac{31\,031}{7\,776} \approx 3{,}99.$

5. On peut dire que le lièvre gagne dans 66 % des cas environ, et le nombre moyen de lancers du dé est très proche de 4. On peut remarquer que la simulation avec $n = 1\,000$ donne une bonne valeur approchée du résultat.

CHAPITRE 12 Loi binomiale et applications

A Le programme

Dans le cas particulier d'expériences identiques et indépendantes à deux issues, on introduit la loi binomiale. En s'appuyant sur cette loi, on poursuit la formation des élèves dans le domaine de l'échantillonnage.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Probabilités Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.	• Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale. • Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale.	La représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée : il s'agit ici d'installer une représentation mentale efficace. On peut ainsi : – faciliter la découverte de la loi binomiale pour des petites valeurs de n ($n \leqslant 4$) ; – introduire le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ comme nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions ; – établir enfin la formule générale de la loi binomiale.
Schéma de Bernoulli, loi binomiale (loi du nombre de succès). Coefficients binomiaux, triangle de Pascal.	• Représenter graphiquement la loi binomiale.	Cette égalité est établie en raisonnant sur le nombre de chemins réalisant $k + 1$ succès pour $n + 1$ répétitions. On établit également la propriété de symétrie des coefficients binomiaux. L'utilisation des coefficients binomiaux dans des problèmes de dénombrement et leur écriture à l'aide des factorielles ne sont pas des attendus du programme.
Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale.	• Utiliser l'espérance d'une loi binomiale dans des contextes variés.	En pratique, on utilise une calculatrice ou un logiciel pour obtenir les valeurs des coefficients binomiaux, calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale. La formule donnant l'espérance de la loi binomiale est conjecturée puis admise, celle de la variance est admise. ◇ On peut simuler la loi binomiale avec un algorithme.
Échantillonnage Utilisation de la loi binomiale pour une prise de décision à partir d'une fréquence.	• Exploiter l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale, pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion.	L'objectif est d'amener les élèves à expérimenter la notion de « différence significative » par rapport à une valeur attendue et à remarquer que, pour une taille de l'échantillon importante, on conforte les résultats vus en classe de Seconde. ◇ L'intervalle de fluctuation peut être déterminé à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme. Le vocabulaire des tests (test d'hypothèse, hypothèse nulle, risque de première espèce) est hors programme.

B Notre point de vue

Ce chapitre introduit deux lois de probabilité : la loi de Bernoulli et surtout la loi binomiale. Cette dernière loi, conformément au programme, est d'abord introduite pour de petites valeurs de n ($n = 2$, $n = 3$). Nous avons pensé qu'il fallait la faire fonctionner tout d'abord pour de petites valeurs de n sans utiliser la formule générale : le recours à un arbre pondéré et le dénombrement sur l'arbre des chemins conduisant à un succès permet à l'élève de comprendre peu à peu le fonctionnement de cette loi. La progression dans le manuel suit cet apprentissage progressif : le savoir-faire 2 (lié à la première page de cours) utilise les arbres pondérés, et le professeur trouvera les exercices 22 à 26 pour travailler dans cet esprit. L'activité 1 introduit cette notion à partir des méthodes du chapitre précédent.
On introduit ensuite les coefficients binomiaux comme le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions d'une épreuve de Bernoulli : l'activité 2 permet une première approche de ces coefficients, et l'activité 3 étudie, à l'aide d'un exemple concret (les rues de Manhattan) la propriété de Pascal des coefficients binomiaux. L'outil utilisé ici pour le calcul de ces coefficients est principalement la calculatrice. Pour cela, la méthode est décrite page 298 dans le cours, et détaillée pages 352 et 356 dans les fiches « calculatrices ».
La formule générale donnant $P(X = k)$ pour une loi binomiale est ensuite donnée, mais là aussi, c'est la calculatrice (et parfois le tableur) qui va permettre à l'élève de calculer rapidement de façon pratique, soit les probabilités de la forme $P(X = k)$, soit celles de la forme $P(X \leqslant k)$. La méthode est décrite page 300 du manuel et détaillée pages 352 et 356.
La seconde partie du chapitre est consacrée à la détermination d'un intervalle de fluctuation relatif à une fréquence à l'aide de la loi binomiale : l'activité 5 introduit la méthode sur un exemple, à l'aide de deux logiciels, un tableur et le logiciel Sine Qua Non. Pour la détermination de ces intervalles, la bonne maîtrise de la loi binomiale sur la calculatrice, et en particulier l'élaboration d'un tableau de valeurs $P(X \leqslant k)$, où X suit une loi binomiale, est un savoir-faire que l'élève doit posséder pour traiter ce type de problème (voir le savoir-faire 9). La détermination de cet intervalle de fluctuation permet alors de prendre des décisions à partir d'un échantillon, à un coefficient de confiance donné. En cela, on poursuit le travail fait en Seconde, mais en le généralisant car les résultats trouvés sont valables pour toute valeur de la proportion p et de la taille n de l'échantillon.
La page « **Chercher avec méthode** » a pour objet un problème classique de probabilité, dont les questions se traitent facilement en introduisant une variable aléatoire suivant une loi binomiale : la difficulté pour l'élève est ici de reconnaître une situation de loi binomiale et d'introduire par lui-même la variable aléatoire adéquate.
Dans les exercices d'approfondissement, nous proposons quelques exercices qui permettent de découvrir de nouvelles méthodes : la formule du binôme de Newton, ainsi que des tests unilatéraux (alors que les tests proposés dans les savoir-faire et les exercices d'entraînement sont tous bilatéraux).
Les TP 2 et 3 font découvrir, grâce à la loi binomiale, des applications étonnantes des probabilités. Le TP 1, conformément au programme, permet de simuler une loi binomiale. Enfin, le TP 4 est d'un grand intérêt pour les élèves (et aussi le professeur), car il permet d'obtenir, avec n, p et un seuil de risque donné, un intervalle de fluctuation d'une proportion de façon automatisée.

Les notions abordées dans le chapitre 12

1. Loi de Bernoulli et loi binomiale
2. Coefficients binomiaux
3. Propriétés de la loi binomiale
4. Intervalle de fluctuation d'une fréquence
5. Prise de décision sur un échantillon

C Avant de commencer

Se tester avec des QCM

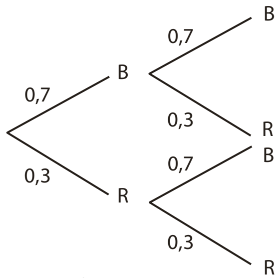
1 D ; **2** B ; **3** B, C, D ; **4** A ; **5** D ; **6** B.

Se tester avec des exercices

7 $P(3 \leqslant X \leqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - 0{,}43 = 0{,}57$.

$P(X = 5) = 1 - P(X \leqslant 4) = 1 - 0{,}69 = 0{,}31$.

8 **1.**



2. $P(X = 2) = \left(\dfrac{700}{1\,000}\right)^2 = 0{,}7^2 = 0{,}49$.

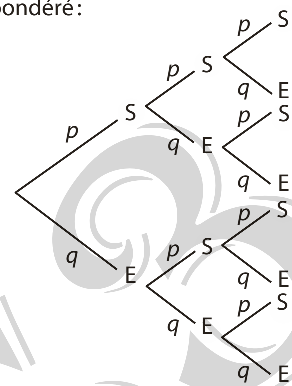
3. $P(X = 1) = 2 \times \dfrac{700}{1\,000} \times \dfrac{300}{1\,000} = 0{,}42$.

4. P(au moins une perle rouge)

$= 1 - P$(aucune perle rouge)

$= 1 - \left(\dfrac{700}{1000}\right)^2 = 1 - 0{,}7^2 = 0{,}51$.

9 Arbre pondéré :



Il existe trois chemins de l'arbre qui permettent d'obtenir deux fois l'issue S : les chemins correspondants aux événements SSE, SES et ESS. (Attention, il y a une erreur dans le corrigé en fin de manuel.)

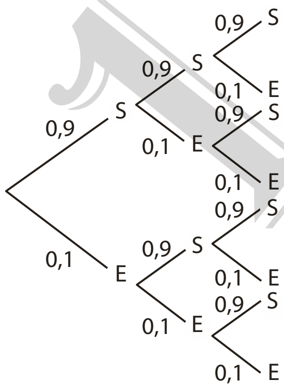
D Activités

Activité 1 L'archer

Cette activité doit permettre d'utiliser les arbres pour découvrir la loi binomiale et faire une conjecture sur l'espérance de cette loi.

1. Lors de chaque tir, la probabilité que l'archer atteigne le centre de la cible est égale à 0,9.

2. $P(X = 0) = 0{,}1^3 = 0{,}001$ et $P(X = 3) = 0{,}9^3 = 0{,}729$.



3. L'événement « $X = 1$ » est associé aux trois chemins : SEE, ESE, EES qui ont tous la même probabilité : $0{,}9 \times 0{,}1^2$.
L'événement « $X = 1$ » est la réunion des trois événements correspondants aux chemins SEE, ESE, EES ; ces événements sont incompatibles deux à deux, donc la probabilité de l'événement « $X = 1$ » est égale à la somme des probabilités de ces trois événements.
Donc, $P(X = 1) = 3 \times 0{,}9 \times 0{,}1^2 = 0{,}027$.

4. De même l'événement « $X = 2$ » est associé aux trois chemins : SSE, SES, ESS qui ont tous la même probabilité : $0{,}9^2 \times 0{,}1$;
donc $P(X = 2) = 3 \times 0{,}9^2 \times 0{,}1 = 0{,}243$.

5. Loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,001	0,027	0,243	0,729

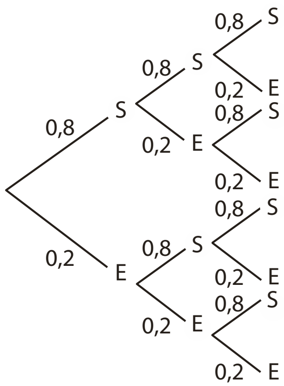
On vérifie que la somme des probabilités précédentes est égale à 1.

6. $E(X) = 2{,}7$. On remarque que $E(X) = 3 \times 0{,}9$.

Activité 2 Les routes du succès

Dans cette activité, on dénombre les chemins de deux arbres permettant de réaliser un nombre de succès déterminé. Cette activité doit permettre aux élèves de découvrir la propriété de symétrie des coefficients binomiaux dans le cas où $n = 3$.

1. Arbre pondéré associé à la situation de l'énoncé.



2. Un seul chemin de l'arbre réalise trois succès ; trois chemins de l'arbre réalisent deux succès ; trois chemins de l'arbre réalisent un seul succès.

3. Il y a autant de chemins qui réalisent deux succès que de chemins qui réalisent un seul succès car chaque fois qu'on a deux succès sur trois matchs pour Alain, cela correspond à avoir un échec pour son adversaire et inversement.

Activité 3 À la recherche de son chemin dans les rues de Manhattan

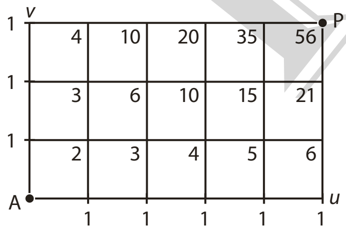
Cette activité utilise un quadrillage régulier, comme le sont les rues et avenues de Manhattan, pour travailler avec les coefficients binomiaux dans un contexte nouveau, et surtout découvrir la propriété de Pascal des coefficients binomiaux. Dans ce cas, au lieu de construire un arbre avec deux choix possibles à chaque étape, on se déplace sur un quadrillage avec aussi deux choix possibles : le piéton peut aller vers la droite ou bien vers le haut.

1. $n(M) = 1$ pour tout point M de la demi-droite $[Au)$ et pour tout point M de la demi-droite $[Av)$.

2. $n(B) = 2$; $n(C) = 3$; $n(D) = 3$.

On en déduit $n(E) = n(C) + n(D) = 6$.

3. Quadrillage reproduit avec le nombre de chemins conduisant de A à chacun des nœuds.



4. a. Le piéton doit être parvenu, soit au point R qui se trouve cinq carreaux à droite de A et deux carreaux au-dessus, soit au point S qui se trouve quatre carreaux à droite de A et trois carreaux au-dessus.

b. On en déduit $n(P) = n(R) + n(S)$.

c. Cette relation est valable pour tout point du quadrillage situé au-dessus des deux axes et non situé sur les axes.

5. a. Un chemin menant de A à P est une suite d'instructions données au piéton sous la forme « à droite » (D) ou « en haut » (H), avec obligatoirement 5 instructions D et 3 instructions H, comme par exemple DDDDDHHH. C'est donc un chemin avec 5 succès notés D d'un arbre pondéré modélisant un schéma de Bernoulli avec 8 répétitions.

Ainsi, le nombre de chemins menant de A à P est aussi le nombre de chemins d'un arbre pondéré avec 5 succès lors de 8 répétitions d'une épreuve de Bernoulli, soit $\binom{8}{5}$.

b. La relation vue en **4. b.** s'écrit aussi $\binom{8}{5} = \binom{7}{5} + \binom{7}{4}$, et la généralisation vue en **4. c.** peut s'écrire :

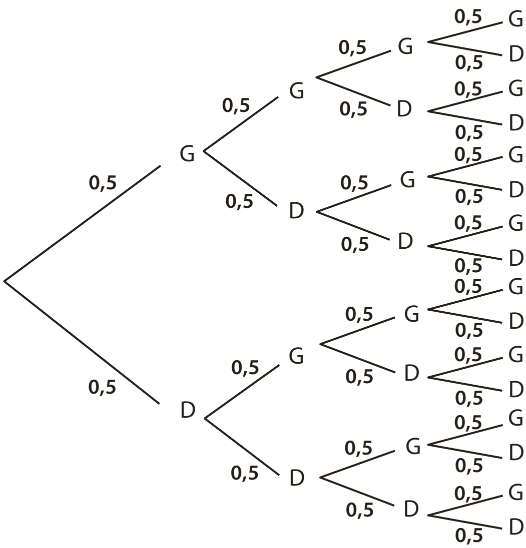
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Activité 4 La planche de Galton

Dans cette activité, on utilise un arbre pondéré pour estimer le nombre de billes qui peuvent tomber dans chacun des casiers d'une planche de Galton à quatre niveaux. Avec le tableur, on simule l'expérience qu'on peut projeter aux élèves en répétant plusieurs fois l'expérience et en faisant varier le nombre de billes.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 12S_activite4.xlsx (Excel 2007), 12S_activite4.xls (Excel 2003) et 12S_activite4.ods (Open Office).

1. On construit un arbre à 4 niveaux.



2. La probabilité que la bille arrive en M est : $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}125$; on calcule de même la probabilité que la bille arrive en R.
Pour arriver en N, la bille doit partir une fois vers la droite et 3 fois vers la gauche ; il y a 4 chemins de l'arbre qui correspondent à ce cas ; donc la probabilité que la bille arrive en N est $4 \times \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$; il en est de même pour la probabilité d'arriver en Q.
Pour arriver en P, la bille doit partir deux fois à droite et deux fois à gauche ; il y a 6 chemins de l'arbre qui correspondent à ce cas ; donc la probabilité que la bille arrive en P est $6 \times \frac{1}{2^4} = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

3. Lorsqu'on lance 64 billes, il peut tomber environ 4 billes dans chacun des casiers M et R, 16 billes dans chacun des casiers N et Q, et 24 billes dans le casier P.

4. La première feuille de calcul du tableur simule une expérience de la planche de Galton avec 64 boules : le tableau indique le nombre de billes qui tombent dans chaque panier, puis calcule la fréquence des billes dans chaque panier. On réitère l'expérience en appuyant sur la touche F9.
Les deux autres onglets permettent de renouveler l'expérience avec 256 billes, puis avec 1 024 billes. Il est intéressant alors de comparer les fréquences trouvées avec les probabilités théoriques.

Activité 5 De moins en moins de risque

Cette activité introduit, à partir d'un exemple concret, la recherche d'un intervalle de fluctuation en utilisant la loi binomiale. Cette recherche est étayée graphiquement par l'utilisation du tableur et du logiciel Sine Qua Non : en effet, le diagramme en bâtons de la loi binomiale considérée, et sa partition en trois zones A, B et C, permettent de visualiser l'intervalle de fluctuation et la signification pratique des zones de rejet.
Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 12S_activite5.xlsx (Excel 2007), 12S_activite5.xls (Excel 2003), 12S_activite5.ods (Open Office) et 12S_activite5.sqn (Sine Qua Non).

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}43$.
La représentation graphique faite sur tableur permet d'afficher le diagramme en bâtons de cette loi binomiale. Le logiciel Sine Qua Non permet de bien visualiser la loi, mais a le désavantage de proposer un histogramme, ce qui n'est pas rigoureusement exact, même si c'est plus lisible.

2. Il est important ici de relier les calculs faits aux zones A et C apparaissant d'une couleur différente sur le diagramme.
a. $a = 33$ car $P(X \leqslant 32) < 0{,}025$ et $P(X \leqslant 33) > 0{,}025$.
b. $P(X > b) = 1 - P(X \leqslant b)$ donc $P(X > b) \leqslant 0{,}025$ équivaut à $1 - P(X \leqslant b) \leqslant 0{,}025$, c'est-à-dire $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$; le tableau des probabilités $P(X \leqslant k)$ nous permet alors de déterminer b ; on trouve $b = 53$.
c. Les échantillons sont de taille 100, donc d'après les questions précédentes, la probabilité pour que X appartienne à B est environ 95 %. Sur 10 000 échantillons, il y en a environ 9 500 pour lesquels la fréquence est comprise entre 0,33 et 0,53.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 Une urne contient 4 boules, 1 noire et 3 rouges. On tire une boule, on appelle succès l'événement « obtenir une noire » et X la variable aléatoire qui prend comme valeur 1 si la boule est noire et 0 sinon ; X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,25.

2 L'expérience aléatoire « on lance un dé et on obtient la face 1 » se répète 6 fois de façon identique et indépendante, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{1}{6}$.

3 On répète quatre fois de suite la même expérience mais il n'y a pas indépendance car on ne remet pas le cube tiré dans le sac. X ne suit pas une loi binomiale.

4 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0{,}2$.
2. $P(X = 2) = 0{,}04$ et $P(X = 1) = 0{,}32$.

5 **1.** L'expérience aléatoire « on tire une pièce de la fabrication et elle est de première qualité » se répète 10 fois de façon identique et indépendante (car les pièces sont prises dans un lot très important), donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}9$.

2. $P(X=9) \approx 0{,}387$ à 10^{-3} près.

6 **1.** $P(X=1)=\binom{12}{1}\times 0{,}4^1 \times 0{,}6^{11} \approx 0{,}017$ à 10^{-3} près.

$P(X=12)=\binom{12}{12}\times 0{,}4^{12}\times 0{,}6^0 \approx 2\times 10^{-5}$.

2. $P(X \geqslant 2)=1-P(X\leqslant 1)\approx 1-0{,}020$, soit $P(X\geqslant 2)\approx 0{,}980$ à 10^{-3} près.

7 $\binom{6}{2}$ représente le nombre de chemins avec deux succès dans l'arbre modélisant un schéma de Bernoulli constitué de 6 répétitions d'une même épreuve.

8 $\binom{80}{1}=80$; $\binom{100}{0}=1$; $\binom{55}{54}=55$; $\binom{70}{70}=1$.

9 $\binom{10}{6}=210$; $\binom{15}{5}=3\,003$; $\binom{20}{10}=184\,756$;

$\binom{30}{8}=5\,852\,925$; $\binom{50}{40}\approx 10^{10}$; $\binom{70}{7}=1\,198\,774\,720$.

10 **1.** On construit les premières lignes du triangle de Pascal :

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

2. Par lecture de la dernière ligne du tableau :

$\binom{5}{1}=5$; $\binom{5}{2}=10$; $\binom{5}{3}=10$; $\binom{5}{4}=5$.

11 **1.** $E(X)=np=50\times 0{,}4=20$.

$V(X)=npq=50\times 0{,}4\times 0{,}6=12$.

2. $P(X=20)\approx 0{,}115$ et $P(X\leqslant 25)\approx 0{,}943$ à 0,001 près.

12 **1.** La probabilité de tirer un roi ou une dame est $\frac{8}{32}$, soit 0,25, puisqu'il y a 8 cartes qui sont des rois ou des dames dans un jeu de 32 cartes.

L'expérience aléatoire « on tire une carte dans un jeu de 32 cartes et on regarde si c'est un roi ou une dame » se répète 5 fois de façon identique et indépendante (puisqu'on remet la carte tirée dans le jeu), donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}25$.

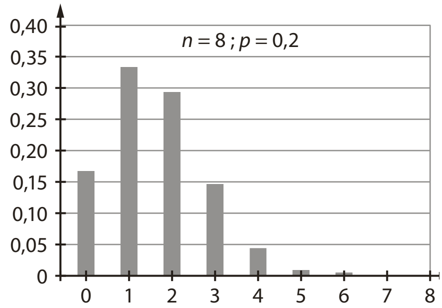
2. À l'aide de la calculatrice, on obtient $P(X=2)\approx 0{,}264$ et $P(X\leqslant 3)\approx 0{,}984$.

3. L'espérance mathématique est :

$$E(X)=5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}=1{,}25.$$

L'écart-type de X est $\sigma(X)=\sqrt{5\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

13 Représentation graphique de la loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=0{,}2$.



14 Correctif : la probabilité que la boule s'arrête dans la zone rouge est 0,5 (et pas 0,2).

1. L'expérience aléatoire « la boule s'arrête dans la zone rouge » se répète 100 fois de façon identique et indépendante, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}2$.

2. $a=40$.

3. $b=60$.

4. Un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence du « rouge » dans un échantillon de taille 100 est $\left[\frac{40}{100}, \frac{60}{100}\right]$, soit $[0{,}4 ; 0{,}6]$.

POUR S'ENTRAÎNER

15 On répète 5 fois de suite la même expérience de façon indépendante puisque la carte est remise dans le jeu. X compte le nombre d'as obtenu, donc, pour chaque expérience, on appelle succès « obtenir un as » ; la probabilité du succès est $\frac{4}{52}$; X suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

16 Après chaque tirage, on ne remet pas le bonbon dans la boîte, donc les expériences ne sont pas indépendantes entre elles : X ne suit pas une loi binomiale.

17 Les tirages de trois fruits dans le panier sont simultanés et non pas successifs avec remise, donc on n'est pas dans les conditions d'un schéma de Bernoulli : X ne suit pas une loi binomiale.

18 L'expérience aléatoire « on lance un dé équilibré et on regarde si la face numéro 2 sort » se répète 10 fois de façon identique et indépendante. De plus, la probabilité d'obtenir le 2 à chaque lancé est $\frac{1}{6}$, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{6}$.

19 **1.** Si X suit une loi binomiale, alors X ne suit pas une loi de Bernoulli.

2. Réciproquement, si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 1$ et p.

20 La proposition est fausse car si X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}3$, alors les valeurs prises par X sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

21 Les tirages se font sans remise, donc les expériences ne sont pas indépendantes : la proposition est fausse.

22 **1.** La probabilité de tirer un jeton noir de la boîte est $\frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.
L'expérience aléatoire « on tire un jeton de la boîte et on regarde si le jeton est noir » se répète deux fois de façon identique et indépendante. De plus, la probabilité d'obtenir un jeton noir à chaque tirage est 0,2, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0{,}2$.
2. $P(X = 1) = 2 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}32$; $P(X = 2) = 0{,}2^2 = 0{,}04$.

23 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}058$.
2. $P(X = 0) = 0{,}942^3 \approx 0{,}836$;
$P(X = 1) = 3 \times 0{,}058 \times 0{,}942^2 \approx 0{,}154$.
3. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}164$.

24 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}45$.
2. Il y a trois chemins de l'arbre qui permettent d'obtenir deux succès, donc $P(X = 2) \approx 0{,}334$.
3. $P(X \leqslant 2) = 1 - P(X = 3) \approx 0{,}909$.

25 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}05$.
2. La probabilité d'avoir trois résistances défectueuses est $P(X = 3) = 4 \times 0{,}05^3 \times 0{,}95 = 0{,}000\,475$.
3. La probabilité d'avoir au moins trois résistances défectueuses est :
$$P(X \geqslant 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}000\,475 + 0{,}05^4 \approx 0{,}000\,481.$$

26 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}45$, donc la proposition est fausse puisque n n'est pas égal à 200.
2. La proposition est vraie car :
$$P(X = 1) = 3 \times 0{,}45 \times 0{,}55^2 \approx 0{,}408.$$

27 Il faut calculer $\binom{16}{0}$ et $\binom{16}{1}$ et non pas $\binom{16}{7}$ et $\binom{16}{9}$.
$\binom{15}{1} = 15$; $\binom{200}{0} = 1$; $\binom{40}{39} = \binom{40}{1} = 40$;
$\binom{16}{1} = 16$; $\binom{16}{0} = 1$.

28 $\binom{15}{4} = 1\,365$; $\binom{20}{6} = 38\,760$; $\binom{30}{10} = 30\,045\,015$;
$\binom{50}{8} = 536\,878\,650$; $\binom{100}{3} = 161\,700$.

29 $\binom{12}{6} = 924$; $\binom{18}{3} = 816$; $\binom{30}{10} = 30\,045\,015$;
$\binom{40}{8} = 76\,904\,685$; $\binom{85}{6} = 437\,353\,560$.

30 **1.** Algorithme

Variable
N
Entrée
Saisir N
Initialisation
K prend la valeur 0
Traitement
Tant que $K \leqslant N$
  Afficher K
  Afficher N combinaison K
  Pause
  K prend la valeur $K + 1$
Fin Tant Que
Sortie
En cours de traitement

2. Programmation sur calculatrice :

TI

```
PROGRAM:COEFBIN
:Prompt N
:0→K
:While K≤N
:Disp "K",K
:Disp "COEF",N C
ombinaison K
:Pause
```

```
:K+1→K
:End
```

CASIO

```
======COEFBIN ======
"N="?→N↵
0→K↵
While K≤N↵
K◢
"COEFF.="↵
NCK◢
```

```
K+1→K↵
WhileEnd↵
```

31 On construit les huit premières lignes du triangle de Pascal, puis on obtient :
$\binom{7}{2} = 521$; $\binom{7}{3} = 35$; $\binom{7}{4} = 35$; $\binom{7}{5} = 21$; $\binom{7}{6} = 7$.

32 **1.** On construit les six premières lignes du triangle de Pascal.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

2. La somme des termes de chaque ligne est 1, 2, 4, 8, 16, 32. On remarque que l'on obtient la suite des puissances de 2.
3. La somme des coefficients binomiaux, pour un nombre n fixé de répétitions d'une épreuve de Bernoulli, est égale à 2^n, puisqu'il y a 2^n chemins possibles sur un arbre de n étapes modélisant un schéma de Bernoulli.

33 **1.** $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de chemins réalisant $k+1$ succès pour $n+1$ répétitions d'une épreuve de Bernoulli.
Soit il y a k succès pour les n premières épreuves, puis un succès à la dernière épreuve : cela donne $\binom{n}{k}$ chemins, soit il y a $k+1$ succès pour les n premières épreuves et un échec à la $n+1^{\text{re}}$ épreuve : cela donne $\binom{n}{k+1}$ chemins.
Ainsi : $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.
2. On applique cette formule successivement pour $n=9$, puis $n=8$, $n=7$, jusqu'à $n=k\ldots$
$\binom{10}{k+1}=\binom{9}{k}+\binom{9}{k+1}=\binom{9}{k}+\binom{8}{k}+\binom{8}{k+1}$
$=\binom{9}{k}+\binom{8}{k}+\binom{7}{k}+\binom{7}{k+1}+\ldots+\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}$,
ce qui donne bien la formule demandée puisque $\binom{k+1}{k+1}=\binom{k}{k}=1$.

34 Vrai : un coefficient binomial est toujours un entier.

35 La proposition est fausse car le membre de gauche de l'égalité vaut $2n+2$ et non pas $2n$.

36 **1.** $P(X=5)\approx 0{,}175$; $P(X=10)\approx 0{,}002$.
2. $P(X\leqslant 8)\approx 0{,}990$; $P(X>5)=1-P(X\leqslant 4)\approx 0{,}370$.

37 **1.** $P(X=27)\approx 0{,}236$; $P(X\geqslant 27)=1-P(X\leqslant 26)\approx 0{,}647$.
2. $P(21\leqslant X\leqslant 25)=P(X\leqslant 25)-P(X\leqslant 20)\approx 0{,}175$.
$P(X>24)=1-P(X\leqslant 24)\approx 0{,}927$.
$P(22<X\leqslant 29)=P(X\leqslant 29)-P(X\leqslant 22)\approx 0{,}95$.

38 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0{,}6$.
2. La probabilité qu'aucune des quatre perles choisies ne soit argentée est $P(X=0)=0{,}025\,6$.
3. La probabilité qu'il y ait exactement deux perles argentées parmi les perles choisies est $P(X=2)=0{,}345\,6$.

39 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0{,}6$.
2. $P(X=0)=0{,}025\,6$.
3. $P(X=2)=0{,}345\,6$.

40 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}3$.
2. La probabilité que deux enfants exactement aient une réaction forte est $P(X=2)\approx 0{,}233$.
3. La probabilité qu'au moins un des enfants aient une réaction forte est $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)\approx 0{,}972$.

41 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0{,}02$.
2. La probabilité que quatre contrôles soient positifs est $P(X=4)\approx 0{,}197$.
3. La probabilité qu'au moins deux contrôles soient positifs est $P(X\geqslant 2)=1-P(X\leqslant 1)\approx 0{,}911$.

43 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{4}$.
2. La probabilité que le candidat soit sélectionné est $P(X\geqslant 8)=1-P(X\leqslant 7)\approx 0{,}000\,4$.

44 **1.** Faux : $P(X=0)=(1-p)^{10}$.
2. Faux, car le nombre de chemins comportant 4 succès sur 10 est égal à 210 et pas à 4 donc :
$$P(X=4)=210\,p^4\,(1-p)^6.$$

45 $E(X)=10$ et $\sigma(X)=3$.

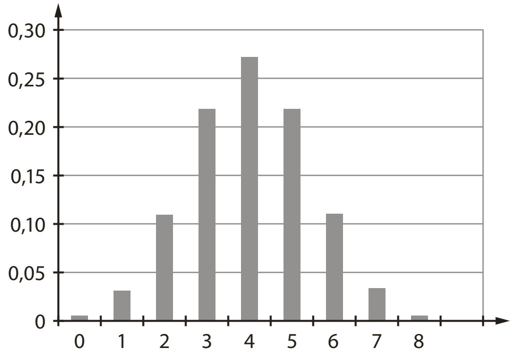
46 **1.** L'expérience aléatoire associée à un tirage de loterie se répète 10 fois de façon identique et indépendante, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}1$.
2. Les valeurs $P(X=k)$ sont arrondies au millième.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	0,349	0,387	0,194	0,057	0,011	0,001

La valeur la plus probable est 1.
3. $E(X)=10\times 0{,}1=1$. Ceci signifie que, si l'on répète un très grand nombre de fois cette épreuve, on obtiendra en moyenne une fois le 7 sur 10 jeux de loterie.

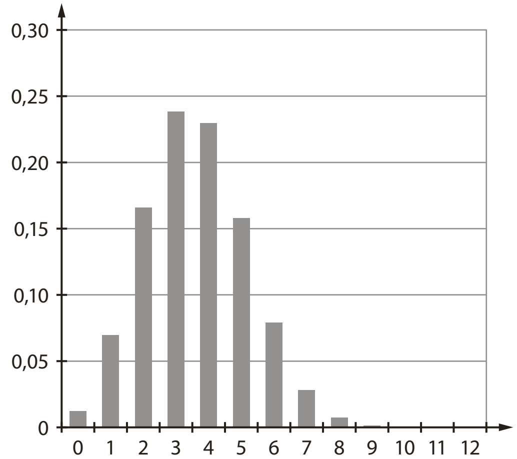
47 La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=0{,}02$.
1. La probabilité qu'exactement deux composants achetés soient défectueux est $P(X=2)\approx 0{,}186$.
2. La probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux est :
$$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)\approx 0{,}636.$$
3. Le nombre moyen de composants défectueux par lot est $E(X)=50\times 0{,}02=1$.

48 **1.** Représentation graphique.



2. On remarque que le diagramme tracé est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=0{,}5$.
3. La probabilité $P(X=k)$ est maximale pour $k=4$. Elle vaut 0,273 à 10^{-3} près.

49 **1.** Représentation graphique.



2. La probabilité $P(X = k)$ est maximale pour $k = 3$. Elle vaut 0,231 à 10^{-3} près.

50 **1.** $P(X = 0) = (1 - p)^2$; $P(X = 1) = 2 \times p(1 - p)$; $P(X = 2) = p^2$.

2. $(1 - p)^2 > 2p(1 - p)$ équivaut à $1 - p > 2p$, soit $p < \frac{1}{3}$.

$2p(1 - p) > p^2$ équivaut à $2(1 - p) > p$, soit $p < \frac{2}{3}$.

$(1 - p)^2 > p^2$ équivaut à $1 - 2p > 0$, soit $p < \frac{1}{2}$.

Ainsi, la valeur maximale est obtenue pour $k = 0$ si p est compris entre 0 et $\frac{1}{3}$; elle est obtenue pour $k = 1$ si p est compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ et pour $k = 2$ si p est compris entre $\frac{2}{3}$ et 1.

51 Puisque $E(Y) = np$ et $V(Y) = npq$, on a ici : $np = 15$ et $npq = \frac{15}{4}$. On en déduit $q = \frac{1}{4}$, d'où $p = \frac{3}{4}$, et ainsi $n = 20$.

D'où $P(Y > 1) = 1 - P(Y \leqslant 1) \approx 1$.

$P(2 < Y < 19) = P(Y \leqslant 18) - P(Y \leqslant 2) \approx 0{,}976$.

52 **1. a.** X_n suit la loi binomiale de paramètres n et 0,1.

b. $E(X_n) = 0{,}1n$ et $V(X_n) = 0{,}1 \times 0{,}9 \times n = 0{,}09n$.

2. $E(F_n) = \frac{1}{n} E(X_n) = 0{,}1$; $V(F_n) = \frac{1}{n^2} V(X_n) = \frac{0{,}09}{n}$.

La variable aléatoire F_n représente la fréquence du 0 dans un numéro de n chiffres.

53 Soit X la variable aléatoire égale au nombre de moteurs qui cassent au cours d'un Grand Prix : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 16$ et $p = 0{,}2$.

1. La probabilité que les 16 moteurs soient bons est $P(X = 0) \approx 0{,}028$.

2. La probabilité que deux moteurs cassent est $P(X = 2) \approx 0{,}211$.

3. La probabilité qu'au moins un des moteurs casse est $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}972$.

4. Le nombre moyen de moteurs cassés est voisin de $E(X) = 3{,}2$.

54 **1.** Algorithme

Variables
N, P, I, J
Entrée
Saisir N, P, I, J
Initialisation
S prend la valeur 0
Traitement
Pour K variant de I à J
| S prend la valeur S + loi binomiale (N, P, K)
Fin Pour
Sortie
Afficher S

2. Programmes sur calculatrices :

TI	CASIO
PROGRAM:SOMPROBI :Prompt N,P,I,J :0→S :For(K,I,J) :S+binomFdp(N,P, K)→S :End :Disp S	======SOMPROBI====== "N="?→N↵ "P="?→P↵ "I="?→I↵ "J="?→J↵ 0→S↵ For I→K To J↵ S+BinominalPD(K,N,P)→ S↵ Next↵

3. En utilisant ce programme avec $n = 20$, $p = 0{,}4$, $i = 8$ et $j = 11$, on trouve $S \approx 0{,}527\,58$.

55 Si $E(X) = \sigma(X)$, alors $np = \sqrt{npq}$, soit $n^2p^2 = npq$, soit $np = 1 - p$, soit $p(n + 1) = 1$, soit encore $p = \frac{1}{n+1}$.

L'affirmation est donc vraie.

Remarque : on considère dans ce calcul que n et p ne sont pas nuls, ce qui est évidemment le cas pour toute loi binomiale.

56 $V(F_n) = \frac{1}{n^2}$, $V(X) = \frac{1}{n^2} \times 0{,}1 \times 0{,}9 \times n = \frac{0{,}09}{n}$: l'affirmation est fausse (sauf dans le cas $n = 1$).

57 On introduit la variable aléatoire X égale au nombre d'appels téléphoniques destinés au poste A : l'expérience aléatoire « l'appel téléphonique est destiné au poste A » se répète n fois de façon identique et indépendante, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}2$.

1. $P(X = 4) \approx 0{,}088$ (à 0,001 près).

2. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}893$ (à 0,001 près).

58 Soit X la variable aléatoire associée au nombre de personnes choisissant un turbot au cidre parmi quatre clients : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}4$.

La probabilité cherchée est $P(X = 2) = 0{,}345\,6$.

59 Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'étudiants sachant jouer d'un instrument de musique

dans un groupe de 15 étudiants : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}4$.
La probabilité cherchée est $P(X = 8) \approx 0{,}118$.

60 **1.** Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de « Pile » sur quatre lancers d'une pièce : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}5$.
La probabilité d'obtenir un nombre impair de « Pile » est $P(X = 1) + P(X = 3) = 0{,}5$.
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de « Pile » sur cinq lancers d'une pièce : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}5$.
La probabilité d'obtenir un nombre impair de « Pile » est $P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) = 0{,}5$.

61 Soit X la variable aléatoire associée au nombre de défaillances de l'alternateur sur 100 démarrages de celui-ci : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}001$.
La probabilité cherchée est $P(X = 1) \approx 0{,}091$.

63 **1.** Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves pratiquant un instrument à cordes parmi n élèves : X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}6$.
$p_n = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}4^n$.
2. $p_n \geqslant 0{,}999$ équivaut à $0{,}4^n \leqslant 0{,}001$.
La calculatrice fournit $0{,}4^7 \approx 0{,}001\,6$ et $0{,}4^8 \approx 0{,}000\,7$.
Le plus petit entier n cherché est donc 8.

64 **1.** Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'oscilloscopes ayant une durée de vie supérieure à 10 ans parmi 15 appareils : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}286$.
On cherche ici $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}994$.
2. Dans ce cas, n est inconnu, et $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}714^n$.
On cherche n tel que $1 - 0{,}714^n \geqslant 0{,}999$, soit $0{,}714^n \leqslant 0{,}001$.
Puisque $0{,}714^{20} \approx 0{,}001\,2$ et $0{,}714^{21} \approx 0{,}000\,8$, on en déduit que l'établissement devrait acheter au moins 21 oscilloscopes.

65 Soit X la variable aléatoire associée au nombre de réponses justes sur les quatre questions : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}25$.
La probabilité cherchée est $P(X = 3) \approx 0{,}047$.

66 **1.** La probabilité de cet événement est $\dfrac{100}{206} = \dfrac{50}{103}$.
2. a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{50}{103}$.
b. La probabilité cherchée est $P(X = 3) \approx 0{,}303$.

67 Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par B. Alors, X suit la loi binomiale de paramètres n (nombre de parties) et 0,4.
1. Ici, $n = 3$: $P(E) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0{,}648 = 0{,}352$: cette affirmation est fausse.
2. Ici, $n = 5$: $P(E) = P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 0{,}317$ à 10^{-3} près : cette affirmation est vraie.

68 D'après le tableau : $a = 35$ et $b = 55$.

69 **1.** Valeurs de $P(X \leqslant k)$ arrondies au millième.

k	14	15	16	17	18
$P(X = k)$	0,004	0,012	0,029	0,062	0,111

2. On trouve avec le tableau : $a = 16$.

71 **1.** On trouve $P(X \leqslant 44) \approx 0{,}00325$ et $P(X \leqslant 45) \approx 0{,}00635$, donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}005$ est $a = 45$.
2. On trouve $P(X \leqslant 65) \approx 0{,}99207$ et $P(X \leqslant 66) \approx 0{,}99638$, donc le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}995$ est $b = 66$.

72 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}39$.
2. a. D'après le tableau : $a = 30$.
b. $b = 49$.
3. Un intervalle de fluctuation à 95 % de la proportion de français diplômés du supérieur âgées de 25 à 34 ans est [0,3 ; 0,49].

73 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}20$.
2. $a = 29$ et $b = 51$.
3. Un intervalle de fluctuation à 95 % de la proportion des personnes utilisant chaque jour les transports en commun est [0,145 ; 0,255].

74 Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans les caisses de 100 pièces.
X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}04$.
Le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ est 8.
Le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$ est 23.
Un intervalle de fluctuation à 95 % de la proportion de pièces défectueuses dans les échantillons de 100 pièces est [0,08 ; 0,23].

75 On considère la variable aléatoire X comptant le nombre de commandes sur 300 appels ; X suit la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0{,}28$.
$P(X \leqslant 68) \approx 0{,}021$ et $P(X \leqslant 69) \approx 0{,}029$, donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ est 69.
$P(X \leqslant 98) \approx 0{,}967$ et $P(X \leqslant 99) \approx 0{,}975\,5$, donc le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$ est 99.
Un intervalle de fluctuation à 95 % de la proportion de commandes faites sur 300 appels est [0,23 ; 0,33].

76 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = \dfrac{1}{6}$.
2. a. $a = 22$.

b. $b = 46$.

3. Un intervalle de fluctuation au seuil de risque 2 % de la fréquence du 6 quand on lance 200 fois un dé est $\left[\frac{22}{200}\,;\,\frac{46}{200}\right]$, soit $[0,11\,;0,23]$.

77 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,3$.

2. $a = 23$.

3. On détermine le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,95$, d'où $b = 38$.

Un intervalle de fluctuation à 90 % de la fréquence des fumeurs dans un échantillon de taille 100 de cette population est $[0,23\,;0,38]$.

78 On considère la variable aléatoire X comptant le nombre de foyers possédant au moins un chien dans les échantillons de taille 200 ; X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,25$.

$P(X \leqslant 34) \approx 0,004\,3$ et $P(X \leqslant 35) \approx 0,007\,2$, donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0,005$ est $a = 35$.

$P(X \leqslant 65) \approx 0,993\,2$ et $P(X \leqslant 66) \approx 0,995\,6$, donc le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,995$ est $b = 66$.

Un intervalle de fluctuation à 99 % de la fréquence des foyers possédant au moins un chien dans les échantillons de taille 200 est $[0,175\,;0,330]$.

79 Une erreur s'est glissée dans la correction : la proportion de gauchers est $\left[\frac{6}{100}\,;\,\frac{21}{100}\right]$ (soit $[0,06\,;0,21]$), et non pas $\left[\frac{5}{100}\,;\,\frac{21}{100}\right]$.

80 Affirmation vraie. En effet :

$P(X \leqslant 62) \approx 0,020\,4$ et $P(X \leqslant 63) \approx 0,03$ donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$ est $a = 63$.

$P(X \leqslant 86) \approx 0,970$ et $P(X \leqslant 87) \approx 0,980$ donc le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$ est $b = 87$.

$\frac{a}{150} = \frac{63}{150} = 0,42$ et $\frac{b}{150} = \frac{87}{150} = 0,58$.

Donc l'intervalle de fluctuation à 95 % de la proportion de « Face » obtenus quand on lance 150 fois de suite un dé bien équilibré est bien $[0,42\,;0,58]$

81 **1.** L'expérience aléatoire « la pièce de monnaie présente la face « Pile » » se répète 144 fois de façon identique et indépendante, donc X suit la loi binomiale de paramètre $n = 144$ et $p = 0,5$.

2. a. $a = 60$.

b. $b = 84$.

3. Règle de décision : soit f la proportion de « Pile » dans l'échantillon. Si $f \notin \left[\frac{60}{144}\,;\,\frac{84}{144}\right]$, on rejette l'hypothèse $p = 0,5$ au seuil 5 %, sinon on ne la rejette pas.

4. $\frac{61}{144}$ n'appartient pas à l'intervalle ci-dessus, donc on ne rejette pas au seuil de risque 5 % l'hypothèse selon laquelle la pièce est truquée.

82 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,8$.

2. $P(X \leqslant 41) \approx 0,022$ et $P(X \leqslant 42) \approx 0,043$, donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$ est $a = 42$.

$P(X \leqslant 53) \approx 0,969$ et $P(X \leqslant 54) \approx 0,988$, donc le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \leqslant 0,975$ est $b = 54$.

Un intervalle de fluctuation au coefficient 0,95 est $\left[\frac{42}{60}\,;\,\frac{54}{60}\right]$, soit $[0,7\,;0,9]$.

3. Règle de décision : soit f la proportion de chemises sans défaut dans un échantillon de taille 60.

Si $f \notin [0,7\,;0,9]$, on rejette l'hypothèse $p = 0,8$ au seuil de risque 5 %, sinon on ne la rejette pas.

4. Sur 60 chemises, 40 n'ont pas de défaut, donc, sur cet échantillon : $f = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$.

$\frac{2}{3}$ n'appartient pas à l'intervalle $[0,7\,;\,0,9]$, donc on rejette au seuil de risque 5 % l'hypothèse selon laquelle $p = 0,8$, c'est-à-dire l'hypothèse selon laquelle la chaîne est bien réglée.

83 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.

2. $P(X \leqslant 41) \approx 0,018$ et $P(X \leqslant 42) \approx 0,029$, donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$ est $a = 42$.

$P(X \leqslant 61) \approx 0,972$ et $P(X \leqslant 62) \approx 0,983$, donc le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$ est $b = 62$.

3. Soit f la proportion d'électeurs favorables à monsieur Zazor dans l'échantillon. Si $f \notin [0,42\,;0,62]$, on rejette l'hypothèse $p = 0,52$ au seuil 5 %, sinon on ne la rejette pas.

4. Dans l'échantillon : $f = 0,43$. Puisque 0,43 appartient à l'intervalle $[0,42\,;0,62]$, on accepte au seuil de risque 5 % l'hypothèse $p = 0,52$; on peut considérer, au seuil de risque 5 %, l'affirmation de monsieur Zazor comme exacte.

84 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,18$.

2. On cherche le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0,01$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,99$; on trouve $a = 3$ et $b = 60$.

3. Soit f la proportion de personnes regardant la télévision dans l'échantillon. Si $f \notin \left[\frac{31}{250}\,;\,\frac{60}{250}\right]$, on rejette l'hypothèse $p = 0,18$ au seuil de risque 2 %, sinon on ne la rejette pas.

4. $\frac{61}{250}$ n'appartient pas à l'intervalle ci-dessus, donc on rejette au seuil de risque 2 % l'hypothèse selon laquelle la fréquence des personnes regardant la télévision est 0,18 ; cela signifie que les modifications ont changé l'audience de l'émission.

85 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 81$ et $p = 0{,}8$.

2. $P(X \leqslant 56) \approx 0{,}013\,5$ et $P(X \leqslant 57) \approx 0{,}025\,1$, donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ est $a = 57$.
$P(X \leqslant 71) \approx 0{,}974$ et $P(X \leqslant 72) \approx 0{,}988$, donc le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$ est $b = 72$.
Règle de décision : soit f la proportion de souris décédées dans un échantillon de taille 81.
Si $f \notin \left[\frac{57}{81}\ ;\ \frac{72}{81}\right]$, on rejette l'hypothèse $p = 0{,}8$ au seuil de risque 5 %, sinon on ne la rejette pas.

3. Dans l'échantillon : $f = \frac{56}{81}$. Puisque f n'appartient pas à l'intervalle $\left[\frac{57}{81}\ ;\ \frac{72}{81}\right]$, on rejette au seuil de risque 5 % l'hypothèse $p = 0{,}8$; faite sur le pourcentage de mortalité des souris.

86 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}02$.

2. On cherche le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$; on trouve $a = 0$ et $b = 3$.

3. Soit f la proportion de sportifs déclarés positifs dans l'échantillon. Si $f \notin \left[\frac{0}{50}\ ;\ \frac{3}{50}\right]$, on rejette l'hypothèse $p = 0{,}02$ au seuil 5 % sinon, on ne la rejette pas.

4. $\frac{2}{50}$ appartient à l'intervalle ci-dessus, donc on ne rejette pas au seuil de risque 5 % l'hypothèse selon laquelle la fréquence des sportifs déclarés positifs est 0,02.

87 Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes défectueuses dans un échantillon de taille 100 : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}04$.
$P(X = 0) \approx 0{,}017$, donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}005$ est $a = 0$.
$P(X \leqslant 9) \approx 0{,}993$ et $P(X \leqslant 10) \approx 0{,}998$, donc le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}995$ est $b = 10$.
Règle de décision : soit f la proportion d'allumettes défectueuses dans un échantillon de taille 100.
Si $f \notin [0\,;0{,}1]$, on rejette l'hypothèse $p = 0{,}04$ au seuil de risque 1 %, sinon on ne la rejette pas.
Dans l'échantillon concerné : $f = \frac{11}{100} = 0{,}11$. Puisque f n'appartient pas à l'intervalle $[0\,;\,0{,}1]$, on rejette au seuil de risque 1 % l'hypothèse $p = 0{,}04$: le processus de fabrication des allumettes est donc à remettre en cause au seuil 1 %.

88 Soit X la variable aléatoire égale au nombre de garçons nés dans un échantillon de 242 naissances : sous l'hypothèse qu'il naît autant de garçons que de filles, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 242$ et $p = 0{,}5$.
$P(X \leqslant 107) \approx 0{,}041$ et $P(X \leqslant 108) \approx 0{,}054$, donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}05$ est $a = 108$.
$P(X \leqslant 133) \approx 0{,}946$ et $P(X \leqslant 134) \approx 0{,}959$, donc le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \approx 0{,}95$ est $b = 134$.
Règle de décision : soit f la proportion de garçons nés dans un échantillon de 242 naissances.
Si $f \notin \left[\frac{108}{242}\ ;\ \frac{134}{242}\right]$, on rejette l'hypothèse $p = 0{,}5$ au seuil de risque 10 %, sinon on ne la rejette pas.
Dans l'échantillon concerné : $f = \frac{134}{242}$. Puisque f appartient à l'intervalle $\left[\frac{108}{242}\ ;\ \frac{134}{242}\right]$, on peut accepter au seuil de risque 10 % l'hypothèse $p = 0{,}5$ selon laquelle il naît autant de filles que de garçons dans la commune.

89 $\frac{228}{500} = 0{,}456$, donc 0,456 appartient à l'intervalle de fluctuation à 95 %, donc on accepte l'hypothèse selon laquelle cet échantillon est représentatif de la population française. L'affirmation est vraie.

90 Au seuil de risque 2 %, l'intervalle de fluctuation a une amplitude plus grande que celui calculé au seuil de risque 5 % : donc, si on accepte l'hypothèse au seuil de risque 5 %, on l'accepte aussi au seuil de risque 2 %. L'affirmation est vraie.

91 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}3$.

2. La probabilité cherchée est $P(X = 5) \approx 0{,}103$.

3. La probabilité cherchée est :
$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}972.$$

92 Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes présentes à une réunion parmi les 9 personnes du comité : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0{,}5$.
$P(\mathrm{A}) = P(X = 9) \approx 0{,}002$.
$P(\mathrm{B}) = P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 0{,}910$.
$P(\mathrm{C}) = P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) = 0{,}5$.

93 **1.** Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles dans les familles de trois enfants : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}5$.
Soit A l'événement « les filles sont plus nombreuses que les garçons ».
$P(\mathrm{A}) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 0{,}5$.

2. Dans une famille de cinq enfants, la variable aléatoire considérée suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}5$.
On a alors $P(A) = P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) = 0{,}5$.
Dans une famille de six enfants, la variable aléatoire considérée suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}5$.
On a alors $P(A) = P(X \geqslant 4) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 0{,}344$.

94 Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans un lot de 20 pièces : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}02$.
1. La probabilité cherchée est $P(X = 3) \approx 0{,}006$.
2. La probabilité cherchée est :

$$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 0{,}007.$$

3. La probabilité cherchée est $P(X \leqslant 1) \approx 0{,}940$.

95 On considère la variable aléatoire X comptant le nombre de français possédant un téléviseur dans les échantillons de taille 100 ; X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}90$.
$P(X \leqslant 83) \approx 0{,}021$ et $P(X \leqslant 84) \approx 0{,}040$, donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ est $a = 84$.
$P(X \leqslant 94) \approx 0{,}942$ et $P(X \leqslant 95) \approx 0{,}976$, donc le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$ est $b = 95$.
Un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des français possédant un téléviseur dans les échantillons de taille 100 est [0,84 ; 0,95].

POUR FAIRE LE POINT

1 C ; **2** B ; **3** C ; **4** B ; **5** A ; **6** C ;
7 B ; **8** B ; **9** D ; **10** C ; **11** B.

POUR APPROFONDIR

96 **1. a.** Y suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,05.
b. La probabilité que, dans un lot de 10, il n'y ait aucune bonbonne non conforme est $P(Y = 0) = 0{,}95^{10}$, c'est-à-dire environ 0,599.
c. La probabilité que, dans un lot de 10, il y ait au plus deux bonbonnes non conformes est $P(Y \leqslant 2) \approx 0{,}988$.
2. a. Z suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,05. Son espérance mathématique est $100 \times 0{,}05 = 5$.
b. On calcule $P(Z \geqslant 5) = 1 - P(Z \leqslant 4) \approx 1 - 0{,}436$, soit $P(Z \geqslant 5) \approx 0{,}564$.
Il y a donc plus d'une chance sur deux que, parmi ces cent bonbonnes, il y ait au moins cinq bonbonnes non conformes. L'affirmation de l'association de consommateurs est bien fondée.

97 **A. 1.** Réponse à (Q1) : la probabilité est celle de tirer une graine différente de A dans le bon sac, c'est-à-dire $\frac{3}{4}$, soit 0,75.
Réponse à (Q2) : la probabilité est celle de tirer une graine A dans le mauvais sac, c'est-à-dire $\frac{1}{6}$, soit environ 0,167.
2. a. Réponse à (Q1) : la probabilité est celle de tirer deux graines différentes de A dans le bon sac, c'est-à-dire $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$, soit environ 0,562.
Réponse à (Q2) : la probabilité est celle de tirer au moins une graine A dans le mauvais sac, c'est-à-dire $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$, soit environ 0,306.
b. Le vendeur y gagne avec cette méthode par rapport à la première méthode, car la probabilité de ne pas vendre alors que c'est le bon sac (risque du vendeur) a baissé.
L'acheteur y perd avec cette méthode par rapport à la première méthode, car la probabilité de vendre alors que c'est le mauvais sac (risque de l'acheteur) a augmenté.
3. a. Réponse à (Q1) : la probabilité est celle de tirer trois graines différentes de A dans le bon sac, c'est-à-dire $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$, soit environ 0,422.
Réponse à (Q2) : la probabilité est celle de tirer au moins une graine A dans le mauvais sac, c'est-à-dire $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$, soit environ 0,421.
b. Avec cette méthode, les risques pris par le vendeur et par l'acheteur sont importants, mais similaires.
B. 1. Réponse à (Q1) : la probabilité est celle de ne pas tirer deux graines de type A dans le bon sac, c'est-à-dire $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$, soit environ 0,937.
Réponse (Q2) : la probabilité est celle de tirer deux graines de type A dans le mauvais sac, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$, soit environ 0,028.
Ce test est une très bonne affaire pour l'acheteur car il a seulement 3 % de chance de tomber sur le mauvais sac.
2. a. X suit une loi binomiale de paramètres 4 et p, où p est la probabilité de tirer une graine de type A ($p = \frac{1}{4}$ si c'est le bon sac et $p = \frac{1}{6}$ si c'est le mauvais sac).
b. Réponse à (Q1) : la probabilité cherchée est $P(X < 2)$, avec $X \to B\left(4, \frac{1}{4}\right)$, soit $P(X < 2) = P(X \leqslant 1) \approx 0{,}738$.
Réponse à (Q2) : la probabilité cherchée est $P(X \geqslant 2)$, avec $X \to B\left(4, \frac{1}{6}\right)$, soit
$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}132$.
c. Avec cette méthode, c'est l'acheteur qui est gagnant, et il l'est très largement !

98 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres n et 0,05.

2. La probabilité qu'aucune analyse ne révèle l'allergie à A est $P(X = 0) = 0{,}95^{10} \approx 0{,}60$.

La probabilité qu'au moins deux analyses révèlent l'allergie à A est $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}09$.

3. Soit Y la variable aléatoire associée au nombre d'allergies au médicament B révélées dans un échantillon de taille 100. Alors, Y suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,4.

Le plus petit entier a tel que $P(Y \leqslant a) > 0{,}025$ est 31, car $P(X \leqslant 30) \approx 0{,}024\,7$ et $P(X \leqslant 31) \approx 0{,}039\,8$.

Le plus petit entier b tel que $P(Y \geqslant b) \geqslant 0{,}975$ est 50, car $P(Y \leqslant 49) \approx 0{,}972\,9$ et $P(Y \leqslant 50) \approx 0{,}983\,2$.

Ainsi, un intervalle de fluctuation de la proportion de personnes allergiques à B dans un échantillon de taille 100 au seuil de risque 0,05 est [0,31 ; 0,50] : puisque 0,31 appartient à cet intervalle, on peut conclure, au seuil de risque 5 %, que cet échantillon est bien représentatif de la population pour l'allergie au médicament B.

99 **1. a.** La probabilité de tirer une boule blanche est égale à $\dfrac{a}{a+b}$.

L'expérience aléatoire consistant à tirer une boule dans l'urne se répète n fois de façon identique et indépendante (puisque le tirage est avec remise), donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de boules blanches obtenues suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{a}{a+b}$.

b. $q = 1 - p = 1 - \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{b}{a+b}$.

2. a. On a $P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) = 1$, c'est-à-dire $p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = 1$.

b. On remplace p et q par leurs valeurs :

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \times \frac{b}{a+b} + 3\frac{a}{a+b} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^3 = 1.$$

D'où $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$.

2. a. On a $P(X=n) + P(X=n-1) + \ldots + P(X=1) + P(X=0) = 1$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1$.

b. On remplace p et q par leurs valeurs en fonction de a et b :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n+k} = 1,$$

soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k}{(a+b)^k} \frac{b^{n-k}}{(a+b)^{n-k}} = 1$, ce qui s'écrit :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n+k}}{(a+b)^n} = 1$ et ainsi $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

c. Pour $n = 2$, on retrouve l'identité remarquable :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

d. Pour $n = 4$, on obtient :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Pour $n = 5$, on obtient :

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

100 **1. a.** $q_5 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^5 \times 0{,}237$.

b. $p_5(1) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$; $p_5(2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{16} = 0{,}1875$;

$p_5(3) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{64} \approx 0{,}141$;

$p_5(4) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{27}{256} \approx 0{,}105$;

$p_5(5) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^4 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{81}{1\,024} \approx 0{,}079$.

2. a. $q_n = 0{,}75^n$.

$p_n(1) = 0{,}25$; $p_n(2) = 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}1875$;

$p_n(k) = 0{,}75^{k-1} \times 0{,}25$; $p_n(n) = 0{,}75^{n-1} \times 0{,}25$.

b. Loi de probabilité de X :

x_i	$-M$	0	M
$P(X = x_i)$	$0{,}75^n$	$1 - 0{,}25 - 0{,}75^n$	0,25

Espérance mathématique de X :

$$E(X) = -0{,}75^n M + 0{,}25M = (0{,}25 - 0{,}75^n)M.$$

c. $E(X) > 0$ équivaut à $0{,}75^n < 0{,}25$.

Avec la calculatrice, on obtient $E(X) < 0$ pour $n \leqslant 4$, et $E(X) > 0$ pour $n \geqslant 5$ (car $0{,}75^4 \approx 0{,}316$ et $0{,}75^5 \approx 0{,}237$).

Le joueur va être gagnant en moyenne dès que le nombre d'essais est au moins de 5.

101 **1.** Pour le premier traitement, on introduit la variable aléatoire X égale au nombre de cancers spontanés dans les échantillons de 100 souris : X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,2. Avec cette loi, on détermine un intervalle de fluctuation de la proportion de cancers spontanés dans les échantillons de taille 100, au seuil de risque 5 % : I = [0,12 ; 0,28].

2. Pour le second traitement, on introduit la variable aléatoire Y égale au nombre de cancers spontanés dans les échantillons de 200 souris : Y suit la loi binomiale de paramètres 200 et 0,2. Avec cette loi, on détermine un intervalle de fluctuation de la proportion de cancers spontanés dans les échantillons de taille 200, au seuil de risque 5 % : I′ = [0,145 ; 0,255].

3. Pour le troisième traitement, on introduit la variable aléatoire Z égale au nombre de cancers spontanés dans les échantillons de 1000 souris : Z suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,2. Avec cette loi, on détermine un intervalle de fluctuation de la proportion de cancers spontanés dans les échantillons de taille 1000, au seuil de risque 5 % : I″ = [0,176 ; 0,225].

Après ces trois traitements, la fréquence observée est la même : $f = 0{,}14$. Cette fréquence appartient à I, mais

pas à I′ ni I″. On en conclut que, au seuil de risque 5 %, on rejette l'hypothèse $p = 0{,}2$ dans les deux derniers traitements : ces deux derniers traitements peuvent être déclarés actifs au seuil de risque 5 %.

102 **1. a.** Le nombre de chemins distincts de cet arbre est 2^n.

b. La somme $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$ est la somme du nombre de chemins avec 0 succès, 1 succès, …, n succès : c'est la somme du nombre de chemins de l'arbre, donc $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

2. a. Le nombre de chemins avec n succès de cet arbre est $\binom{2n}{n}$.

b. Chacun des produits $\binom{n}{0} \times \binom{n}{n}$, $\binom{n}{1} \times \binom{n}{n-1}$, …, $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ représente un nombre de chemins avec n succès dans un arbre formé de $2n$ expériences de Bernoulli.

$\binom{n}{0} \times \binom{n}{n}$ représente le nombre de chemins avec aucun succès sur les n premières épreuves, suivi de n succès lors des n dernières.

$\binom{n}{1} \times \binom{n}{n-1}$ représente le nombre de chemins avec un succès sur les n premières épreuves, suivi de $n - 1$ succès lors des n dernières.

$\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ représente le nombre de chemins avec k succès sur les n premières épreuves, suivi de $n - k$ succès lors des n dernières.

c. $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \times \binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$ pour toute valeur de k comprise entre 0 et n.

Ainsi $\binom{n}{0} \times \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \times \binom{n}{n-1} + \ldots$

$$+ \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} + \ldots \binom{n}{n} \times \binom{n}{0}$$

est égal au nombre de chemins avec n succès dans un arbre formé de $2n$ expériences de Bernoulli, c'est-à-dire $\binom{2n}{n}$.

D'où $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{k}^2 + \ldots \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

103 **1. a.** Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}01$.

b. La probabilité que le serveur connaisse au plus deux jours de dysfonctionnements importants en un mois est $P(Y \leqslant 2) \approx 0{,}997$.

2. a. Z suit la loi binomiale de paramètres $n = 365$ et $p = 0{,}01$.

b. $E(Z) = 3{,}65$; $\sigma(Z) \approx 1{,}90$.

104 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres 304 et 0,05.

2. À l'aide de la calculatrice, on obtient $P(X \leqslant 21) \approx 0{,}945$ et $P(X \leqslant 22) \approx 0{,}967$.

Le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}95$ est 22.

Puisque $\frac{22}{304} \approx 0{,}072$, un intervalle de confiance à 95 % de la fréquence des mitigeurs ayant un mauvais fonctionnement dans les échantillons de taille 304 est $[0 ; 0{,}072]$.

Cet intervalle de confiance est unilatéral à droite.

3. Règle de décision : soit f la fréquence de mitigeurs ayant un mauvais fonctionnement dans un échantillon de taille 304.

Si $f \leqslant 0{,}072$, alors on accepte l'hypothèse $p = 0{,}05$ au seuil de risque 5 %.

Si $f > 0{,}072$, on refuse l'hypothèse $p = 0{,}05$ au seuil de risque 5 %.

4. Pour cet échantillon, $f = \frac{18}{304} \approx 0{,}059$. On accepte donc l'hypothèse selon laquelle le pourcentage de mitigeurs avec défaut est 0,05.

105 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{2}$.

2. À l'aide de la calculatrice, on obtient $P(X \leqslant 57) \approx 0{,}933$ et $P(X \leqslant 58) \approx 0{,}956$.

Le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}95$ est 58.

3. Règle de décision : soit n le nombre de succès observés du magicien dans un échantillon de taille 100. Si $n < 58$, alors on accepte l'hypothèse $p = \frac{1}{2}$ au seuil de risque 5 %, donc le magicien a répondu au hasard, c'est un imposteur.

Si $n \geqslant 58$, on refuse l'hypothèse $p = \frac{1}{2}$ au seuil de risque 5 %, donc on peut estimer avec ce risque que le magicien n'est pas un imposteur.

4. Puisque le magicien a obtenu 64 succès sur 100 tentatives, on peut considérer, au seuil de risque 5 %, que ce n'est pas un imposteur.

106 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres n et $\mathscr{S}$. On a $E(X) = n\mathscr{S}$.

2. En répétant un grand nombre de fois l'expérience consistant à lancer aléatoirement un point dans le carré OABC, on va compter le nombre de fois où ce point tombe dans le domaine $\mathscr{D}$. Si on répète n fois cette expérience, et si on obtient m succès, une valeur approchée de $\mathscr{S}$ sera $\frac{m}{n}$.

3. Algorithme simulant n lancés d'un point sur le carré et donnant en sortie une valeur approchée de $\mathscr{S}$.

```
Saisir n
a prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
    x prend la valeur random()
    y prend la valeur random()
  Si y < x²
        Alors a prend la valeur a + 1
  Fin Si
Fin Pour
Afficher a/n
```

4. Programmation sur calculatrice :

TI	CASIO
PROGRAM:CARLO :Prompt N :0→A :For(I,1,N) :NbrAléat→X :NbrAléat→Y :If Y<X² :Then :A+1→A :End :End :Disp A/N	======CARLO ====== "N="?→N↵ 0→A↵ For 1→I To N↵ Ran# →X↵ Ran# →Y↵ If Y<X²↵ Then A+1→A↵ IfEnd↵ Next↵ A÷N↵

En faisant fonctionner ces programmes pour $n = 100$, puis pour $n = 300$, on obtient une valeur approchée de $\mathscr{S}$, voisine de 0,33 (la valeur exacte est $\frac{1}{3}$).

107 **1. a.** La probabilité qu'un jour donné, les 12 groupes inscrits soient tous présents est égale à $\left(\frac{7}{8}\right)^{12}$, soit environ 0,201 (à 10^{-3} près) : cette probabilité est donc comprise entre 0,20 et 0,21.

b. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}20$ (p arrondi au centième le plus proche).

« $X = 30$ » est l'événement « les 12 groupes inscrits se sont tous présentés lors des 30 jours d'un mois ».

« $X = 0$ » est l'événement « il n'y a eu aucun jour du mois où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés ».

$P(X = 30) \approx 10^{-21}$; $P(X = 0) \approx 0{,}001$. Arrondies au centième le plus proche, ces deux probabilités sont égales à 0.

L'espérance mathématique de X est $E(X) = 6$. Cela signifie qu'en moyenne, sur un mois de 30 jours, il y a 6 jours où les 12 groupes inscrits se présentent.

c. S suit la loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \frac{7}{8}$.

$P(S = 11) \approx 0{,}35$.

L'espérance mathématique de S est $E(S) = 10{,}5$.

2. a. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de groupes inscrits qui se présentent parmi les 13 groupes : Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 13$ et $p = \frac{7}{8}$.

La probabilité que les 13 groupes se présentent est $P(Y = 13) = P_{13} = \left(\frac{7}{8}\right)^{13} \approx 0{,}18$.

b. Loi de probabilité de R :

r_i	0	2
$P(R = r_i)$	0,82	0,18

L'espérance mathématique de R est $E(R) = 0{,}36$.

c. Soit G la variable aléatoire donnant le gain de l'association un jour donné.

Loi de probabilité de G :

g_i	0	1	2	…
$P(G = g_i)$	$\left(\frac{1}{8}\right)^{13}$	$\binom{13}{1}\frac{7}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{12}$	$\binom{13}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{11}$	…

g_i	k	…	11
$P(G = g_i)$	$\binom{13}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^{k}\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}$	…	$\binom{13}{11}\left(\frac{7}{8}\right)^{11}\left(\frac{1}{8}\right)^{2} + P_{13}$

g_i	12
$P(G = g_i)$	$\binom{13}{12}\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\frac{1}{8}$

$$E(G) = 0 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{13} + 1 \times \binom{13}{1}\frac{7}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{12} + 2 \times \binom{13}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{11}$$
$$+ \ldots + 11\left(\binom{13}{11}\left(\frac{7}{8}\right)^{11}\left(\frac{1}{8}\right)^{2} + P_{13}\right) + 12 \times \binom{13}{12}\left(\frac{7}{8}\right)^{12} \times \frac{1}{8}$$
$$= 0 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{13} + 1 \times \binom{13}{1}\frac{7}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{12} + 2 \times \binom{13}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{11}$$
$$+ \ldots + 11 \times \binom{13}{11}\left(\frac{7}{8}\right)^{11}\left(\frac{1}{8}\right)^{2}$$
$$+ 12 \times \binom{13}{12}\left(\frac{7}{8}\right)^{12} \times \frac{1}{8} + 13\,P_{13} - 2P_{13}$$

On en déduit $E(G) = \sum_{k=0}^{13} k\binom{13}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^{k}\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k} - 2P_{13}$.

Ainsi, $E(G) = E(Y) - 2P_{13} = 13 \times \frac{7}{8} - 0{,}36 = 11{,}015$.

Le gain moyen pour l'association est de 11,015 crédits.

d. La décision du dirigeant est rentable pour l'association, car le gain moyen est passé de 10,5 à 11,015 crédits.

108 **1.** Les tirages possibles fournissent les points de coordonnées suivantes : (0 ; 0), (0 ; 1), (0 ; 2), (1, 0), (1 ; 1), (1 ; 2), (2 ; 0), (2 ; 1), (2 ; 2).

2. X prend les valeurs 0, 1, 2, 4, 5 et 8.

Loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2	4	5	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

3. Le point M appartient au disque $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $OM \leqslant 1{,}7$, soit $OM^2 \leqslant 2{,}89$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 \leqslant 2{,}89$ si on appelle $(x\,;y)$ les coordonnées de M.
Donc, la probabilité que M appartienne au disque $\mathcal{D}$ est $P(X \leqslant 2) = \dfrac{4}{9}$.

4. a. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de points appartenant au disque $\mathcal{D}$ sur cinq tirages de deux boules avec remise : Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{4}{9}$.
La probabilité que trois points exactement appartiennent au disque $\mathcal{D}$ est $P(Y = 3) \approx 0{,}271$.

b. La probabilité qu'au moins un de ces points appartienne au disque $\mathcal{D}$ est :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) \approx 0{,}947.$$

5. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de points appartenant au disque $\mathcal{D}$ sur n tirages de deux boules avec remise : Z suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 49$.
La probabilité qu'au moins un de ces points appartienne au disque $\mathcal{D}$ est :
$P(Z \geqslant 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$.

$P(Z \geqslant 1) \geqslant 0{,}9999$ équivaut à $\left(\dfrac{5}{9}\right)^n \leqslant 0{,}0001$.

La calculatrice fournit $\left(\dfrac{5}{9}\right)^{15} \approx 0{,}00015$ et $\left(\dfrac{5}{9}\right)^{16} \approx 0{,}00008$; donc le plus petit entier n tel que $P(Z \geqslant 1)$ soit supérieure ou égale à 0,9999 est 16.

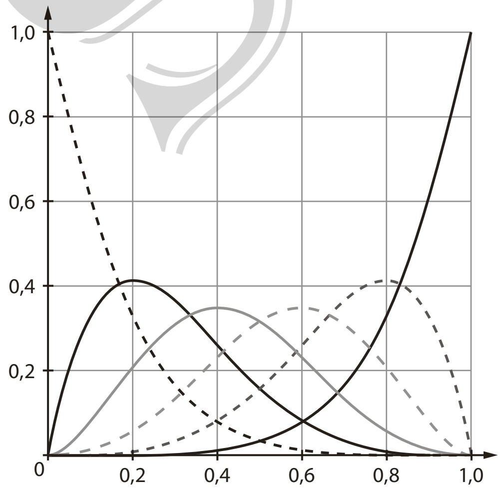
Prises d'initiatives

109 Soit X la variable aléatoire associant, à chaque épreuve de penaltys, le nombre de penaltys réussis : X suit la loi binomiale de paramètres 5 et p.
Ainsi : $P_0 = P(X = 0) = (1 - p)^5$.
$P_1 = P(X = 1) = 5p(1 - p)^4$.
$P_2 = P(X = 2) = 10p^2(1 - p)^3$.
$P_3 = P(X = 3) = 10p^3(1 - p)^2$.
$P_4 = P(X = 4) = 5p^4(1 - p)$.
$P_5 = P(X = 5) = p^5$.
On peut représenter les courbes représentatives de ces fonctions sur calculatrice ou avec un logiciel, pour p appartenant à $[0\,;1]$: ceci permet de conjecturer les différents cas possibles.
$P_0 - P_1 = (1 - p)^4(1 - 6p)$, et ainsi $P_0 > P_1$ pour $p < \dfrac{1}{6}$.
$P_1 - P_2 = (1 - p)^3(5p\,(1 - p) - 10\,p^2) = 5p(1 - p)^3\,(1 - 3p)$, donc $P_1 > P_2$ pour $p < \dfrac{1}{3}$.
$P_2 - P_3 = 10p^2\,(1 - p)^2(1 - p - p) = 10p^2(1 - p)^2(1 - 2p)$, donc $P_2 > P_3$ pour $p < \dfrac{1}{2}$.
$P_3 - P_4 = 5p^3(1 - p)(2\,(1 - p) - p) = 5p^3(1 - p)(2 - 3p)$, donc $P_3 > P_4$ pour $p < \dfrac{2}{3}$.
$P_4 - P_5 = p^4(5\,(1 - p) - p) = p^4\,(5 - 6p)$, donc $P_4 > P_5$ pour $p < \dfrac{5}{6}$.
D'où les résultats :

***p* compris entre**	0 et $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$
Nombre de penaltys réussis le plus probable	0	1	2

***p* compris entre**	$\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$ et 1
Nombre de penaltys réussis le plus probable	3	4	5

Remarque : p est en général voisin de 0,75, donc le nombre de penaltys réussis le plus probable est 4 (sauf si l'équipe est très entraîné à ce genre d'exercice, ou alors très peu entraînée…).



110 Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de n boules, associe le nombre de boules rouges tirées.
Alors, X suit la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.
$\overline{A}$ est l'événement : « on n'obtient que des boules bleues ou que des boules rouges », donc $\overline{A}$ est la réunion des événements « $X = 0$ » et « $X = n$ ».
Ainsi $P(\overline{A}) = P(X = 0) + P(X = n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
D'où $P(A) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

On a aussi $P(B) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{2^n}.$$

$P(A) - P(B) = \dfrac{2^n - n - 3}{2^n} = \dfrac{u_n}{2^n}$, en notant $u_n = 2^n - n - 3$.
La suite (u_n) est croissante, car :
$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - n - 1 - 3 - 2^n + n + 3 = 2^n - 1$, et $2^n - 1$ est positif ou nul pour toute valeur de l'entier naturel n.
Pour $n = 2$, $P(A) - P(B) = -\dfrac{1}{4}$, donc $P(A) < P(B)$.
Pour $n \geqslant 3$: $u_n \geqslant u_3$, soit $u_n \geqslant 2$, donc $u_n > 0$.
Ainsi, $P(A) - P(B) > 0$ et $P(A) > P(B)$.
En conclusion, A est l'événement le plus probable, sauf dans le cas de deux tirages.

111 Soit p la proportion de postes de télévision de mauvaise qualité. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de cinq postes issus de la chaîne de fabrication, associe le nombre de postes de mauvaise qualité.
Alors, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et p.
$P(X = 3) = \dbinom{5}{3} p^3 (1 - p)^2 = 10p^3(1 - p)^2$.
Soit φ la fonction qui, à p élément de $[0 ; 1]$ associe $\varphi(p) = 10p^3(1 - p)^2$.
$\varphi(p) = 10\,(p^5 - 2p^4 + p^3)$,
donc $\varphi'(p) = 10\,(5p^4 - 8p^3 + 3p^2) = 10p^2(5p^2 - 8p + 3)$.
D'où $\varphi'(p) = 10p^2(5p - 3)(p - 1)$.
On en déduit les variations de φ sur $[0 ; 1]$:

p	0		$\frac{3}{5}$		1
$\varphi'(p)$	0	$+$		$-$	0
$\varphi(p)$	0	$\nearrow$	$\frac{216}{625}$	$\searrow$	0

Ainsi, $P(X = 3)$ est maximal pour $p = 0{,}60$: il est donc raisonnable d'estimer la valeur de p à 60 %.
Remarque : cette méthode est appelée « méthode du maximum de vraisemblance ».

112 Un biréacteur tombe en panne si ses deux réacteurs tombent en panne, donc la probabilité P_1 qu'un biréacteur tombe en panne est $P_1 = p^2$.
Un quadriréacteur tombe en panne si trois ou quatre réacteurs tombent en panne.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de réacteurs en panne sur un quadriréacteur : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et p : donc, la probabilité que trois réacteurs tombent en panne est :
$$P(X = 3) = \binom{4}{3} p^3 (1 - p) = 4p^3(1 - p).$$
La probabilité que quatre réacteurs tombent en panne est p^4.
Ainsi, la probabilité P_2 qu'un quadriréacteur tombe en panne est $P_2 = p^4 + 4p^3(1 - p) = 4p^3 - 3p^4$.
On compare P_1 et P_2 :
$$P_1 - P_2 = p^2 - 4p^3 + 3p^4 = p^2\,(3p^2 - 4p + 1).$$
$3p^2 - 4p + 1$ est un trinôme du second degré de racines $\dfrac{1}{3}$ et 1.
D'où $P_1 - P_2 = p^2(p - 1)(3p - 1)$.
$p = 0$ et $p = 1$ ne sont pas des valeurs techniquement possibles pour p.
On conclut :
– si $p = \dfrac{1}{3}$: les probabilités de panne sont identiques sur les deux avions ;
– si $p < \dfrac{1}{3}$: $P_1 - P_2 > 0$, donc la probabilité de panne est supérieure sur le biréacteur ;
– si $p > \dfrac{1}{3}$: $P_1 - P_2 < 0$, donc la probabilité de panne est supérieure sur le quadriréacteur.
Remarque : dans la pratique, p est évidemment très proche de 0, donc le quadriréacteur est plus sûr !

F Activités TICE

TP 1 Simulations d'une loi binomiale

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 12S_TP1.xlsx (Excel 2007), 12S_TP1.xls (Excel 2003) et 12S_TP1.ods (Open Office).

L'objectif de ce TP est de simuler une loi binomiale de paramètres 6 et p. On réalise cette simulation, d'abord sur tableur, puis à l'aide d'un programme sur calculatrice. On répète 1 000 fois cette simulation sur tableur et on compare aux résultats théoriques. On répète cette simulation 100 fois sur la calculatrice : ce travail permet de s'initier à la manipulation des listes sur la calculatrice.

Partie A

1. L'intérêt de nommer cette cellule par p est double : dans toutes les formules utilisées, p va apparaître, ce qui prend beaucoup plus de sens que **A2**, et cela évite d'utiliser des références absolues dans les formules (comme \$A\$2).

2. a. La formule =SI(ALEA()<p ;1 ;0) fournit comme résultat 1 lorsque le nombre aléatoire généré est compris entre 0 et *p*, et 0 sinon. Cette formule simule donc une épreuve de Bernoulli de paramètre *p*.
b. En recopiant cette formule dans la plage **D2:H2**, on obtient ainsi la simulation de six épreuves de Bernoulli de paramètre *p*, c'est-à-dire un schéma de Bernoulli de paramètres 6 et *p*.
c. Puisque chaque succès est représenté par un 1, on calcule le nombre de succès dans la cellule **I2** avec la formule : =SOMME(C2:H2).
d. En recopiant vers le bas jusqu'à la ligne **1001** la zone de cellules **C2:I2**, on obtient ainsi 1 000 schémas de Bernoulli de paramètres 6 et *p*.

3. a. On saisit dans les cellules **K2** à **K8** les entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 afin d'avoir toutes les possibilités pour le nombre de succès.
b. Le nombre de fois où l'on n'a aucun succès est donné par : =NB.SI(I$2 :I$1001 ;K2), puisqu'on compte dans la zone de cellules **I2:I1001** le nombre de fois où on trouve 0 (nombre saisi en **K2**).
Il est préférable de saisir des références absolues dans la formule (I$2:I$1001) car cela permettra de recopier cette formule vers le bas pour les six autres cas.
On peut se passer des références absolues, mais cela exige de réécrire six fois la formule adéquate.
c. Pour calculer la fréquence d'avoir 0 succès sur ces 1 000 simulations, on entre en **M2** la formule =L2/1000, puis on la recopie vers le bas dans la zone **M3:M8**.
La probabilité théorique est fournie en N2 par la formule =LOI.BINOMIALE(K2;6;p;FAUX) : cette formule renvoie la probabilité d'avoir 0 succès (nombre entré en **K2**) pour une loi binomiale de paramètres 6 et *p*. On recopie ensuite cette formule dans la zone **N3:N8**.

4. On obtient plusieurs séries de 1 000 simulations à l'aide de la touche F9.

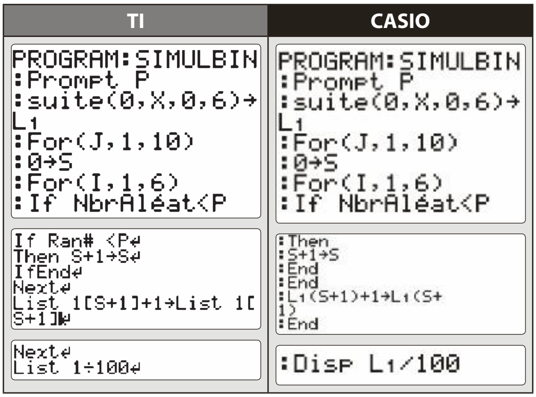
5. Avec Excel
Pour représenter sur un même graphique la série des fréquences et celle des probabilités théoriques, sélectionner les colonnes **M** et **N** (avec les titres), puis choisir Colonne, puis Histogramme 2D.
Pour modifier les étiquettes de l'axe horizontal, après un clic droit sur le graphique, choisir Sélectionner les données, puis choisir Modifier (les étiquettes de l'axe horizontal).
Avec Open Office
Pour représenter sur un même graphique la série des fréquences et celle des probabilités théoriques, sélectionner les colonnes **K**, **M** et **N** avec les titres (utiliser la touche Ctrl pour sélectionner des plages non contigües), cliquer sur l'icône Diagramme et choisir le type de diagramme Colonne. Puis, dans Plage de données, cocher « Première colonne comme étiquette », puis cliquer sur Terminer.

Partie B
1. Cet algorithme simule un schéma de Bernoulli de paramètres 6 et *p*. La variable *S* compte le nombre de succès.

2. On appelle L la liste des résultats. Après chaque épreuve de Bernoulli, on obtient le nombre de succès *S* et le résultat L[*S*+1] est alors incrémenté d'une unité. On calcule L[*S*+1] et non L[*S*], car les listes sont en général indicées à partir de 1.
On affiche en sortie la liste des fréquences, obtenue en calculant $\frac{L}{100}$.

```
Lire p
L prend la valeur {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
    Pour j allant de 1 à 100
    S prend la valeur 0
        Pour i allant de 1 à 6
            Si random < p
                Alors S prend la valeur S + 1
            Fin Si
        Fin Pour
    L[S+1] prend la valeur L[S+1]+1
    Fin Pour
Afficher L/100
```

Partie C
Il faut définir une liste de sept éléments (et pas six).
Calculatrices Casio
Les commandes utiles pour les listes se trouvent à l'aide du menu **OPT**, puis du sous-menu **List**.
Pour définir une liste de sept éléments dont tous les éléments sont nuls, soit on saisit {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0} → List 1 (ceci évite d'introduire une nouvelle syntaxe), soit on utilise la fonction **Seq**.
Le nom choisi pour la liste est un nom dédié de la calculatrice (List 1 ou List 2…).
Calculatrices Texas
Les commandes utiles pour les listes se trouvent à l'aide du menu listes (2nde Stats), puis du sous-menu **OPS**.
Pour définir une liste de sept éléments dont tous les éléments sont nuls, soit on saisit {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0} → L_1 (ceci évite d'introduire une nouvelle syntaxe), soit on utilise la fonction **Suite**.
Le nom choisi pour la liste est un nom dédié de la calculatrice (L_1 ou L_2…).



TP 2 Des examens sanguins

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 12S_TP2.xlsx (Excel 2007), 12S_TP2.xls (Excel 2003) et 12S_TP2.ods (Open Office).

Ce TP est consacré à l'étude d'un problème réel : dans quelle mesure a-t-on intérêt à faire des analyses groupées plutôt que des analyses individuelles lorsqu'une population est infectée par une maladie donnée ? Le résultat est étonnant : en effet, l'étude faite ici montre qu'on a toujours intérêt à le faire, dès que la proportion de personnes ayant cette maladie dans la population est inférieure à 0,3. Cette méthode a été appliquée pour la première fois lors de la mobilisation des soldats américains lors de la Seconde Guerre mondiale : elle a d'ailleurs un gros intérêt économique, car une économie d'analyses entraîne une économie d'argent.

L'étude théorique de ce problème nécessite la connaissance de la loi binomiale et le calcul d'une espérance mathématique. La recherche de la taille optimale des regroupements est grandement facilitée par l'utilisation du tableur.

Partie A

1. a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}1$.

b. La probabilité qu'aucune des cinq personnes ne soit atteinte de la maladie est $P(X = 0) = 0{,}9^5 \approx 0{,}590$.

2. a. Soit A l'événement : « on ne fait qu'une seule analyse ». Alors $P(A) = P(X = 0) \approx 0{,}590$.

b. La probabilité de faire six analyses est :

$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}9^5 \approx 0{,}410.$$

3. a. Loi de probabilité de Y :

y_i	1	6
$P(Y = y_i)$	0,590	0,410

b. $E(Y) \approx 3{,}048$.

4. Sur un ensemble de 1 000 personnes, on va faire 200 analyses du type précédent avec des groupes de 5 personnes. Puisque $200 \times 3{,}048 \approx 609$, on va ainsi effectuer en moyenne 609 analyses au lieu des 100 prévues au départ, soit une économie de 391 analyses. Cela représente environ 39 % d'économies !

Partie B

1. a. X suit la loi binomiale de paramètres r et q.

b. La probabilité qu'aucune des personnes ne soit atteinte de la maladie est $P(X = 0) = (1 - q)^r = p^r$.

2. Soit A l'événement : « on ne fait qu'une seule analyse ». Alors $P(A) = P(X = 0) = p^r$.

La probabilité de faire toutes les analyses est :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p^r.$$

3. a. Loi de probabilité de Y :

y_i	1	$r + 1$
$P(Y = y_i)$	p^r	$1 - p^r$

b. $E(Y) = 1 \times p^r + (r + 1)(1 - p^r) = r + 1 - rp^r$.

4. Si on fait toutes les analyses individuelles, on fait r analyses. Avec la méthode des analyses groupées, on fait en moyenne $r + 1 - rp^r$ analyses.

Le nombre d'analyses économisées en groupant r personnes est ainsi en moyenne égal à :

$$r - (r + 1 - rp^r) = rp^r - 1.$$

On en déduit l'économie réalisée par personne :

$$\frac{rp^r - 1}{r} = p^r - \frac{1}{r}.$$

Partie C

1. On entre dans la colonne **A** à partir de **A2** les valeurs de p de 0,1 à 0,95 avec un pas de 0,05 : pour cela, on entre 0,1 en **A2**, puis on saisit en **A3** la formule **=A2+0,05**, que l'on recopie ensuite vers le bas.

On entre aussi dans la ligne 1 les valeurs de r de 1 jusqu'à 12.

2. Pour calculer l'expression $p^r - \frac{1}{r}$ pour $p = 0{,}1$ (entré en **A2**) et $r = 1$ (entré en **B1**), on doit écrire la formule : **=A2^B1-1/B1**. Mais cette formule doit être recopiée vers le bas et vers la droite, donc on doit fixer A dans la référence **A2** et on doit fixer 1 dans la référence **B1**.

On saisit ainsi en **B2** la formule : **=$A2^B$1-1/B$1**.

On peut alors recopier cette formule dans tout le tableau.

3. Pour $q = 0{,}05$, on a $p = 0{,}95$ et la lecture du tableau

nous indique que $p^r - \frac{1}{r}$ est maximum pour $r = 5$.

Pour $q = 0{,}1$, on a $p = 0{,}9$ et la lecture du tableau nous indique que $p^r - \frac{1}{r}$ est maximum pour $r = 4$.

Pour $q = 0{,}15$, on a $p = 0{,}85$ et la lecture du tableau nous indique que $p^r - \frac{1}{r}$ est maximum pour $r = 3$.

4. Les regroupements optimaux pour $q = 0{,}05$ sont de cinq personnes.

D'après le tableau, l'économie réalisée par personne est d'environ 0,573 78.

Pour 4 000 personnes, l'économie réalisée sera d'environ 2 295 analyses.

TP 3 Optimisation d'un QCM

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 12S_TP3.xlsx (Excel 2007), 12S_TP3.xls (Excel 2003) et 12S_TP3.ods (Open Office).

Ce TP se propose de faire une étude des QCM : a-t-on une bonne chance de réussir si on répond au hasard ? Dans quelle mesure aura-t-on une note correcte si on est un bon étudiant ? La réponse à ces questions dépend évidemment du nombre de réponses possibles à chaque question, du nombre de questions posées dans le QCM et aussi du coefficient que l'on affecte à chaque réponse juste et à chaque réponse fausse. On va étudier l'influence de ces divers paramètres à l'aide d'un tableur.

Partie A

1. Un étudiant répondant juste à trois questions sur cinq a une note de $4 (3 \times 2 - 2 \times 1)$.

2. $N = 2X - (5 - X)$, soit $N = 3X - 5$.

3. a. X suit la loi binomiale de paramètres 5 et 0,7.

b. Puisque $N = 3X - 5$, on a aussi $X = \frac{N+5}{3}$.

$P_1 = P(N < 5) = P\left(X < \frac{10}{3}\right) = P(X \leqslant 3) \approx 0{,}472$.

La probabilité qu'un étudiant travailleur n'ait pas la moyenne est voisine de 47 %.

4. a. X suit la loi binomiale de paramètres 5 et 0,25.

b. $P_2 = P(N \geqslant 5) = \mathrm{P}\left(X \geqslant \frac{10}{3}\right) = P(X \geqslant 4)$

$= 1 - P(X \leqslant 3) \approx 0{,}016$.

La probabilité qu'un élève répondant au hasard ait la moyenne est voisine de 2 %.

Partie B

1. a. X suit la loi binomiale de paramètres n et p, avec $p = 0{,}7$ pour un étudiant travailleur, et $p = 0{,}25$ pour un étudiant répondant au hasard.

b. $N = 2X - (n - X) = 3X - n$.

Un étudiant a la moyenne si, et seulement si, $N \geqslant \frac{n}{2}$, soit $3X - n \geqslant \frac{n}{2}$, soit $X \geqslant \frac{2n}{3}$.

2. a. On entre dans la plage **B2:B97** le nombre de questions du QCM, de 5 à 100, en saisissant 5 en **B2**, puis la formule **=B2+1** en **B3**, et en recopiant cette formule vers le bas.

b. On saisit en **C2** la formule : **=2*B2/3**.

3. Si le seuil brut est un entier, alors le seuil de réussite est égal au seuil brut. Sinon, on doit prendre comme seuil de réussite l'entier situé immédiatement après le seuil brut.

On teste donc avec un **SI** le fait que le seuil brut, calculé en **C2**, soit ou non entier. On utilise le fait qu'un nombre est entier s'il est égal à sa partie entière.

On saisit donc la formule :

=SI(ENT(C2)=C2;C2;ENT(C2)+1).

4. On entre en **E2** la formule :

=LOI.BINOMIALE(D2-1;B2;0,7;1).

Celle-ci calcule, pour une loi binomiale X dont le paramètre n a été entré en **B2** et la probabilité de succès est de 0,7, la probabilité que X soit inférieur strictement au nombre calculé en **D2**.

5. On entre en **G2** la formule :

=1-LOI.BINOMIALE(D2-1;B2;0.25;1).

Celle-ci calcule, pour une loi binomiale X dont le paramètre n a été entré en **B2** et la probabilité de succès est de 0,25, la probabilité que X soit supérieur ou égal au nombre calculé en **D2**.

6. Le nombre de questions minimales pour que les deux conditions soient remplies est 51.

On a alors, à 10^{-3} près : $P_1 \approx 0{,}247$ et $P_2 \approx 0$.

Partie C

1. On entre en **A3** et **A6** respectivement le nombre de réponses proposées et la probabilité de réussite à chaque question pour un étudiant travailleur. On nomme ces cellules respectivement *rep* et *p*.

2. La formule entrée en **E2** devient alors :

=LOI.BINOMIALE(D2-1;B2;p;1).

La formule entrée en **G2** devient :

=1-LOI.BINOMIALE(D2-1;B2;1/rep;1).

3. Pour un « Vrai – Faux », $rep = 2$. Puisque $p = 0{,}8$, on peut actualiser la feuille de calcul et obtenir les probabilités cherchées. Le plus petit nombre de questions de façon que P_1 et P_2 soient inférieures à 5 % est 28.

Avec 28 questions, on obtient $P_1 \approx 0{,}039$ et $P_2 \approx 0{,}044$.

Partie D

1. $N = aX - b(n - X) = (a + b)X - nb$.

Un étudiant a la moyenne si, et seulement si, $N \geqslant \dfrac{na}{2}$,

c'est-à-dire $(a + b)X - nb \geqslant \dfrac{na}{2}$.

Ceci équivaut à $(a + b)X \geqslant n\left(b + \dfrac{a}{2}\right)$,

soit $X \geqslant \dfrac{n\left(b + \dfrac{a}{2}\right)}{a + b}$.

2. On entre en **A9** et en **A19** les valeurs des coefficients *a* et *b*, puis on nomme ces deux cellules *a* et *b*.

3. La formule saisie en **C2** est modifiée comme suit :

=B2*(a/2+b)/(a+b).

4. Pour $rep = 4$ et $p = 0{,}8$ (et non pas $p = 0{,}7$) avec un QCM de 10 questions, on fixe $b = 1$ et on fait varier les valeurs de *a* afin que P_1 et P_2 deviennent inférieurs à 5 %.

La première valeur de *a* qui convient est 4 : on obtient alors $P_1 \approx 0{,}033$ et $P_2 \approx 0{,}020$.

Un QCM de 10 questions avec 4 réponses possibles à chaque question vérifiera les deux conditions posées (un élève travailleur a moins de 5 % de chance de ne pas avoir la moyenne et un étudiant non travailleur a moins de 5 % de chance d'avoir la moyenne) en choisissant pour coefficients + 4 pour une réponse juste et –1 pour une réponse fausse.

TP 4 Algorithme de détermination d'un intervalle de fluctuation

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr : 12S_TP4.xlsx (Excel 2007), 12S_TP4.xls (Excel 2003) et 12S_TP4.ods (Open Office).

Ce TP propose deux méthodes permettant d'obtenir de façon automatique un intervalle de fluctuation d'une proportion pour un seuil de risque donné. La première méthode utilise un algorithme que l'on met en œuvre sur la calculatrice. La seconde méthode utilise le tableur.

Partie A

1. La première ligne de l'algorithme demande de saisir les valeurs des deux paramètres *n* et *p*.

La seconde ligne initialise la variable *k*, qui va prendre successivement toutes les valeurs entières à partir de 0.

La troisième ligne initialise la variable *S* à $P(X \leqslant 0)$, c'est-à-dire $P(X = 0)$, qui est égal à $(1 - p)^n$: *S* calcule les probabilités cumulées $P(X \leqslant k)$, afin de déterminer pour quelles valeurs de *k* on obtient *a*, puis *b*.

2. Algorithme complet :

Saisir *n*, *p*
k prend la valeur 0
S prend la valeur $P(X \leqslant 0)$
Tant que $S \leqslant 0{,}025$
  k prend la valeur $k + 1$
  S prend la valeur $P(X \leqslant k)$
Fin Tant que
a prend la valeur *k*
Tant que $S < 0{,}975$
  k prend la valeur $k + 1$
  S prend la valeur $P(X \leqslant k)$
Fin Tant que
b prend la valeur *k*
Afficher $\dfrac{a}{n}$, $\dfrac{b}{n}$

3. Algorithme de détermination de *a* et *b* à un seuil de risque quelconque α :

Saisir *n*, *p*, α
k prend la valeur 0
S prend la valeur $P(X \leqslant 0)$
Tant que $S \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$
  k prend la valeur $k + 1$
  S prend la valeur $P(X \leqslant k)$
Fin Tant que
a prend la valeur *k*
Tant que $S < 1 - \dfrac{\alpha}{2}$
  k prend la valeur $k + 1$
  S prend la valeur $P(X \leqslant k)$
Fin Tant que
b prend la valeur *k*
Afficher $\dfrac{a}{n}$, $\dfrac{b}{n}$

Partie B

1. Programmes sur calculatrices :

TI

```
PROGRAM:CONF
:Prompt N,P,R
:0→K
:binomFRép(N,P,0
)→S
:While S<R/2
:K+1→K
:binomFRép(N,P,K
)→S
:End
:K→A
:While S<1-R/2
:K+1→K
:binomFRép(N,P,K
)→S
:End
:Disp A/N,K/N
```

CASIO

```
======CONF     ======
"N="?→N↵
"P="?→P↵
"R="?→R↵
0→K↵
BinominalCD(0,N,P)→S↵
While S<R÷2↵
K+1→K↵
BinominalCD(K,N,P)→S↵
WhileEnd↵
K→A↵
While S<1-R÷2↵
K+1→K↵
BinominalCD(K,N,P)→S↵
WhileEnd↵
A÷N◢
K÷N↵
```

2. Un intervalle de fluctuation au seuil de risque 5 % pour une proportion $p = 0{,}6$ dans un échantillon de taille 100 est [0,49 ; 0,71].

3. Un intervalle de fluctuation au seuil de risque 1 % pour une proportion $p = 0{,}6$ dans un échantillon de taille 100 est [0,47 ; 0,72].

Partie C

1. On entre les valeurs de n et p dans les cellules **C1** et **C2**. On peut aussi taper n dans la cellule **B1** et p dans la cellule **B2** pour améliorer la visibilité de la feuille de calcul.

2. a. Pour entrer les valeurs de k dans la colonne **E**, on saisit 0 en **E2**, puis la formule `=E2+1` dans la cellule **E3**, formule que l'on recopie vers le bas jusqu'à la cellule **E102**.

b. Dans la cellule **F2**, on calcule la probabilité $P(X \leqslant 0)$ avec la formule : `=LOI.BINOMIALE(E2;$C$1;$C$2;VRAI)` sous Excel, et `=LOI.BINOMIALE(E2;$C$1;$C$2;1)` sous Open Office.

On utilise des références absolues **$C$1** et **$C$2** pour les valeurs de n et p afin que ces valeurs restent inchangées lorsqu'on va ensuite recopier la formule vers le bas.

c. On obtient par recopie dans la colonne F les probabilités $P(X \leqslant k)$ pour k variant de 0 à 100.

d. La valeur a est la plus petite valeur de k telle que $P(X \leqslant k)$ dépasse 0,025. Puisque $P(X \leqslant 11) \approx 0{,}0126$ et $P(X \leqslant 12) \approx 0{,}0253$, on en déduit que $a = 12$.

De même, la valeur de b est la plus petite valeur de k telle que $P(X \leqslant k)$ dépasse 0,975.

Puisque $P(X \leqslant 27) \approx 0{,}966$ et $P(X \leqslant 28) \approx 0{,}980$, on en déduit que $b = 28$.

Un intervalle de fluctuation à 95 % de p est [0,12 ; 0,28].

3. a. La formule `=SI(ET(LOI.BINOMIALE(E3;C$1;C$2;1)>0,025;LOI.BINOMIALE(E3-1;C$1;C$2;1)<=0,025);E3;"")` affiche le contenu de la cellule **E3** (c'est-à-dire la valeur de k) si $P(X \leqslant k)$ dépasse 0,025 et $P(X \leqslant k - 1)$ est inférieur à 0,025, sinon rien ne s'affiche (puisqu'on a entré alors comme instruction "").

En recopiant cette formule vers le bas dans la colonne **G**, la valeur de a va s'afficher à un endroit précis de la colonne **G**.

b. La formule à entrer dans la cellule **H3** et à recopier vers le bas dans la colonne **H** afin de déterminer le réel b est alors : `=SI(ET(LOI.BINOMIALE(E3-1;C$1;C2;VRAI)<0,975;LOI.BINOMIALE(E3;C1;C2;VRAI)>=0,975);E3;"")`.

De la même façon que la formule précédente, elle affiche le contenu de la cellule **E3** si $P(X \leqslant k)$ dépasse 0,975 et $P(X \leqslant k - 1)$ est inférieur à 0,975, sinon rien ne s'affiche.

c. On entre en **J2** la formule : `=MAX(G2:G102)/C1` afin de calculer $\frac{a}{n}$.

On entre en **K2** la formule : `=MAX(H2:H102)/C1` afin de calculer $\frac{b}{n}$.

On obtient ainsi en **J2** et **K2** les bornes de l'intervalle de fluctuation à 95 %.

d. Pour obtenir un intervalle de fluctuation au seuil de risque α, on saisit tout d'abord ce niveau de risque dans la cellule **C3**. Puis on modifie la formule saisie en **G3** de la façon suivante :

`=SI(ET(LOI.BINOMIALE(E3;C$1;C$2;VRAI)>C$3/2;LOI.BINOMIALE(E3-1;C$1;C$2;VRAI)<=C$3/2);E3;"")`.

On modifie aussi la formule saisie en **H3** :

`=SI(ET(LOI.BINOMIALE(E3-1;C$1;C$2;VRAI)<1-C$3/2;LOI.BINOMIALE(E3;C$1;C$2;VRAI)>=1-C$3/2);E3;"")`.

En effet, pour un seuil de risque α, a est la plus petite valeur de k telle que $P(X \leqslant k)$ dépasse $\frac{\alpha}{2}$, et b est la plus petite valeur de k telle que $P(X \leqslant k)$ dépasse $1 - \frac{\alpha}{2}$.

4. a. On reprend la feuille de calcul précédente en modifiant la valeur de n, puis en prolongeant les colonnes **E**, **F**, **G** et **H** jusqu'à la ligne 502, et enfin en modifiant les formules donnant les bornes de l'intervalle de fluctuation en **J2** et **K2** (on remplace 102 par 502). On obtient alors un intervalle de fluctuation au seuil de risque 5 % pour une proportion $p = 0{,}34$ dans un échantillon de taille 500 : [0,298 ; 0,382].

b. Avec un échantillon de taille 2 000, on fait de même et on obtient alors l'intervalle de fluctuation : [0,320 ; 0,361].

Remarque : Open Office ne calcule plus les valeurs de la loi binomiale lorsque n dépasse 1 794. Il ne peut donc fournir un intervalle de fluctuation pour un échantillon de taille 2 000. On pourra se contenter d'un échantillon de taille 1 500, et on obtient [0,316 ; 0,364].