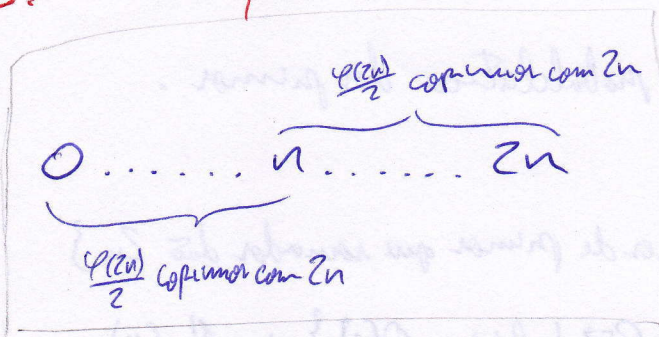


1. Motivação



Seja $h: E(n) \rightarrow F(n)$
 $a \mapsto 2n - a$ é uma bijeção!

Portanto $|E(n)| = |F(n)| \quad \forall n$.

Definimos os conjuntos:

$$E(n) = \{a \mid a < n, (a, 2n) = 1\} \setminus \{1\}$$

$$F(n) = \{a \mid n < a < 2n, (a, 2n) = 1\} \setminus \{2n-1\}$$

$$P(n) = E(n) \cap IP$$

$$Q(n) = F(n) \cap IP$$

$$\bullet E_n = |E(n)| = |F(n)|$$

$$\bullet P_n = |P(n)|$$

$$\bullet Q_n = |Q(n)|$$

Obs: A função

do mesmo jeito se $h: F \rightarrow E$
 $a \mapsto 2n - a$

Estamos querendo aqui todo primo "potencial" de ser somado a outro primo de modo a dar $2n$. Para isso particionamos o conjunto dos coprimos com $2n$ em E e F , $< n$ e $> n$, e também pegamos os primos de verdade dentro deles, P e Q .

$\forall a \in E, a + h(a) = 2n$. Um dado $2n$ é de Goldbach se $\exists a \in P$ tq. $h(a) \in Q$. Essa é a única maneira de $2n$ ser de Goldbach, salvo o caso primo. Justificarei depois isso desconsiderando esse caso. (no verso)

$$\bullet E_n = \frac{\phi(2n)}{2}$$

$$\bullet P_n = \pi(n) - \omega(2n)$$

$$\bullet Q_n = \pi(2n-2) - \pi(n)$$

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq Q_n \geq \pi(2n) - \pi(n) - 1$$

- Por conta das pombas:

$$P_n + Q_n > E_n \Rightarrow \exists a \in P(n) \text{ tq. } h(a) \in Q(n)$$

$$\Rightarrow 2n \text{ é de Goldbach}$$

$$(1.1) \quad \pi(2n) - \omega(2n) - 1 > \frac{\phi(2n)}{2} \Rightarrow 2n \text{ é de Goldbach}$$

alguns números ultrapassam isso, esses números param \pm perto de 100.000.

E quando em (1.1) o lado esquerdo é \leq ?

2. Argumento probabilístico

A ideia agora é utilizar um modelo probabilístico dos primos.

Def. ^{2.1} (Função de Goldbach) $G(n) = \#\{\text{pares de primos que somados dão } 2n\}$
 $= \#\{p \in P(n) \mid h(p) \in Q(n)\} + \mathbb{1}_p(n)$

$$\rightarrow \begin{cases} 1, & n \in IP \\ 0, & n \notin IP \end{cases}$$

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

São dados E_n caixas e P_n bolinhas pretas e Q_n bolinhas brancas. Distribuímos primeiro as bolinhas pretas em caixas distintas, depois fazemos o mesmo com as bolinhas brancas. Queremos contar quantas caixas contêm duas bolinhas e chamaremos essa contagem de $G'(n)$. $G'(n)$ é uma variável aleatória.

O experimento é realizado sequencialmente, portanto as v.a. são totalmente dependentes!

Obs: P e Q são independentes, o que não ocorreria caso $n \in P$ e $n \in Q$!

$$G'(n) \sim \text{Hipergeométrica}(E_n, P_n, Q_n)$$

$$\mathbb{P}(G'(n)=k) = \frac{\binom{P_n}{k} \binom{E_n - P_n}{Q_n - k}}{\binom{E_n}{Q_n}}$$

$$k \in \{0..Q_n\}$$

Seja C o conjunto das sequências $\{G'(n) + \mathbb{1}_p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, correspondentes a todos os resultados possíveis do ~~uma~~ experimento.

A seq. "verdadeira" $\{G(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in C$.

O conjunto C é definido de maneira puramente analítica como um espaço abstrato sem nenhuma referência a uma interpretação concreta.

Def. ^{2.2} (Conjunto ~~exceção~~ ^{exceção})

$$X(n) = \{a \mid G(a) = 0\}$$

conjunto dos números que não são de Goldbach

Em C , para uma determinada sequência, definimos $X'(n) = \{a \mid G'(a) + \mathbb{1}_p(a) = 0\}$ e $X' = \{a \in G' \mid G'(a) + \mathbb{1}_p(a) = 0\}$. Iremos provar que $\mathbb{P}(X' \text{ finito}) = 1$.

3. "A probabilidade do conjunto excerto ser finito é 1"

Podemos reescrever $|X'|$ da seguinte maneira:

$$|X'| = X_1 + X_2 + X_3 + \dots, \text{ onde } X_k \sim \beta(\mathbb{I}(G'(k)=0))$$

$|X'|$ é, portanto, uma variável aleatória. (i.e., $\mathbb{P}(X_k=1) = \frac{\binom{E_k - P_k}{Q_k}}{\binom{E_k}{Q_k}}$)

Thm. 3.1 $\mathbb{P}(|X'| < \infty) = 1$.

Obs: $K \notin \mathbb{P}$

Dem: Basta mostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_k=1) < \infty$, pois daí podemos aplicar Borel-Cantelli para dizer que $\mathbb{P}(\limsup_{k \rightarrow \infty} (X_k=1)) = 0$, e consequentemente $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots < \infty) = 1$.

→ provar que $\sum X_k < \infty$ é equiv. a provar que $\sum_{k \in \mathbb{P}} X_k < \infty$

Para mostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_k=1) < \infty$ mostraremos que $\frac{1}{\mathbb{P}(X_k=1)} > k^2$

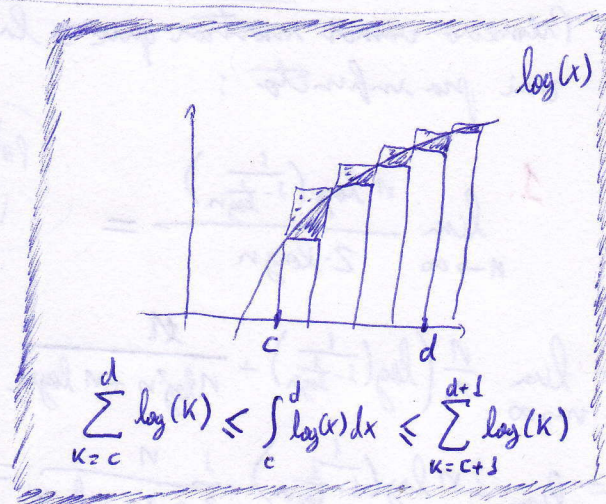
$\forall k$ a partir de certo $N \in \mathbb{N}$.

Obs: vou escrever E, P, Q no lugar de E_n, P_n, Q_n para a notação ficar mais limpinha!

$$\frac{1}{\mathbb{P}(X_k=1)} = \frac{\binom{E}{Q}}{\binom{E-P}{Q}} = \frac{(E)_Q}{(E-P)_Q} \rightarrow (i)$$

* $(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$ [Pochhammer decrescente]

$$\begin{aligned} \log \frac{(E)_Q}{(E-P)_Q} &= \sum_{k=E-Q+1}^E \log(k) - \sum_{k=E-P-Q+1}^{E-P} \log(k) \\ &\geq \int_{E-Q}^{E-1} \log(x) dx - \int_{E-P-Q+2}^{E-P+1} \log(x) dx \\ &= [x \log x - x]_{E-Q}^{E-1} - [x \log x - x]_{E-P-Q+2}^{E-P+1} \\ &= (E-1) \log(E-1) - (E-Q) \log(E-Q) + (E-P+1) \log(E-P+1) \\ &\quad + (E-P-Q+2) \log(E-P-Q+2) \end{aligned}$$



$$(i) \rightarrow \frac{(E)_Q}{(E-P)_Q} \geq \frac{(E-1)^{E-1} (E-P-Q+2)^{E-P-Q+2}}{(E-Q)^{E-Q} (E-P+1)^{E-P+1}} = \frac{(E-1)^{Q-1}}{(E-P+1)^{Q-1}} \cdot \frac{(E-1)^{E-Q} (E-P-Q+2)^{E-P-Q+2}}{(E-Q)^{E-Q} (E-P+1)^{E-P-Q+2}} = \dots$$

$$= \frac{(E-1)^{Q-1}}{(E-P+1)^{Q-1}} \cdot \frac{\left[\frac{(E-1)^{E-Q}}{(E-Q)^{E-Q}} \right]}{\left[\frac{(E-P+1)^{E-P+Q+2}}{(E-P+Q+2)^{E-P+Q+2}} \right]} > \left(\frac{E-1}{E-P+1} \right)^{Q-1} = e^{(Q-1) \log \left(\frac{E-1}{E-P+1} \right)} \quad (ii)$$

$$(Q-1) \log \left(\frac{E-1}{E-P+1} \right) = (Q-1) \log \left(\frac{E-1}{(E-1)-(P-2)} \right)$$

$$> \frac{1}{2} \frac{n}{\log n} \cdot \log \left(\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \frac{n}{\log n}} \right)$$

$$= \frac{n}{2 \log n} \cdot \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\log n}} \right)$$

$$= \frac{n \cdot \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\log n}} \right)}{2 \log n}$$

$$(ii) \rightarrow e^{(Q-1) \log \left(\frac{E-1}{E-P+1} \right)} > e^{\frac{n \cdot \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\log n}} \right)}{2 \log n}} \quad (iii)$$

Queremos mostrar que (iii) $> e^{2 \log n} = n^2$,
 o equivalente a que $\left| \frac{n \cdot \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\log n}} \right)}{2 \cdot \log n} > 2 \log n \right|$.

Primeiro vamos mostrar que o lado esquerdo vai pra infinito:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\log n}} \right)}{2 \cdot \log n} =$$

Pode fazer L'Hopital!

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(\log \left(1 - \frac{1}{\log n} \right) + \frac{1}{n \log^2 n + n \log n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} n \log \left(1 - \frac{1}{\log n} \right) + \frac{1}{2 \log^2 n + \log n} = \infty$$

Agora vamos mostrar que $\frac{\text{lado esquerdo}}{\text{lado direito}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

>> próximo bloco

$$\frac{a}{a-b} > \frac{(a+1)}{(a+1)-b}$$

$$\bullet P_n - 2 = \pi(n) - \omega(2n) - 2 \sim \frac{n}{\log n}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n > N:$$

$$J - \epsilon < \frac{P_n - 2}{\frac{n}{\log n}} < J + \epsilon$$

$$\Rightarrow (J - \epsilon) \frac{n}{\log n} < P_n - 2 < (J + \epsilon) \frac{n}{\log n}$$

Vamos trocar P_n por uma coisa menor e usar $\epsilon = \frac{1}{2}$.

$$\bullet Q_n - 1 = \pi(2n-2) - \pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$$

idêntico ao argumento anterior.

$$\bullet E-1 = \frac{\varphi(2n)}{2} - 1 < \frac{n}{2}$$

(como n seja primo ou pot. de 2)

Substituiremos por algo maior, para aproximar a fração de 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\log n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -n \log \left(1 - \frac{1}{\log n} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1}{t} \log \left(1 - \frac{1}{\log t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\log \left(1 - \frac{1}{\log t} \right)}{t}$$

$$\stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{1}{\log t} \right)}{1 + \frac{1}{\log t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t \log t + t}$$

$$= \infty$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\log n}}\right)}{4 \log^2 n} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\log n}}\right) + \frac{1}{\log^2 n + \log n}}{\frac{8 \log n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\log n}}\right)}{2 \log n} \cdot \frac{1}{4} +$

$\frac{1}{8} \frac{n}{\log^2 n + \log n} = \infty$
 $\rightarrow \infty$

Portanto, $\frac{n \log\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\log n}}\right)}{2 \log n} > 2 \log n, \forall n > N$
 Para algum N

(iii) $e^{\frac{n \cdot \log\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\log n}}\right)}{2 \log n}} > e^{2 \cdot \log n} = n^2.$

em a partir de
 algum $N \in \mathbb{N}$.

(i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii), portanto, $\frac{1}{\mathbb{P}(X_n=1)} > n^2 \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(X_n=1) < \frac{1}{n^2}}$

□