



Instruktion. Läs nedanstående text och lös sedan de två uppgifterna. Varje uppgift ger max 5 poäng. För godkänt resultat fordras 7 poäng av 10. Observera att denna inlämningsuppgift handlar i huvudsak om att skriva och uttrycka sig, så poäng kommer att dras för syftningsfel, stavfel, felaktig användning av matematiska eller logiska symboler etc. En svår- eller oläslig lösning ger ingen poäng, även om matematiken på något sätt skulle vara korrekt. Skriv rent med hjälp av t.ex. \LaTeX , Word eller motsvarande. Skriv sedan ut och lämna in på valfri lektion eller föreläsning fram till och med 2013-11-15. Glöm ej att förse de inlämnade lösningarna med namn och personnummer.

NÅGRA ORD OM ATT SKRIVA LÖSNINGAR I MATEMATIK

Att skriva goda lösningar i matematik, eller i andra vetenskapliga ämnen för den delen, är något av en konst, och är alltså någonting som svårligen låter sig definieras. Emellertid, bara för att någonting saknar enkel definition, annat än i termer av totaliteten tillsammans med vidhängande omdömen, så betyder det ju inte att det inte existerar eller att det inte går att säga någonting om det. Det går att klassificera lösningar i termer av välskrivna och oläsliga.

KLADD?

Kladden är matematikens talspråk. Skilj således på kladd och det som skall kommuniceras i text till t.ex. en annan person. I en kladd har man mycket stor frihet – allt som hjälper för att lösa problemet är bra. Därvidlag finns inga begränsningar. Detta gäller inte för en redovisning, ty syftet med en redovisning är att kommunicera med *någon annan* d.v.s. med en person som inte, just nu, är du själv och som skall kunna begripa utan att lägga ner åtskilligt med arbete för att dechiffrera det skrivna. Se inte texten som en bredvidstående “snäll, men egentligen onödigt förklaring” till räkningarna, utan se räkningarna och texten som en grammatisk helhet.

Vidare, notera att en god lösning inte enbart behöver vara till för kommunikation med andra i samma tid, utan är till hjälp för dig själv om du vill kommunicera med dig själv i framtiden t.ex. vid repetition och studier inför en tentamen.

Därutöver, en välskriven lösning kan också hjälpa till att hitta fel – den inboende logiken i språkets grammatik, estetik, ordning etc., kan vara till stor hjälp vid felsökning.

NÅGRA RÅD

Här är några grundläggande, dock icke uttömmande eller ömsesidigt oförenliga, råd som underlättar för dig och alla andra:

- (1) Skriv fullständiga meningar: Stor bokstav och punkt.
- (2) Korrekt stavning, grammatik och kommatering.
- (3) Missbruka ej symboler eller skiljetecken t.ex. genom att låta ett kommatecken helt ersätta ordet “och” med mera.
- (4) Tag det varligt med förkortningar, särskilt förkortningar som inte är standard.
- (5) Skriv aldrig i jag-form; matematik skrives av hävd i första person pluralis eller ibland även i tredje person singularis (blanda ej båda i samma text dock), om personliga pronomina över huvud taget behövs. Matematik, till skillnad mot för empiriska vetenskaper som t.ex. kemi, använder inte passiv form.
- (6) Inför tydligt beteckningar och antaganden. T.ex. “Låt n vara ett heltal” snarare än “ n : heltal” eller dylikt.
- (7) Var försiktig med variablers och symbolers livslängd. Det går att återanvända t.ex. “ x ” flera gånger, men undvik att göra det i samma kontext.
- (8) Inled aldrig en mening med en symbol.
- (9) Skriv inte för mycket så det blir pladdrigt, men skriv heller inte för lite så att det blir svår- eller till och med obegripligt.
- (10) Använd inte piktogram eller pilar, inringningar och liknande för att ersätta ord och “visa” vad som är vad. (Detta är kladd.)
- (11) Vanliga skrivregler gäller för räkneord eller tal, såvida inte talet i sig är det intressanta. Alltså “primtalet 2 ...” inte “primtalet två ...” och “två ekvationer ...” inte “2 ekvationer ...”.
- (12) Figurer, grafer, bilder etc., skall skisseras i *väsentliga drag*.
- (13) Förse lösningen med ett tydligt svar.
- (14) Titta i läroböcker! Hur skriver författaren?

Beträffande punkt (8), så är detta särskilt angeläget om en mening slutar med en symbol, och efterföljande inleds med en symbol. Betrakta nedanstående två exempel:

- “... vi får polynomet $x^2 + 5x + 6$. $x^2 + 5x + 6 = 0$ har rötterna $x = -3$ eller $x = -2$.”
- “... vi får polynomet $x^2 + 5x + 6$. Ekvationen $x^2 + 5x + 6 = 0$ har rötterna $x = -3$ eller $x = -2$.”

I första fallet ovan finns en viss risk att punkten undslipper läsaren varpå allt klumpas ihop: "... $x^2 + 5x + 6x^2 + 5x + 6 = 0$ har rötterna $x = -3$ eller $x = -2$ " – d.v.s. läsaren råkar missa punkten och låter symbolerna blandas ihop över satsavgränsningen. Ekvationen $x^2 + 5x + 6x^2 + 5x + 6 = 0$ är ju ekvivalent med $7x^2 + 10x + 6 = 0$, vilken inte har rötterna $x = -3$ eller $x = -2$! För att lösa detta problem, skriv ut symbolens namn före symbolen som t.ex. "Ekvationen" ovan.

Med *väsentliga drag* i punkt (12) menas att de intressanta dragen skall anges i figuren. Man skall inte rita perfekt, eller rita ut punkter och försöka "koppla" ihop grafen etc. En skisserad cirkel skall inte kunna misstas för en kvadrat, eller en ellips. En funktionsgraf skisseras genom att på ett ungefär ange, och med hjälp av, derivatans tecken, viktiga punkter som t.ex. nollställen, stationära punkter, inflexionspunkter etc. Om en cirkel har medelpunkt i $(1, 1)$ och radie 1, så tangerar cirkeln koordinataxlarna. En skiss av denna cirkel skall inte skära, eller helt missa koordinataxlarna etc.

UPPGIFTER

Uppgift 1. Betrakta följande problem och tillhörande lösningar.

1. Bestäm de reella lösningarna till ekvationen $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$.
2. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

3. Låt n vara ett naturligt tal. Visa att $n(n+1)$ är ett jämnt tal.

Nedan är några lösningsförslag, vilka är i någon välvillig mening matematiskt korrekta, men lämnar en del att önska. Hyfsa till dem!

1. Först sätter jag $y = x^2$ och stoppar in i ekvationen: $y^2 + 2y - 3 = 0$ med formeln får jag $y = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2 \rightarrow \underline{x = \pm 1} \leftarrow$ svaret!
2. $y = x \rightarrow x + x = 2, x = 1, y = 1$.
3. $n : \text{jämnt} \implies n(n+1)$ är jämnt, $n : \text{udda}$ måste $n+1$ vara jämnt så $n(n+1)$ är alltid jämnt

Uppgift 2. Antalet siffror i ett naturligt tal n skrivet i basen 10 är precis $1 + \log_{10} n$ avrundat nedåt till närmsta heltal. Visa detta genom att använda bevisskissen nedan och fyll i luckorna samt formulera dig matematiskt!

Bevisskiss: Skriv $n = d_k \cdot 10^k + m$ för något heltal $m < 10^k$ och där d_k är den mest signifikanta siffran (varför är detta möjligt?). Antalet siffror i n är alltså $k+1$ (varför inte k ?). Faktorisera $n = 10^k(d_k + m/10^k)$ och logaritmera: $\log_{10} n = k + \log_{10}(d_k + m/10^k)$. Eftersom $1 \leq d_k + m/10^k < 10$ (varför?) så är $0 \leq \log_{10}(d_k + m/10^k) < 1$ och därmed måste $1 + \log_{10} n$ avrundat nedåt vara precis $k+1$.