

Term
Ts

ENSEIGNEMENT SPÉCIFIQUE
ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Nouvelle

Collection
Indice

Maths

PROGRAMME 2012

Sous la direction de :

Michel PONCY

Jean-Louis BONNAFET

Marie-Christine RUSSIER

Sébastien CANTE

Martine FEID

Yves GUICHARD

Catherine LEBERT

Pierre-Marie LONGIN

Yvette MASSIERA

Jean-Manuel MENY

Frédérique MOUNIER

Denis VIEUDRIN

Fabienne VINCEROT

éco
responsable
Bordas

Sommaire

ENSEIGNEMENT SPÉCIFIQUE

CHAPITRE 1	Les suites	5
CHAPITRE 2	Limites et continuité	17
CHAPITRE 3	Fonctions trigonométriques et dérivation	37
CHAPITRE 4	La fonction exponentielle	54
CHAPITRE 5	Logarithmes	70
CHAPITRE 6	Calcul intégral	87
CHAPITRE 7	Les nombres complexes	101
CHAPITRE 8	Géométrie dans l'espace	113
CHAPITRE 9	Produit scalaire dans l'espace	128
CHAPITRE 10	Probabilités conditionnelles	142
CHAPITRE 11	Lois de probabilité à densité	155
CHAPITRE 12	Échantillonnage et estimation	170

ENSEMBLES – RAISONNEMENT LOGIQUE	185
--	-----

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

CHAPITRE 1	Divisibilité et nombres premiers	189
CHAPITRE 2	Problèmes de chiffrement	201
CHAPITRE 3	Problèmes sur les matrices	216
CHAPITRE 4	Problèmes d'évolution	226

T^{erm}
S

ENSEIGNEMENT SPÉCIFIQUE

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Raisonnement par récurrence.	<ul style="list-style-type: none"> • Savoir mener un raisonnement par récurrence. 	<p>Ce type de raisonnement intervient tout au long de l'année et pas seulement dans le cadre de l'étude des suites.</p>
Limite finie ou infinie d'une suite.	<p>◇ Dans le cas d'une limite infinie, étant donné une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.</p>	<p>Pour exprimer que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ».</p> <p>Comme en classe de Première, il est important de varier les approches et les outils sur lesquels le raisonnement s'appuie.</p> <p>On présente des exemples de suites qui n'ont pas de limite.</p>
Limites et comparaison.	<p>▣ Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :</p> <ul style="list-style-type: none"> – u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ; – u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; <p>alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.</p>	<p>▣ On démontre que si une suite est croissante et admet pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l.</p> <p>Le théorème dit « des gendarmes » est admis.</p>
Opérations sur les limites.	<ul style="list-style-type: none"> • Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites. 	
Comportement à l'infini de la suite (q^n) , q étant un nombre réel.	<p>▣ Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique. 	<p>On démontre par récurrence que pour a réel strictement positif et tout entier naturel n :</p> $(1+a)^n \geq 1+na.$ <p>On peut étudier des situations où intervient la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique.</p>
Suite majorée, minorée, bornée.	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées. 	<p>Ce théorème est admis.</p> <p>▣ Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.</p> <p>Des exemples de suites récurrentes, en particulier arithmético-géométriques, sont traités en exercice.</p> <p>◇ Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre.</p> <p>Ⓐ Approximations de réels (π, e, nombre d'or, etc.).</p>

B Notre point de vue

Ce chapitre introduit un nouveau type de raisonnement, le raisonnement par récurrence. L'activité 1 permet une première approche de l'hérédité d'une propriété. L'autre notion importante de ce chapitre est la notion de limite. L'activité 2 permet de mettre en place les définitions des limites. Certaines formes indéterminées sont découvertes dans l'activité 3 et l'activité 4 permet de visualiser le théorème des gendarmes. Enfin l'activité 5 permet à l'aide d'un exemple plus concret de découvrir le théorème de convergence des suites monotones.

Nous avons pris le parti de démontrer le plus grand nombre de propriétés et théorèmes mais nous avons précisé les preuves exigibles par le programme et celles non exigibles.

L'approximation de réels (π , nombre d'or, des racines carrées et e) est étudiée dans l'approfondissement de l'accompagnement personnalisé et dans le TP1.

Des algorithmes sont dispersés dans les exercices et les TP.

Nous nous sommes efforcés de rester au plus près des exigences du programme.

Les notions abordées dans le chapitre 1

1. Raisonnement par récurrence
2. Limite finie ou infinie d'une suite
3. Théorèmes généraux sur les limites
4. D'autres théorèmes
5. Suites majorées, minorées et bornées

C Avant de commencer

Le QCM et les exercices proposés dans cette page permettent de faire le point sur la notion de suite étudiée en Première S. Voir livre page 420 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

D Activités

Activité 1 Une forêt de pins

Cette activité permet une première approche de la notion d'hérédité d'une propriété.

1. a. On a la formule de récurrence : $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}v_n$.

D'où $v_1 = 10$, $v_2 = 6$ et $v_3 = 4$.

b. $v_4 = 3$ donc $v_4 > 2$. $v_5 = 2,5$ et $v_6 = 2,25$ donc $v_6 > 2$.

2. a. Si $v_p > 2$ alors $\frac{1}{2}v_p > 1$ et $1 + \frac{1}{2}v_p > 2$ soit $v_{p+1} > 2$.

b. $v_1 > 2 \Rightarrow v_2 > 2 \Rightarrow v_3 > 2 \Rightarrow \dots \Rightarrow v_{101} > 2$.

Activité 2 Comportement d'une suite pour n grand

Cette activité permet de découvrir les différents comportements des suites lorsque n tend vers $+\infty$ et de mettre en place les définitions des limites.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

01_TS_activite2.ods (OpenOffice),

01_TS_activite2.xls (Excel 2003)

et 01_TS_activite2.xlsx (Excel 2007).

1. On constate que les suites de termes généraux n , n^2 et $(1,01)^n$ semblent tendre vers $+\infty$ et les suites de termes généraux $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}$ semblent tendre vers 0.

2. a. $u_n > 1\,000 \Leftrightarrow n > 10\sqrt{10}$. Donc $n_0 = 32$.

b. $u_n > 10^{12} \Leftrightarrow n > 10^6$. Donc $n_1 = 1\,000\,001$.

c. $u_n > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$. Donc $u_n > A$ à partir du premier entier naturel n_2 supérieur strictement à \sqrt{A} .

D'où l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir de n_2 .

3. a. $v_n < 0,1 \Leftrightarrow n > 10$. Donc $n_0 = 11$.

b. $v_n < 10^{-12} \Leftrightarrow n > 10^{12}$. Donc $n_1 = 10^{12} + 1$.

$-10^{-12} < v_n < 10^{-12} \Leftrightarrow 0 < v_n < 10^{-12}$ car $v_n > 0$.

Donc pour tout $n \geq n_1$, $-10^{-12} < v_n < 10^{-12}$.

c. $-A < v_n < A \Leftrightarrow 0 < v_n < A \Leftrightarrow n > \frac{1}{A}$.

Soit n_2 le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{1}{A}$.

Alors pour tout $n \geq n_2$, $-A < v_n < A$, autrement dit l'intervalle $]-A; A[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_2 .

Activité 3 Limites « piégeuses »

Cette activité permet de découvrir l'existence des formes indéterminées : ici la forme indéterminée « $0 \times \infty$ ».

1. a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

b. $u_n v_n = n$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$.

2. a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$.

b. $w_n t_n = \frac{1}{n}$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n t_n = 0$.

3. On trouve dans un cas $+\infty$ et dans l'autre cas 0 : on ne peut donc pas énoncer un résultat général.

Activité 4 Les gendarmes et le voleur

Cette activité permet de découvrir et de visualiser le théorème des gendarmes.

Fichiers associés sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

01_TS_activite4.ods (OpenOffice),

01_TS_activite4.xls (Excel 2003)

et 01_TS_activite4.xlsx (Excel 2007).

1. On multiplie l'encadrement $-1 \leq \cos n \leq 1$ par $\frac{1}{n}$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

3. On peut conjecturer que la limite de la suite (v_n) est aussi 0.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1. Supposons qu'il existe un entier p tel que $(xy)^p = x^p \times y^p$.

Alors $(xy)^{p+1} = (xy)^p \times (xy) = x^p \times y^p \times x \times y$ soit :

$$(xy)^{p+1} = x^{p+1} \times y^{p+1}.$$

2. Supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geq 0$.

Alors $2u_p \geq 0$ soit $3 + 2u_p \geq 3$ et ainsi $u_{p+1} \geq 0$.

3. Initialisation : $0(0+1) = 0 = v_0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$v_p = p(p+1).$$

Alors $v_{p+1} = p(p+1) + 2p + 2 = p^2 + 3p + 1$ soit :

$$v_{p+1} = (p+1)(p+2).$$

4. Initialisation : $3 - 2^{0+1} = 1 = u_0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$u_p = 3 - 2^{p+1}.$$

Alors $u_{p+1} = 2(3 - 2^{p+1}) - 3 = 3 - 2^{p+2}$.

5. Initialisation : $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$\sum_{k=0}^p k = \frac{p(p+1)}{2}.$$

Alors :

$$\sum_{k=0}^{p+1} k = \sum_{k=0}^p k + p + 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{p+1} k = \frac{p(p+1)}{2} + p + 1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2}.$$

6. Initialisation : $u_0 = -2 \leq 6$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \leq 6$.

Alors $\frac{1}{2}u_p \leq 3$ et $u_{p+1} \leq 6$.

7. Voir livre page 420.

8. À partir du rang 20.

9. 1. À partir du rang 6.

2. À partir du rang 71.

10. Voir livre page 420.

11. 1. À partir du rang 10 001.

2. À partir du rang 100 001.

12. 1. À partir du rang 202.

2. À partir du rang 2 002.

Activité 5 Évolution du nombre d'adhérents d'un club de sport

À partir d'un exemple concret cette activité permet de découvrir le théorème de convergence des suites monotones.

1. Le nombre d'adhérents $(n+1)$ années après la création s'obtient en multipliant a_n par $\frac{3}{4}$ et en rajoutant 1,2 centaines de nouveaux adhérents.

2. Initialisation : $a_0 = 3$ et $3 < 4,8$.

Hérédité : on suppose qu'il existe p tel que $a_p < 4,8$.

$$a_p < 4,8 \Rightarrow 0,75 a_p < 3,6 \Rightarrow a_{p+1} < 4,8.$$

$$3. a_{n+1} - a_n = -0,25 a_n + 1,2 \\ = -0,25(a_n - 4,8).$$

Or $a_n < 4,8$.

Donc $a_{n+1} - a_n > 0$.

4. On peut conjecturer que la suite converge vers 4,8.

13. 1. $+\infty$ 2. $+\infty$ 3. $+\infty$ 4. -30 5. $-\infty$ 6. $+\infty$

14. 1. 4 2. 0 3. 0 4. $-\frac{3}{4}$

15. 1. $+\infty$ 2. $-\infty$ 3. $+\infty$ 4. $-\infty$

16. 1. 0 2. 3 3. 0 4. 2

17. Voir livre page 420.

18. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ par comparaison.

19. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

20. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ par comparaison.

21. 1. $\cos n \geq -1$ donc $u_n \geq n^2 - 1$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ par comparaison.

22. 1. $(-1)^n \leq 1$ donc $u_n \leq -n + 1$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ par comparaison.

23. a. $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ donc (u_n) converge vers 0.

b. $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ donc (u_n) converge vers 0.

24. 1. On multiplie par -20 puis on ajoute n .

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ par comparaison.

25. 1. 0 2. $+\infty$ 3. Diverge sans limite.

26. a. 0 b. 0 c. Diverge sans limite.

27. a. 0 b. $+\infty$ c. $-\infty$ d. Diverge sans limite. e. $+\infty$

28. Voir livre page 420.

29. a. $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b. $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n - \left(\frac{7}{5}\right)^n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

$$30. 1. S_n = -2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = -6 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

2. (S_n) converge vers -6 .

$$31. 1. S_n = 3 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{9}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right).$$

2. (S_n) converge vers $\frac{9}{4}$.

32 1. $u_n - 1 = \frac{1}{n} > 0$ donc (u_n) est minorée par 1.

2. $u_{10000} = 1,0001 < 1,001$.

Donc (u_n) n'est pas minorée par 1,0001.

33 Voir livre page 420.

34 1. $b. u_n - 1 = n^2 + 4n > 0$ donc 1 peut être un minorant de (u_n) .

c. Oui car les 10 premiers termes sont supérieurs à -3.

2. $u_n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 > 0$.

3. La suite (u_n) est minorée par -3.

35 1. (u_n) semble être majorée par 2.

2. $u_n - 2 = \frac{-5}{n+2} < 0$ donc $u_n < 2$.

3. (u_n) est majorée par 2.

36 1. $u_{n+1} - u_n = \frac{12}{(3n+2)(3n+5)} > 0$ donc (u_n) est croissante.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

3. (u_n) étant croissante et de limite 3, on en déduit que la suite est majorée par 3. De plus elle est minorée par son premier terme $u_0 = 1$. Donc $1 \leq u_n < 3$.

37 1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ donc (u_n) est croissante.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

3. $0 \leq u_n < 1$.

38 1. $2 \leq u_n \leq 4$. 2. $-3 \leq u_n \leq -1$. 3. $-4 \leq u_n \leq 4$.

39 Voir livre page 420.

40 2. Initialisation : $u_0 = 2 \leq 9$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \leq 9$.

Alors $\frac{2}{3}u_p \leq 6$ et ainsi $u_{p+1} \leq 9$.

3. a. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(9 - u_n) \geq 0$.

b. (u_n) est croissante.

4. (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

41 2. Initialisation : $u_0 = -1 \geq -4$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geq -4$.

Alors $\frac{1}{2}u_p \geq -2$ et ainsi $u_{p+1} \geq -4$.

3. a. $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}(u_n + 4) \leq 0$.

b. (u_n) est décroissante.

4. (u_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

POUR S'ENTRAÎNER

42 Initialisation : $\frac{0}{0+1} = 0 = t_0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $t_p = \frac{p}{p+1}$.

Alors $t_{p+1} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)}$

soit $t_{p+1} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}$.

43 2. a. On peut conjecturer que $u_n = n^2$.

b. Initialisation : $1^2 = 1 = u_1$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p = p^2$.

Alors $u_{p+1} = p^2 + 2p + 1$, soit $u_{p+1} = (p+1)^2$.

44 2. On peut conjecturer que $u_n = 2$.

3. Initialisation : $2 = u_0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p = 2$.

Alors $u_{p+1} = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{2}$ soit $u_{p+1} = 2$.

45 1. Initialisation : $u_1 - u_0 = 5 - 8 = -3 \leq 0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$u_{p+1} - u_p \leq 0.$$

Alors $u_{p+2} - u_{p+1} = \left(\frac{1}{4} \times u_{p+1} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} \times u_p + 3\right)$

$$u_{p+2} - u_{p+1} = \frac{1}{4}(u_{p+1} - u_p) \leq 0.$$

2. (u_n) est donc décroissante.

46 Initialisation : $u_0 = \frac{1}{7}$ donc $0 < u_0 < 2$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $0 < u_p < 2$.

Alors en multipliant par $\frac{3}{4}$ et ajoutant $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$0 < u_{p+1} < 2.$$

47 1. a. $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2} \right)$. Sur $[2; 4]$, f est donc strictement

croissante et $f([2; 4]) = \left[2; \frac{5}{2}\right]$.

b. Ainsi, pour tout x de $[2; 4]$, $2 \leq f(x) \leq \frac{5}{2} \leq 4$.

2. Initialisation : $u_0 = 3$ donc $2 \leq u_0 \leq 4$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $2 \leq u_p \leq 4$.

Alors $2 \leq f(u_p) \leq 4$ d'après 1. b.

Soit $2 \leq u_{p+1} \leq 4$.

48 Initialisation : $u_1 = \sqrt{5}$ et $u_0 = 2$ donc $u_1 \geq u_0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_{p+1} \geq u_p$.

Alors $2u_{p+1} + 1 \geq 2u_p + 1$.

D'où, en passant à la racine, $u_{p+2} \geq u_{p+1}$.

49 1. a. b. $f'(x) = \frac{6}{(x+1)^2} > 0$ donc f est strictement croissante

sur $[1; +\infty[$ et $f(1) = 1$ donc $f(x) \geq 1$.

2. Initialisation : $u_0 = 3$ donc $u_0 \geq 1$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geq 1$.

Alors $f(u_p) \geq 1$ d'après 1. b, soit $u_{p+1} \geq 1$.

3. Initialisation : $u_1 = \frac{5}{2}$ et $u_0 = 3$ donc $u_0 \geq u_1$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geq u_{p+1}$.

Alors $f(u_p) \geq f(u_{p+1})$ puisque f est croissante soit $u_{p+1} \geq u_{p+2}$.

Donc (u_n) est décroissante.

50 Initialisation : $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 = 1^2$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$\sum_{q=1}^p q^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

Alors $\sum_{q=1}^{p+1} q^2 = \sum_{q=1}^p q^2 + (p+1)^2$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2.$$

Ainsi $\sum_{q=1}^{p+1} q^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$.

51 Initialisation : $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 = 1^3$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$\sum_{k=1}^p k^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4}.$$

Alors $\sum_{k=1}^{p+1} k^3 = \sum_{k=1}^p k^3 + (p+1)^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3$.

Ainsi $\sum_{k=1}^{p+1} k^3 = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$.

53 FAUX : une fonction croissante peut générer une suite décroissante. $u_1 = \frac{17}{6}$ et $u_0 = 3$, ainsi $u_0 \geq u_1$.

54 1. On peut conjecturer que (v_n) converge vers 2.

2. Soit $l =]2 - a; 2 + a[$ avec $a > 0$:

$$2 - a < v_n < 2 + a \Leftrightarrow n > \frac{1}{a^2}.$$

55 1. À partir du rang 10.

2. Soit $l =]3 - a; 3 + a[$ avec $a > 0$:

$$3 - a < v_n < 3 + a \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

57 1. $u_n > 1\,000$ à partir du rang 502.

$u_n > 10^6$ à partir du rang 500 002.

2. $u_n > A \Leftrightarrow n > \frac{A+3}{2}$.

58 1. $u_n > 10^6$ à partir du rang $10^{12} + 1$.

2. $u_n > A \Leftrightarrow n > A^2$.

59 1. $u_n < -1\,000$ à partir du rang 201.

2. $u_n < A \Leftrightarrow n > \frac{2-A}{5}$.

60 1. **Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :**

01_TS_exercice60.alg (AlgoBox).

L'algorithme sert à déterminer à partir de quel rang 3^n dépasse un réel M donné.

2. Avec $M = 20$: $n = 3$, avec $M = 100$: $n = 5$, avec $M = 10^6$: $n = 13$.

3. Conjecture : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$.

61 1.

```
Saisir r
n prend la valeur 0
u prend la valeur 1
Tant que u > 3 + r ou u < 3 - r
|   n prend la valeur n + 1
|   u prend la valeur (3n+1)/(n+1)
Fin Tant que
Afficher n
```

2. **Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 01_TS_exercice61.alg (AlgoBox).**

Pour $r = 0,1$: $n = 19$; pour $r = 10^{-6}$: $n = 2 \times 10^6$.

62 À partir d'un certain rang, tous les termes seront dans un intervalle de centre 1 et de rayon 0,5.

63 Voir livre page 420.

64 FAUX, par exemple $u_n = n + (-1)^n$.

65 FAUX : elle peut ne pas avoir de limite, par exemple : $u_n = (-1)^n$.

66 VRAI d'après la définition de la convergence d'une suite.

67 1. $-\infty$ 2. 0 3. $+\infty$ 4. 4

68 1. $u_n = \frac{3}{n} + n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. $u_n = 2n(n-2)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

69 1. $-\infty$ 2. $-\infty$ 3. 0 4. $-\frac{2}{3}$ 5. $+\infty$ 6. $-\infty$

70 Voir livre page 420.

71 1. $u_n \geq n - 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. $\frac{n-1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. $u_n \geq \frac{n}{3}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. $u_n \leq -n^2 + 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

72 Voir livre page 420.

73 1. $+\infty$ 2. $+\infty$ 3. $+\infty$ 4. Diverge sans limite.

74 1. $-\infty$ 2. 0 3. $+\infty$ 4. 2 5. $+\infty$ 6. $+\infty$

75 a. $-0,5^n \leq u_n \leq 0,5^n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b. $u_n \geq 3^n - 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

c. $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

77 **Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 01_TS_exercice77.alg (AlgoBox).**

1. a. Le nombre de personnes touchées par la rumeur dans l'intervalle $[n; n+1]$ est proportionnel à u_n donc il existe un réel a tel que le nombre de personnes touchées par la rumeur dans l'intervalle $[n; n+1]$ soit égal à au_n .

D'où $u_{n+1} = u_n + au_n = (1+a)u_n$.

b. (u_n) est une suite géométrique de raison $1+a$.

c. $u_0 = 100$ et $u_1 = 350$, d'où $1+a = 3,5$ soit $a = 2,5$.

d. $u_n = u_0 \times (1+a)^n = 100 \times 3,5^n$.

2. a. (u_n) est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b. $u_n \geq 10\,000$ à partir de $n = 4$ heures.

$u_n \geq 16\,000$ à partir de $n = 5$ heures.

$u_n \geq 20\,000$ à partir de $n = 5$ heures.

78 1. NON : $u_n = n$ et $v_n = -n$.

2. NON : $u_n = (-1)^n = v_n$.

3. NON : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = (-1)^n$.

4. VRAI : par l'absurde, si (w_n) converge alors $(w_n - u_n)$ soit (v_n) converge.

79 1. FAUX : $u_n = -n$.

2. VRAI : théorème de comparaisons.

80 1. FAUX : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. VRAI : théorème des gendarmes.

3. FAUX : quand la raison est égale à 0.

81 $u_n - 2 = (n-1)^2 \geq 0$ donc $u_n \geq 2$.

82 $v_n - 5 = \frac{-5}{n+1} \leq 0$ donc $v_n \leq 5$.

83 Par récurrence, initialisation : $u_0 = 4$ donc $-3 \leq u_0 \leq 4$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$-3 \leq u_p \leq 4.$$

Alors $-1 \leq \frac{1}{3} u_p \leq \frac{4}{3}$ et ainsi $-3 \leq u_{p+1} \leq -\frac{2}{3}$ soit $-3 \leq u_{p+1} \leq 4$.

84 Voir livre page 420.

85 1. NON : $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 1$.

2. NON : même contre-exemple qu'au 1.

3. OUI car $v_n \leq M$ donc $u_n \leq M$.

4. OUI car $v_n \leq v_0$ donc $u_n \leq v_0$.

86 1. $v_n - u_n = \frac{1}{n} \geq 0$, donc $v_n \geq u_n$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$, donc (u_n) est croissante.

3. $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0$, donc (v_n) est décroissante.

4. $u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$ avec $u_1 = 1$ et $v_1 = 2$.

87 1. $u_1 = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$;

$$u_3 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{3}{4}.$$

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0$, donc (u_n) est croissante.

$$3. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Donc $u_n < 1$.

88 FAUX : $u_n = (-1)^n$ est bornée mais diverge.

89 VRAI : une suite croissante convergente est majorée par sa limite.

90 FAUX : $u_n = (-2)^n$.

91 1. Par récurrence : $u_n \leq 6$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(6 - u_n) \geq 0$, donc (u_n) est croissante.

3. (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

92 1. a. La fonction f étant croissante sur $]-\infty; 6[$

$(f'(x) = \frac{9}{(6-x)^2} > 0)$, si $x < 3$ alors $f(x) < f(3)$ soit :

$$\frac{9}{6-x} < 3.$$

b. Par récurrence, on montre que $u_n < 3$.

c. Grâce au sens de variation de f , on démontre par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$.

d. (u_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.

$$2. a. v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{6-u_n}{3u_n-9} - \frac{1}{u_n-3}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3-u_n}{3u_n-9} = -\frac{1}{3}.$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

$$b. v_n = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n \text{ et } u_n = \frac{6n-3}{2n+1}.$$

$$c. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3.$$

94 1. On a 80 % de réabonnement $(0,8a_n)$ augmenté de 4 000 abonnés (+4 000), donc $a_{n+1} = 0,8a_n + 4 000$.

2. Par récurrence, on montre que $a_n \leq 20 000$.

3. $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}(20 000 - a_n) \geq 0$ donc (a_n) est croissante.

4. a. $u_{n+1} = 0,8u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8 avec $u_0 = 13 000$.

b. $u_n = 13 000 \times 0,8^n$ et $a_n = 20 000 - 13 000 \times 0,8^n$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 20 000$. Le nombre d'abonnés tend vers 20 000.

5. a. Fichier associé sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 01_TS_exercice94.alg (AlgoBox).



b. $a_n > 16 000$ à partir de $n = 6$.

95 1. FAUX : une suite croissante non majorée diverge.

2. FAUX : une suite décroissante minorée vers 0 converge vers un réel $L \geq 0$.

3. VRAI : par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

96 Initialisation : $u_4 = 26$ et $2^4 = 16$ donc $u_4 \geq 2^4$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geq 2^p$.

Alors $u_{p+1} \geq 2^{2p} > 2^{p+1}$ (car $2p > p+1$).

D'où $u_{p+1} = u_p^2 + 1 > u_p^2 > 2^{p+1}$.

97 $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 2 = -2v_n$. Donc (v_n) est une suite géométrique de raison -2 .

On en déduit que $v_n = 4 \times (-2)^n$ et $u_n = 1 + 4 \times (-2)^n$.

La suite (u_n) diverge sans limite.

98 Par récurrence, on montre que $0 \leq u_n \leq 3$ puis que :

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

(u_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 420 et le site www.bordas-index.fr pour les corrigés détaillés.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

111 Initialisation : $2 \times 5^0 + 1 = 3 = u_0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$u_p = 2 \times 5^p + 1.$$

Alors $5u_p = 2 \times 5^{p+1} + 5$ et ainsi $u_{p+1} = 2 \times 5^{p+1} + 1$.

112 Initialisation : $u_1 = 0$ et $0 \leq 4$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \leq 4$.

Alors $3u_p + 4 \leq 16$ et ainsi $u_{p+1} \leq 4$.

113 a. $-\infty$ b. $+\infty$ c. 0 d. $+\infty$

► Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

► Avec deux racines : $\sqrt{1} + \sqrt{1} = \sqrt{2} \approx 1,414$.

Avec trois racines : $\sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{1} = \sqrt{1} + \sqrt{2} \approx 1,553$.

► Après l'élévation au carré (avec la condition $x > 0$), l'équation $x = \sqrt{1+x}$ devient $x^2 - x - 1 = 0$ et sa solution positive est :

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

► Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{3}$. On a bien $\Phi \leq u_1 \leq u_0 \leq 2$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$\Phi \leq u_{p+1} \leq u_p \leq 2.$$

Alors en passant à la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ (croissante), on obtient :

$$\Phi \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq \sqrt{3} \leq 2.$$

La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.

$$\text{► } u_{n+1} - \Phi = \sqrt{1+u_n} - \Phi = \frac{1+u_n - \Phi^2}{\sqrt{1+u_n} + \Phi}$$

$$= \frac{u_n - \Phi}{\sqrt{1+u_n} + \Phi} \leq \frac{1}{3}(u_n - \Phi)$$

car $\sqrt{1+u_n} + \Phi = u_{n+1} + \Phi \geq 2\Phi$ et $2\Phi = 1 + \sqrt{5} \geq 3$.

► Par récurrence, on montre que $0 \leq u_n - \Phi \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

► D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \Phi = 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \Phi.$$

► $\Phi \approx 1,618033989$.

114 1. $f'(x) = \frac{x^2 - a}{2x^2}$.

x	0	\sqrt{a}	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f		$\swarrow \quad \searrow$ \sqrt{a}	

2. $f(x) - x = \frac{a - x^2}{2x}$.

x	0	\sqrt{a}	$+\infty$
$f(x) - x$		+ 0 -	

3. Initialisation : $u_1 = f(u_0)$ et $u_0 > \sqrt{a}$.

Donc $f(u_0) - u_0 < 0$ d'où $u_1 < u_0$.

De plus $f(u_0) > f(\sqrt{a})$ (f est croissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$), donc :
 $u_1 > \sqrt{a}$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$\sqrt{a} < u_{p+1} < u_p.$$

Alors $f(\sqrt{a}) < f(u_{p+1}) < f(u_p)$ soit $\sqrt{a} < u_{p+2} < u_{p+1}$.

La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente, soit L sa limite.

L vérifie $f(L) = L$ d'où $L = \sqrt{a}$.

4. Avec $u_0 = 2$, $\sqrt{3} \approx 1,732050807569$.

Avec $u_0 = 3$, $\sqrt{5} \approx 2,2360679775$.

115 1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc (u_n) est croissante.

2. $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2(k-1)} > 0$.

En faisant varier k de 2 à n et par addition : $u_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1$ d'où $u_n \leq 2$.

3. La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.

4. $u_n \approx 3,1415917429$.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Suites imbriquées

L'objectif de ce TP est de découvrir deux suites qui convergent vers le même réel.

Fichiers associés sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

01_TS_TP1.alg (AlgoBox), 01_TS_TP1.ods (OpenOffice),
01_TS_TP1.xls (Excel 2003)
et 01_TS_TP1.xlsx (Excel 2007).

A. Étude d'un algorithme et programmation

1. Pour $N = 1$, $P = 1$; pour $N = 2$, $P = 1 \times 2 = 2$; pour $N = 3$,
 $P = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

4. $P = N! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times N$.

B. 1. On entre en B2 la formule $=1/FACT(0)+1/FACT(A2)$.

On entre en C2 la formule $=B2+1/(A2*FACT(A2))$.

On entre en D2 la formule $=C2-B2$.

On entre en B3 la formule $=B2+1/FACT(A3)$.

On entre en C3 la formule $=B3+1/(A3*FACT(A3))$.

On entre en D3 la formule $=C3-B3$.

On recopie vers le bas jusqu'à la ligne 21.

2. On sélectionne les quatre colonnes A, B, C et D ; puis dans le menu Insertion, choisir Nuage de points.

B. Étude de trois suites à l'aide d'un tableur

3. On peut conjecturer que :

a. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;

b. (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ;

c. (e_n) converge vers 0.

C. Étude mathématique

1. $u_n - v_n = -\frac{1}{n \times n!} < 0$.

2. $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

3. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} = \frac{-n^2 - n + 1}{(n+1)(n+1)!} < 0.$$

Donc (v_n) est décroissante.

4. a. b. $u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$.

5. On applique le théorème de convergence des suites monotones.

6. a. $n! \geq 1$ donc $n \times n! \geq n$.

b. Par passage à l'inverse, $\frac{1}{n \times n!} \leq \frac{1}{n}$ d'où $0 \leq e_n \leq \frac{1}{n}$ donc :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = 0$.

7. Si l'on pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L'$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = L' - L = 0 \text{ donc } L = L'.$$

$$2,71828182 < L < 2,71858483.$$

TP 2 Méthode des isopérimètres

Dans ce TP, les élèves vont découvrir une méthode historique permettant de déterminer une valeur approchée de π à l'aide d'une suite de polygones.

Fichiers associés sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 01_TS_TP2A.ggb (GeoGebra) et 01_TS_TP2C.alg (AlgoBox).

Correctif : Dans l'algorithme de la partie C, il faut lire à la dernière ligne « Afficher $\frac{1}{r}, \frac{1}{h}, n$ » et non pas « Afficher $\frac{1}{r}, \frac{1}{n}, n$ ».

A. Tracé des polygones et des cercles

1. À l'aide de la commande Nouveau point (outil Points), placer A_0 puis tracer un segment de longueur 0,5 avec la commande Segment créé par un point et une longueur (outil Lignes).

Renommer B_0 la deuxième extrémité du segment. Construire le carré $A_0B_0C_0D_0$ en utilisant la commande Polygone régulier (outil Polygones), penser à renommer les points. Placer O , le centre du carré $A_0B_0C_0D_0$, avec la commande Milieu ou centre (commande Points). Tracer ensuite le cercle circonscrit avec la commande Cercle(centre-point) (outil Cercles).

2. a. Placer le milieu M_0 de $[A_0B_0]$ avec la commande Milieu ou centre (commande Points). Puis tracer la demi-droite $[OM_0]$ avec la commande Demi-droite passant par deux points (outil Lignes).

Placer le point I_0 avec la commande Intersection entre deux objets (outil Points).

b. Pour placer des milieux de segment, utiliser la commande

Milieu ou centre (commande Points).

c. Pour construire le polygone régulier à huit côtés P_1 , utiliser la commande Polygone régulier (outil Polygones), sélectionner A_1 puis B_1 et ensuite indiquer 8 comme nombre de côtés.

3. Répéter les démarches de constructions des questions précédentes.

4. Faire apparaître les longueurs des côtés des polygones P_0 , P_1 et P_2 en utilisant la commande Distance ou longueur (outil Mesures), puis effectuer le calcul des périmètres de ces trois polygones réguliers.

5. Les cercle inscrits sont tracés avec la commande Cercle(centre-point) (outil Cercles) : O étant le centre et M_n un point avec n prenant les valeurs 0, 1 et 2.

6. Faire apparaître les longueurs OA_n et OM_n rayons respectifs des cercles circonscrit et inscrit à P_n avec la commande Distance ou longueur (outil Mesures). Conjectures : les suites (h_n) et (r_n) sont deux suites convergentes vers la même limite.

B. Détermination de relations de récurrence

1. $h_0 = \frac{1}{4}$ (demi-côté) et $r_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (théorème de Pythagore).

2. a. On applique le théorème de la droite des milieux dans le triangle IAB.

b. Par le théorème de Thalès, K est le milieu de [IJ].

c. r_{n+1} est le rayon du cercle circonscrit à P_{n+1} donc $r_{n+1} = OK$ et h_{n+1} est le rayon du cercle inscrit à P_{n+1} donc $h_{n+1} = OK$.

3. $OI + OJ = (OK + KI) + (OK - KJ) = 2 OK$ car $KI = KJ$ (K milieu de [IJ]). D'où $2h_{n+1} = r_n + h_n$.

4. $\vec{OC}^2 = \vec{OC} \cdot (\vec{OI} + \vec{IC}) = \vec{OC} \cdot \vec{OI} = (\vec{OK} + \vec{KI}) \cdot \vec{OI} = \vec{OK} \cdot \vec{OI}$, d'où $OC^2 = OK \times OI$ soit :

$$r_{n+1}^2 = h_{n+1} \times r_n = \left(\frac{r_n + h_n}{2} \right) \times r_n.$$

C. Encadrement de π

1. $2\pi h_n < 2 < 2\pi r_n$ d'où $\frac{1}{r_n} < \pi < \frac{1}{h_n}$.

2.

Saisir p
 n prend la valeur 0
 h prend la valeur $\frac{1}{4}$
 r prend la valeur $\frac{\sqrt{2}}{4}$
 Tant que $\frac{1}{h} - \frac{1}{r} > p$
 n prend la valeur $n + 1$
 h prend la valeur $\frac{r+h}{2}$
 r prend la valeur $\sqrt{h \times r}$
 Fin Tant que
 Afficher $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{h}$, n

3. Pour $p = 10^{-10}$, $\pi \approx 3,1415927$.

CAP VERS LE BAC

Sujet A

1. VRAI car $-1 \leq u_n \leq 1$.

2. FAUX : (u_n) n'a pas de limite.

3. VRAI : $\frac{-1}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{1}{n}$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. FAUX : prenons par exemple $v_n = 1 + \frac{1}{n}$, cette suite est décroissante à termes strictement positifs et converge vers 1.

Sujet B

Partie A

Voir cours p. 18.

Partie B

1. Initialisation : $1 + \frac{12}{5^0} = 13 = u_0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$u_p = 1 + \frac{12}{5^p}.$$

Alors $u_{p+1} = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{12}{5^p} \right) + \frac{4}{5}$ soit $u_{p+1} = 1 + \frac{12}{5^{p+1}}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12}{5^n} = 0.$$

2. a. $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$ donc (S_n) est croissante.

$$b. S_n = (n+1) + 12 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = n+1 + 15 \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \right).$$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Partie C

1. FAUX : contre-exemple $x_n = u_n$.

2. FAUX : contre-exemple $x_n = u_n$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{-48}{5^{n+1}} < 0$, donc (u_n) est décroissante.

Or (S_n) est croissante.

Sujet C

Partie A

Voir cours p. 18.

Partie B

1. $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$. Donc (u_n) est croissante.

2. a. Par récurrence, initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0^2$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p > p^2$.

Alors $u_{p+1} > p^2 + 2p + 3$. Or $p^2 + 2p + 3 = (p+1)^2 + 2$.

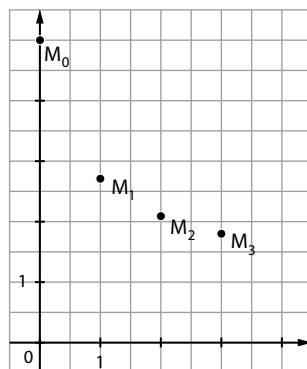
Donc $u_{p+1} > (p+1)^2$.

b. Par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. Le calcul des premiers termes permet de conjecturer que $u_n = (n+1)^2$, ce qui se démontre par récurrence.

Sujet D

1. a.



b. Conjectures : la suite (u_n) semble être décroissante et converger vers 1.

2. a. Initialisation : $u_0 = 5 > 1$ donc $u_0 - 1 > 0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p - 1 > 0$. Alors la fonction f étant croissante sur $]-2; +\infty[$ $\left[f'(x) = \frac{9}{(x+2)^2} \right]$, $f(u_p) > f(1)$ soit $u_{p+1} > 1$ donc $u_{p+1} - 1 > 0$.

b. De même, grâce à f , on démontre par récurrence que $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 1, elle est convergente, soit L sa limite.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ donc L vérifie $\frac{4L-1}{L+2} = L$ ce qui donne $L^2 - 2L + 1 = 0$, soit $(L-1)^2 = 0$ soit $L = 1$.

3. a. $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{3}$.

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

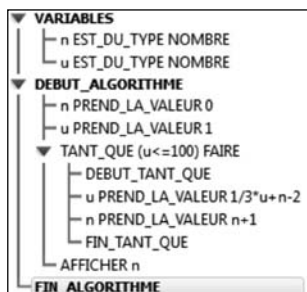
b. $v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}n$ et $u_n = 1 + \frac{1}{v_n} = \frac{4n+15}{4n+3}$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{15}{4n}}{1 + \frac{3}{4n}} = 1$.

Sujet E

1. $u_1 = -\frac{5}{3}$; $u_2 = -\frac{14}{9}$; $u_3 = -\frac{14}{27}$.

2. Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 01_TS_sujetE.alg (AlgoBox).



$u_n > 100$ pour $n \geq 71$.

3. a. Initialisation : $u_4 = \frac{67}{81} \geq 0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $p \geq 4$ tel que $u_p \geq 0$.

Alors : $\frac{1}{3}u_p \geq 0$ et $p-2 \geq 0$ donc par somme $u_{p+1} \geq 0$.

b. Pour $p \geq 4$, on vient de voir que $u_{p+1} \geq p-2$ car $u_p \geq 0$.

En posant $p = n-1$, on en déduit que, pour $n \geq 5$, $u_n \geq n-3$.

c. Par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. a. $v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2}$
 $= -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right)$

Donc $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$. D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{25}{2}$.

b. On en déduit que $v_n = -\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ puis :

$$u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4} = -\frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}.$$

5. a. $S_n = \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

b. $T_n = \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{4}(n+1)(n-7)$.

116 1. Initialisation : $u_0 = 0 \leq 3$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \leq 3$.

Alors $u_p + 6 \leq 9$ et $\sqrt{u_p + 6} \leq 3$ ce qui s'écrit $u_{p+1} \leq 3$.

2. On démontre par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.

117 $\frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{4}{n}$ donc (u_n) converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

La suite (v_n) diverge sans limite.

$\frac{-4}{\sqrt{n}} \leq w_n \leq \frac{4}{\sqrt{n}}$ donc (w_n) converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

118 1. $u_1 = -6$; $u_2 = -3$.

2. Initialisation : $\frac{27}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^0 - \frac{15}{4} = \frac{27}{4} - \frac{15}{4} = 3 = u_0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$u_p = \frac{27}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^p - \frac{15}{4}.$$

Alors : $u_{p+1} = -\frac{1}{3} \left(\frac{27}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^p - \frac{15}{4} \right) - 5 = \frac{27}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{p+1} - \frac{15}{4}$.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{15}{4}$.

D'où (u_n) converge.

POUR ALLER PLUS LOIN

119 Si on note u_n le nombre de poignées de mains serrées par la n -ième personne, alors $u_{n+1} = u_n + n$ (car la $(n+1)$ -ième personne échangera n poignées de mains supplémentaires).

À partir de là, on démontre par récurrence que $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

120 1. En rajoutant un sommet A_{n+1} , on ajoute $(n-1)$ diagonales.

2. Si on note d_n le nombre de diagonales, on obtient :

$$d_{n+1} = d_n + (n-1).$$

À partir de là, on démontre par récurrence $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

3. De chaque sommet partent $(n-3)$ diagonales (il faut éliminer le sommet ainsi que les deux sommets adjacents). Il y a n sommets mais il faut diviser le produit $n(n-3)$ par 2 car chaque diagonale est comptée deux fois.

121 *Correctif : x est un réel non nul et n est un entier naturel non nul.*

1. Hérédité : supposons qu'il existe un entier k tel que :

$$x^k - 1 = (x-1) \sum_{p=0}^{k-1} x^p.$$

$$x^{k+1} - 1 = x(x^k - 1) + x - 1 = x(x-1) \sum_{p=0}^{k-1} x^p + x - 1.$$

$$= (x-1) \sum_{p=0}^{k-1} x^{p+1} + x - 1$$

$$= (x-1) \sum_{p=1}^k x^p + x - 1 = (x-1) \sum_{p=0}^k x^p.$$

2. On obtient directement le résultat avec la formule :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

122 1. OUI : par récurrence.

2. OUI : par récurrence, si $u_p \geq 1$ alors $f(u_p) \geq f(1)$ avec $f(x) = \sqrt{3x-2}$ (f croissante sur $]1; +\infty[$). D'où $u_{p+1} \geq 1$.

3. NON.

4. OUI : car (u_n) étant croissante et majorée par 2, elle converge et sa limite L vérifie $L = f(L)$ soit $L = 2$.

5. OUI : car (u_n) étant décroissante et minorée, elle converge et sa limite L vérifie $L = f(L)$ soit $L = 2$.

123 $u_n = q^n$ et $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$.

1. VRAI : on raisonne par l'absurde, si $q \leq 1$ alors $u_n \leq 1$.

2. VRAI : si $q < 1$ alors (u_n) converge vers 0 donc $u_n < \frac{1}{2}$ pour n suffisamment grand.

3. VRAI : si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

De plus $S_n \geq u_n$ donc par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

4. VRAI : si (S_n) converge, c'est nécessairement que $0 < q < 1$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$. On en déduit que $\frac{1}{1-q} = 2$ soit $q = \frac{1}{2}$.

5. FAUX : si $q = 2$ alors $S_4 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$.

124 $f'(x) = 1 - x^2$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-$
f					

1. D'après les variations de f , si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.


Initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 \in [0; 1]$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \in [0; 1]$. Alors $f(u_p) \in [0; 1]$ soit $u_{p+1} \in [0; 1]$.

2. $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}(u_n)^3 \leq 0$ donc (u_n) est une suite décroissante.

3. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente. Sa limite L vérifie $L = L - \frac{1}{3}L^3$ d'où $L = 0$.

125 **1. $f'(x) = \frac{x^2-9}{2x^2}$.**

x	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
f				

2. Initialisation : $u_0 = 4$ donc $u_0 \geq 3$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geq 3$.

Alors $f(u_p) \geq f(3)$ soit $u_{p+1} \geq 3$.

3. Initialisation : $u_0 = 4$ et $u_1 = \frac{25}{8}$ donc $u_1 \leq u_0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \leq u_p$.

Alors $f(u_p) \leq f(u_p)$ soit $u_{p+1} \leq u_p$.

Donc (u_n) est une suite décroissante.

4. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente. Sa limite L vérifie $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{9}{L}\right)$.

D'où $L^2 = 9$. La valeur $L = -3$ est impossible car $u_n \geq 3$, d'où $L = 3$.

126 Soit L la limite de (u_n) . On choisit un intervalle de centre L , par exemple $]L-1; L+1[$. Seul un nombre fini de termes de la suite sont en dehors de cet intervalle, donc (u_n) est bornée.

127 **1. a.** $w_{n+1} = \frac{u_n + v_n \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} - \frac{u_n + v_n}{2}$
 $= \frac{(2\sqrt{2}-3)(u_n - v_n)}{2} = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)w_n$.

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison :

$$q = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \approx 0,086.$$

b. $-1 < q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

2. On a $w_n = (\sqrt{2}-1)\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^n > 0$ donc $u_n \leq v_n$.

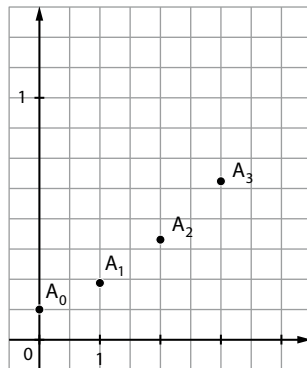
3. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}w_n > 0$ donc (u_n) est une suite croissante.

$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}w_n < 0$ donc (v_n) est une suite décroissante.

4. $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. Grâce au théorème de convergence des suites monotones bornées, (u_n) et (v_n) convergent ; leurs limites sont égales car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

128 **1. a.** $u_1 = \frac{15}{64}$; $u_2 = \frac{1695}{4096}$.

b.



2. a. Soit $f(x) = x(2-x)$.

On a $f'(x) = 2(1-x)$.

f est croissante sur $[0; 1]$ et pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{8}$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $0 \leq u_p \leq 1$.

Alors $0 \leq f(u_p) \leq 1$ soit $0 \leq u_{p+1} \leq 1$.

b. $u_{n+1} - u_n = u_n(1 - u_n) \geq 0$ car $0 \leq u_n \leq 1$.

Donc (u_n) est une suite croissante.

c. (u_n) étant une suite croissante et majorée, elle est convergente.

3. a. $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - 2u_n + u_n^2 = (1 - u_n)^2 = v_n^2$.

b. On en déduit par récurrence que $v_n = v_0^{2^n} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

129 **1. a.** $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = 0,96$.

b. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0,96$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,96.

c. $u_n = u_0 \times 0,96^n$.

2. $u_0 \times 0,96^n \leq 0,60 \times u_0$ soit $0,96^n \leq 0,60$ soit $n \geq 13$.

Il faut au moins 13 lames.

130 **1. (u_n) est une suite géométrique de raison 0,917** et a pour limite 0.

2. a. Puisque la suite a pour limite 0 et est à termes positifs, à partir d'un certain rang, tous les termes u_n seront dans l'intervalle $]0; \frac{1}{2}u_0[$.

b. On résout $u_0 \times 0,917^n = \frac{1}{2}u_0 : n = 8$.

131 1. a. $u_2 = 105 + 20 = 125$.

b. u_n est le montant en € versé à Marc le n -ième jour. Chaque jour, on lui offre 5 % de plus que la veille, donc le $(n+1)$ -ième jour, Marc se voit offrir $1,05u_n$ € auxquels s'ajoutent 20 €. D'où $u_{n+1} = 1,05u_n + 20$.

2. a. $v_1 = u_1 + 400 = 500$.

b. $v_{n+1} = 1,05v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

c. $v_n = 500 \times 1,05^{n-1}$

et $u_n = v_n - 400 = 500 \times 1,05^{n-1} - 400$.

d. $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 10\,000(1,05^n - 1)$.

3. Soit S_n la somme gagnée au bout de n jours.

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10\,000(1,05^n - 1) - 400n$.

Avec la calculatrice :

n	$S_n \approx$
21	9459,6
22	10453

Au bout de 22 jours, Marc aura gagné 10 000 €.

132 1. Initialisation : $\frac{1}{1!} = 1$ et $\frac{1}{2^{1-1}} = 1$ donc $\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^{1-1}}$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $\frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p-1}}$.

Multiplications par $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{2}$, on a alors $\frac{1}{(p+1)!} \leq \frac{1}{2^p}$.

2. Par addition de ces inégalités, on obtient :

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Soit $u_n \leq 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2$.

La suite (u_n) est majorée par 2.

Elle est croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.

D'où (u_n) converge.

133 1. a. $v_n = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

b. D'après le calcul de $v_n : v_n > \frac{1}{2}$.

c. $v_n < \frac{3}{4}$ pour $n^2 - 4n - 2 > 0$ soit $n \geq 5$.

d. Pour $n \geq N$, $v_n < \frac{3}{4}$ soit $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$ donc $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.

2. a. Initialisation : $u_5 \leq u_5\left(\frac{3}{4}\right)^{5-5}$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$u_p \leq u_5\left(\frac{3}{4}\right)^{p-5}.$$

Alors en multipliant par $\frac{3}{4}$, on obtient $\frac{3}{4}u_p \leq u_5\left(\frac{3}{4}\right)^{p-4}$.

Or $u_{p+1} < \frac{3}{4}u_p$, d'où $u_{p+1} \leq u_5\left(\frac{3}{4}\right)^{p-4}$.

b. On additionne les différentes inégalités précédentes.

c. $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} = 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right) \leq 4$.

D'où en multipliant par $u_5 : S_n \leq 4u_5$.

3. $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$ donc (S_n) est croissante. Comme elle est majorée (par $4u_5$), elle converge.

134 1. Initialisation : $0 < 1,01 < 1,01^2$ donc $0 < u_0 < u_1$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$0 < u_p < u_{p+1}.$$

Alors $0 < u_p^2 < u_{p+1}^2$ soit : $0 < u_{p+1} < u_{p+2}$.

D'où (u_n) est une suite croissante.

2. La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

Soit L sa limite, L vérifie $L^2 = L$ soit $L = 0$ ou $L = 1$.

3. La suite (u_n) étant croissante, elle est minorée par son premier terme 1,01. Si la suite est majorée, elle converge et sa limite est soit 0 soit 1.

Or cette limite est supérieure à 1,01. D'où l'absurdité. Donc (u_n) n'est pas majorée. De plus, elle est croissante.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

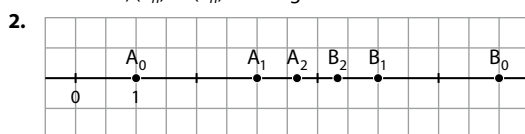
135 1. Fichiers associés sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

01_TS_exercice135.ods (OpenOffice),

01_TS_exercice135.xls (Excel 2003)

et 01_TS_exercice135.xlsx (Excel 2007).

1. On peut conjecturer que : (a_n) est croissante ; (b_n) est décroissante ; (a_n) et (b_n) convergent vers 4.



3. a. $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 6$.

b. $u_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

4. a. $u_n = b_n - a_n > 0$ donc $a_n < b_n$.

b. $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(b_n - a_n) > 0$. Donc (a_n) est une suite croissante.

$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(a_n - b_n) < 0$. Donc (b_n) est une suite décroissante.

5. $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$.

(a_n) est une suite croissante et majorée, donc convergente.

(b_n) est une suite décroissante et minorée, donc convergente.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, les limites de (a_n) et (b_n) sont égales ; soit

L la limite commune.

6. a. $v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n + a_n + 2b_n)$.

D'où $v_{n+1} = v_n$ donc (v_n) est une suite constante.

b. $v_n = v_0 = 8$ d'où $\frac{a_n + b_n}{2} = 4$: le milieu de $[A_n, B_n]$ est donc le point I d'abscisse 4.

c. $a_n + b_n = 8$ d'où par passage à la limite $L + L = 8$ d'où $L = 4$.

136 1. a. Si (u_n) converge, sa limite L vérifie :

$$L = \frac{1}{3}L + \frac{23}{27}, \text{ soit } L = \frac{23}{18}.$$

b. On démontre l'inégalité par récurrence.

c. $u_{n+1} = u_n - \frac{2}{3}\left(u_n - \frac{23}{18}\right) < 0$.

Donc (u_n) est une suite décroissante.

La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle converge et sa limite est donc $\frac{23}{18}$ d'après 1. a.

$$2. a. \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{100} \times \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

$$b. v_n = 1,2 + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \dots + \frac{7}{10^{n+1}} \\ = 1,2 + \frac{7}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1,2 + \frac{7}{90} = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{23}{18}$$

Prises d'initiatives

$$137. u_n = 35 \times 10^{-2} + 35 \times 10^{-4} + \dots + 35 \times 10^{-2n} \\ = 35 \times 10^{-2} \times \frac{1 - (10^{-2})^n}{1 - 10^{-2}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{35 \times 10^{-2}}{1 - 10^{-2}} = \frac{35}{100 - 1} = \frac{35}{99}.$$

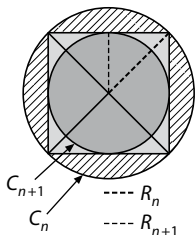
138. Si on note u_n la quantité de substance dans le corps au bout de $2n$ heures, on a $u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + x$.

La suite (u_n) est croissante et converge vers $\frac{4}{3}x$.

On doit avoir $\frac{4}{3}x \leq 800$ soit $x \leq 600$.

139. Soit (C_n) la suite des cercles et (R_n) la suite des rayons :

$$\begin{cases} R_1 = R \\ R_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} R_n \end{cases}$$



L'aire du domaine hachuré vaut $\pi R_n^2 - R_{n+1}^2$, soit $\left(\pi - \frac{1}{2}\right) R_n^2$.
Donc l'aire du domaine hachuré est égale à :

$$\left(\pi - \frac{1}{2}\right) R^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

D'où l'aire totale des zones colorées vaut :

$$\left(\pi - \frac{1}{2}\right) R^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$\text{soit } (2\pi - 1) R^2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

L'aire totale a pour limite $(2\pi - 1) R^2$.

140 Étude de p_n

Notons p_n le périmètre du polygone P_n . Par construction, la suite (c_n) des longueurs des côtés est géométrique de raison $\frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = \frac{1}{3} c_n \end{cases}$$

$$\text{D'où } c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Le nombre de côtés est le terme d'une suite géométrique de raison 4 et de premier 3, il vaut donc $3 \times 4^{n-1}$.

$$p_n = 3 \times 4^{n-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

On a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$.

Étude de S_n

Notons S_n l'aire du polygone P_n .

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (aire d'un triangle équilatéral de côté 1).}$$

$$\text{Alors } S_2 = S_1 + \frac{3}{9} S_1; S_3 = S_1 + \frac{3}{9} S_1 + 3 \times \frac{4}{9^2} S_1, \text{ etc...}$$

$$S_n = S_1 + \frac{3}{9} S_1 + 3 \times \frac{4}{9^2} S_1 + 3 \times \frac{4^2}{9^3} S_1 + \dots + 3 \times \frac{4^{n-2}}{9^{n-1}} S_1 \\ = S_1 + \frac{3}{9} S_1 \left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \dots\right).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S_1 + \frac{3}{9} S_1 \times \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5} S_1 = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Limites de fonctions. Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini. Limite infinie d'une fonction en un point. Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. Limites et comparaison. Asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées.	<ul style="list-style-type: none"> • Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. • Déterminer des limites par minoration, majoration et encadrement. • Interpréter graphiquement les limites obtenues. 	Le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en Terminale. La composée de deux fonctions est rencontrée à cette occasion, mais sans théorie générale.
Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires	<ul style="list-style-type: none"> • Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone, pour résoudre un problème donné. 	On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle. On présente quelques exemples de fonctions non continues, en particulier issus de situations concrètes. Le théorème des valeurs intermédiaires est admis. On convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. Ce cas particulier est étendu au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues. ◇ Des activités algorithmiques sont réalisées dans le cadre de la recherche de solutions de l'équation $f(x) = k$.

B Notre point de vue

Les élèves ayant étudié les limites d'une suite numérique dans le chapitre précédent, nous commençons par définir les limites en l'infini d'une fonction (introduites dans l'activité 1). Nous nous appuyons sur une approche intuitive de cette notion avec l'observation de l'évolution des valeurs de $f(x)$ par lecture d'une courbe ou d'un tableau de valeurs, tout en faisant remarquer que cela peut être trompeur, et qu'il est donc nécessaire de s'appuyer sur des définitions ou sur l'utilisation de théorèmes. Nous définissons ensuite les limites infinies en un point (introduites dans l'activité 2) ainsi que les asymptotes parallèles aux axes. Nous avons jugé intéressant de compléter le cours par l'introduction des asymptotes obliques dans le cadre de l'approfondissement de l'accompagnement personnalisé.

Viennent ensuite les théorèmes généraux permettant de déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée de deux fonctions (introduite dans l'activité 3) puis les théorèmes permettant de déterminer une limite par comparaison. Les fonctions polynômes ne sont pas explicitement au programme.

Nous nous appuyons sur les fonctions du second degré, étudiées en classe de Seconde, pour introduire les fonctions polynômes et justifier la méthode de détermination de la limite en l'infini d'une telle fonction. De même, nous avons choisi d'indiquer la méthode de détermination de la limite en l'infini d'une fonction rationnelle (justifiée dans le savoir-faire 6).

Enfin, après avoir défini la continuité d'une fonction (introduite dans l'activité 4), nous citons le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire, et détaillons les méthodes d'encadrement de la solution d'une équation par dichotomie ou par balayage.

De nombreux exercices de tous niveaux viennent à la suite du cours. Nous avons veillé à proposer des exercices qui font intervenir la logique (proposition directe, réciproque ou contraposée, condition nécessaire et suffisante), ainsi que des activités algorithmiques, notamment dans le cadre de la recherche de solutions de l'équation $f(x) = k$ (par exemple dans le TP sur la méthode de Lagrange).

Les notions abordées dans le chapitre 2

1. Limites d'une fonction et asymptotes
2. Théorèmes généraux sur les limites
3. D'autres règles de calcul sur les limites
4. Théorèmes de comparaison et continuité
5. Théorème des valeurs intermédiaires

C Avant de commencer

Voir livre page 420 et le site www.bordas-index.fr pour les corrections détaillées.

D Activités

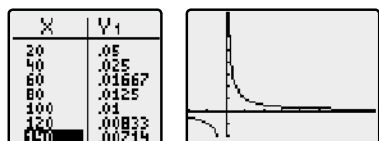
Activité 1 En route vers l'infini

Cette activité a pour objectif d'introduire les limites en l'infini d'une fonction. Les élèves ont déjà étudié la limite d'une suite, il s'agit ici à l'aide de la calculatrice, d'amener les élèves à faire des conjectures à partir d'un tableau de valeurs ou d'une courbe. En faisant remarquer dans la question 3 que cela peut être trompeur, on montre la nécessité d'utiliser des règles rigoureuses pour le calcul des limites d'une fonction.

1. $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Pour la fonction g :



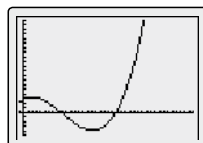
Pour la fonction h :



On conjecture que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

3. a. On conjecture que $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty$.

b.



On conjecture que $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$.

4. L'affirmation 1 permet de prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Activité 2 Un triangle animé

Cette activité a pour objectif d'introduire la limite infinie d'une fonction en un point, à partir d'une animation permettant de mettre en évidence trois aspects d'une même situation : géométrique, graphique et numérique.

Fichier associé sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 02_TS_activite2.ggb (GeoGebra).

1. Ouvrir le fichier 02_TS_activite2.ggb. Pour déplacer le point M, sélectionner le mode Déplacer, cliquer gauche sur le point et déplacer la souris en maintenant appuyé le clic gauche et en déplaçant légèrement « la main » au-dessous du point (pour éviter les « sauts » de M).

Lorsque le point M s'approche du point I, on observe que l'aire de HAP prend des valeurs de plus en plus grandes.

a. La courbe qui représente g est la courbe bleue.

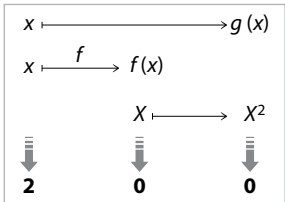
b. L'aire de HAP est supérieure à 10 pour :
 $1 < x \leq 1,1$.

2. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 1, l'aire du triangle HAP devient très grande.

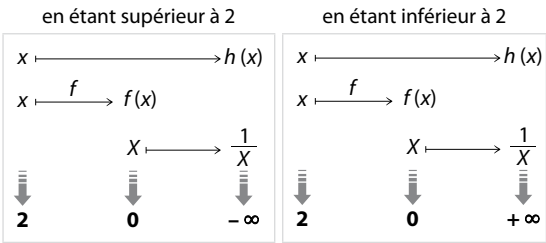
X	Y1
1.09	10
1.09	11.111
1.09	12.345
1.09	14.567
1.09	16.789
1.09	18.901
1.09	20
1.04	25
1.02	33.333
1.02	50
1.01	100
1	FERME

b. Ouvrir le fichier **02_TS_activite3-3.ggb**.

Quand x prend des valeurs très proches de 2 :



Quand x prend des valeurs très proches de 2 :



Activité 3 Enchaîner des fonctions

Cette activité a pour objectif d'introduire la notion de fonction composée et la méthode de détermination de la limite d'une telle fonction.

Fichiers associés sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

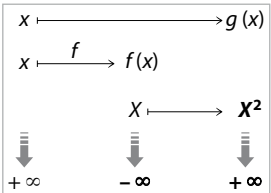
02_TS_activite3-1.ggb (pour les limites en $+\infty$),
02_TS_activite3-2.ggb (pour les limites en $-\infty$)
et **02_TS_activite3-3.ggb** (pour les limites en 2) (GeoGebra).

1. Ouvrir le fichier **02_TS_activite3-1.ggb**.

a. Sélectionner le mode **Déplacer**, cliquer gauche sur le point du curseur a et déplacer le curseur.

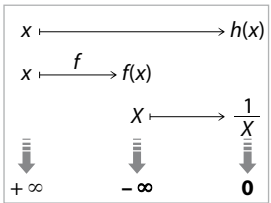
$$g(x) = (f(x))^2 = X^2.$$

b. et c.

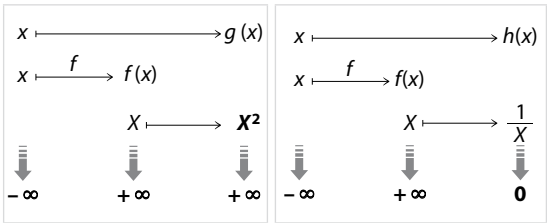


2. a. $h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{X}.$

b. et c.



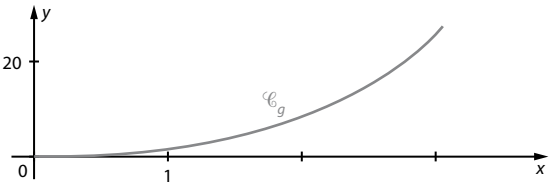
3. a. Ouvrir le fichier **02_TS_activite3-2.ggb**.



Activité 4 Un empilement de billes

Cette activité a pour objectif d'introduire la notion de fonction continue, à partir de l'exemple simple et concret d'un récipient que l'on remplit d'eau ou de billes.

1. Pour $0 < x < 3$, $g(x) = x^3$.



2. a. Lorsque $0 < x < 1$, on ne peut pas mettre de bille.

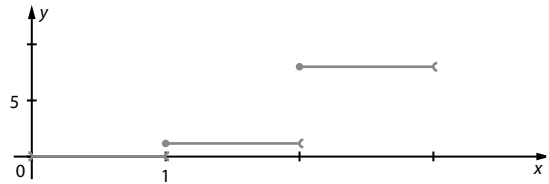
b. Lorsque $1 \leq x < 2$, on peut mettre une seule bille.

c. Lorsque $2 \leq x < 3$, on peut mettre 8 billes.

3. a. Si $0 < x < 1$, $f(x) = 0$.

Si $1 \leq x < 2$, $f(x) = 1$.

Si $2 \leq x < 3$, $f(x) = 8$.



b. La courbe représentative de f est tracée en levant le crayon : f n'est pas continue.

POUR DÉMARRER

- 1** Comme $x > 0$,
 $-4x^2 < -100$ équivaut à $x^2 > 25$ et donc à $x > 5$;
 $-4x^2 < -10\,000$ équivaut à $x^2 > 2\,500$ et donc à $x > 50$.

On conjecture que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- 2** Comme $x < 0$,
 $4x^2 > 100$ équivaut à $x^2 > 25$ et donc à $x < -5$;
 $4x^2 > 10\,000$ équivaut à $x^2 > 2\,500$ et donc à $x < -50$.
On conjecture que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

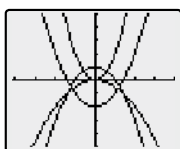
- 3** 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

- 2.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty.$$



- 4** \mathcal{C}_1 représente g , \mathcal{C}_2 représente h , \mathcal{C}_4 représente p et \mathcal{C}_3 représente k .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty.$$

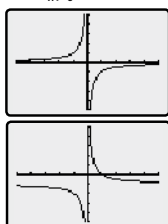
- 5** 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x > 0} \frac{1}{x} = +\infty$.

- 2.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x > 0} g(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x > 0} h(x) = +\infty.$$



- 6** 1. (d_1) a pour équation $x = -2$, (d_2) a pour équation $x = 1$ et (d_3) a pour équation $y = -1$.

- 2.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$; $\lim_{x < -2} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$; $\lim_{x > 1} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$; $\lim_{x > 1} f(x) = -\infty$.

3.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f	-1	$+\infty$	$+\infty$	-1

- 7** Dans les quatre cas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

Cas n° 1 : $f(x) + g(x) = 5$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = 5$.

Cas n° 2 : $f(x) + g(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = 0$.

Cas n° 3 : $f(x) + g(x) = x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

Cas n° 4 : $f(x) + g(x) = -x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty$.

Les limites de $f + g$ en $+\infty$ sont toutes différentes : on a illustré la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

- 8** Dans les quatre cas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Cas n° 1 : $f(x) \times g(x) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = 1$.

Cas n° 2 : $f(x) \times g(x) = \frac{1}{x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = 0$.

Cas n° 3 : $f(x) \times g(x) = x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty$.

Cas n° 4 : $f(x) \times g(x) = -x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty$.

Les limites de $f \times g$ en $+\infty$ sont toutes différentes : on a illustré la forme indéterminée « $\infty \times 0$ ».

9

Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3	Cas n° 4
$f(x) = x$	$f(x) = x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2$
$g(x) = x$	$g(x) = x^2$	$g(x) = x$	$g(x) = -x$

Dans les trois cas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

Cas n° 1 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Cas n° 2 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Cas n° 3 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. Cas n° 4 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

- 10** a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

- c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

- 11** a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

- c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

- 12** a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

- c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

- 13** a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

- c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

- 14** Voir livre page 420.

- 15** a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

- c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$. d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = +\infty$.

- 16** a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$.

- 17** a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

- c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.

18 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x-1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty$.

19 Voir livre page 421.

20 1. a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$. b. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$.

d. $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = +\infty$.

2. a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$.

d. $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = -\infty$.

21 1. Si $x < 3$, $3 - x > 0$ et si $x > 3$, $3 - x < 0$.

2. a. $\lim_{x \rightarrow 3} (3 - x) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow 3} (-2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 3} (3 - x) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{3 - x} = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = +\infty$.

3. a. $\lim_{x \rightarrow 3} (3 - x) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow 3} (-2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 3} (3 - x) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{3 - x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = -\infty$.

22 1. a. $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + x - 2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -\infty$.

2. a. $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + x - 2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty$.

23 $\lim_{x \rightarrow -1} \left(x + 1 + \frac{x-1}{x+1} \right) = +\infty$.

24 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^3 = +\infty$.

25 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 2} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^3 = 0$.

26 Voir livre page 421.

27 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{1}{x-3}} = +\infty$.

28 Pour tout réel $x > 1$, $x \leq f(x) \leq x^2$.

$x \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

29 Pour tout réel $x < -1$, $x^3 \leq g(x) \leq x$.

$g(x) \leq x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

30 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

31 Voir livre page 421.

32 1. $f'(x) = 5x^4$. Sur $[1; 2]$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.

2. f est continue et strictement croissante sur $[1; 2]$.

$f(1) = -4$ et $f(2) = 27$. Comme 0 est compris entre $f(1)$ et $f(2)$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[1; 2]$.

3. 0 est compris entre $f(1,3)$ et $f(1,4)$, donc $1,3 < \alpha < 1,4$.

33 1. $f'(x) = -3x^2$. Sur $[0; 2]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est strictement décroissante.

2. f est continue et strictement décroissante sur $[0; 2]$.

$f(0) = 3$ et $f(2) = -5$. Comme 1 est compris entre $f(0)$ et $f(2)$, l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution α dans $[0; 2]$.

3.

1.25	1.0469
1.26	.99962

$f(1,25) > 1$ et $f(1,26) < 1$, donc $1,25 < \alpha < 1,26$.

POUR S'ENTRAÎNER

34 Comme $x > 2$, on a $2 - x < 0$.

1. a. $\frac{1}{2-x} < -100$ donc $2 - x > -0,01$, d'où $2 < x < 2,01$.

b. $\frac{1}{2-x} < -10^3$ donc $2 - x > -0,001$, d'où $2 < x < 2,001$.

On conjecture que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$.

2. a. $-0,01 < \frac{1}{2-x} < 0$ donc $-100 > 2 - x$, d'où $x > 102$.

b. $-0,001 < \frac{1}{2-x} < 0$ donc $-10^3 > 2 - x$, d'où $x > 1\,002$.

On conjecture que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

35 On a $x > 0$.

1. a. $\frac{1}{x^2} > 100$ donc $x^2 < 0,01$, d'où $0 < x < 0,1$.

b. $\frac{1}{x^2} > 10\,000$ donc $x^2 < 0,0001$, d'où $0 < x < 0,01$.

2. a. $\frac{1}{x^2} < 0,01$ donc $x^2 > 100$, d'où $x > 10$.

b. $\frac{1}{x^2} < 0,0001$ donc $x^2 > 10\,000$, d'où $x > 100$.

3. Avec la question 1, on conjecture que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

Avec la question 2, on conjecture que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

36 1.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f	-2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	-2

2. On étudie le signe de $f(x) - (-2)$ et donc de $\frac{1}{x^2 - 1}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x) - (-2)$	+	-	+	

Si $x < -1$ ou $x > 1$, \mathbb{C} est strictement au-dessus de (d_3) .

Si $-1 < x < 1$, \mathbb{C} est strictement au-dessous de (d_3) .

37 (d₁) d'équation $x = -1$ est une asymptote à la courbe représentative de f donc la limite de f en -1 doit être infinie. Le tableau de variation est le deuxième.

On vérifie les autres limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, donc (d_2) et (d_3) d'équations respectives $y = 1$ et $y = 2$ sont bien des asymptotes à la courbe.

38 FAUX. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à \mathbb{C}_f .

39 VRAI. D'après la définition d'une asymptote verticale.

40 FAUX. Dans le savoir-faire 2 page 45, on a l'exemple d'une courbe qui coupe son asymptote horizontale.

41 VRAI. Comme $2 - f(x) > 0$, alors $f(x) < 2$: \mathbb{C}_f est strictement au-dessous de la droite d'équation $y = 2$.

42 1. FAUX. D'après le tableau, f est définie en -3 et sur $]-\infty; -1[$, $f(x) > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) > 0$.

2. VRAI car $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

3. VRAI car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

43 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty$.

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty$. f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = -\infty$.

44 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty$.

45 Voir livre page 421.

46 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$.

47 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^4) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^4) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty$.

48 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x} = 5$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 1$.

49 Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

02_TS_exercice49.alg (AlgoBox).

1.

Saisir a, b, c

Si a < 0

alors afficher « lim en - infini est - infini »

afficher « lim en + infini est - infini »

Sinon afficher « lim en - infini est + infini »

afficher « lim en + infini est + infini »

Fin Si

2. Voir fichier.

Tester l'algorithme puis Lancer Algorithme .

Avec $a = -2$, $b = 3$ et $c = -4$:

```
***Algorithme lancé***
lim en - infini est - infini
lim en + infini est - infini
***Algorithme terminé***
```

Avec $a = 3$, $b = -2$ et $c = 5$:

```
***Algorithme lancé***
lim en - infini est + infini
lim en + infini est + infini
***Algorithme terminé***
```

50

Saisir a, b, c et d

L prend la valeur $\frac{a}{c}$

afficher « lim en - infini est », L

afficher « lim en + infini est », L

51 VRAI, d'après le résultat du cours sur la limite en l'infini d'une fonction polynôme.

52 FAUX : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{2(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{-2x} = +\infty$.

53 1. a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$. b. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$.

d. $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = +\infty$.

2. a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$.

d. $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = -\infty$.

54 a. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty$.

55 1. a. $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$.

b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x-5) = -3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x-2) = 0^+$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x) = -\infty$.

c. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (3x-1) = 5$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (2-x) = 0^-$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} h(x) = -\infty$.

d. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (1-x^2) = -3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (2-x) = 0^-$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} k(x) = +\infty$.

2. a. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x+1) = 3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x-2) = 0^-$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$.

b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x-5) = -3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x-2) = 0^-$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} g(x) = +\infty$.

c. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (3x-1) = 5$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (2-x) = 0^+$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} h(x) = +\infty$.

d. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (1-x^2) = -3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (2-x) = 0^+$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} k(x) = -\infty$.

57 1.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$		+	0	-
			0	+

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x+1) = -1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x^2 + x - 2) = 0^+$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x+1) = -1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x^2 + x - 2) = 0^-$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x+1) = 2$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 + x - 2) = 0^-$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$.

58 Voir livre page 421.

59 FAUX : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + x + 1}{x+1} = +\infty$ ou $-\infty$.

60 FAUX : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ car $x^2 > 0$.

61 VRAI : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x^2 - 2x + 1} = +\infty$.

62 VRAI : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x+1}{x-2} = \frac{-1}{2}$.

63 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$: la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

2. a. Pour tout réel x , $f(x) \geq 2$ donc $f(x)$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} : g est définie sur \mathbb{R} .

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{3}$.

c. Les droites d'équations $y = 0$ et $y = \frac{1}{3}$ sont des asymptotes à \mathcal{C}_g (respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$).

64 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. a. g est définie si $f(x) \neq 0$. D'après le tableau, f s'annule en 3 donc g est définie sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$.

c. L'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 3$ sont des asymptotes à \mathcal{C}_g .

65 1. g est définie si $f(x) \neq 0$. D'après la courbe, f s'annule en -1 et en 1 donc g est définie sur :

$$]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[.$$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$.

Les droites d'équations $y = 1$, $x = -1$ et $x = 1$ sont des asymptotes à \mathcal{C}_g .

66 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$: l'axe des abscisses est une asymptote aux trois courbes en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote aux trois courbes.

(On a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty$.)

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} h(x) = +\infty$: la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote aux trois courbes.

67 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{20-5x}{(3-x)^2} = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

2. \mathcal{C}_1 représente f , \mathcal{C}_2 représente h et \mathcal{C}_3 représente g .

69 1. f est définie si $-x^2 - 2x + 3 \neq 0$.

Or $-x^2 - 2x + 3$ s'annule en 1 et en -3 donc f est définie sur $]-\infty; -3[\cup]-3; 1[\cup]1; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est une asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$-x^2 - 2x + 3$		-	0	+
			0	-

$\lim_{x \rightarrow -3} (x+1) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -3} (-x^2 - 2x + 3) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -3} (x+1) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -3} (-x^2 - 2x + 3) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = -3$ est une asymptote à \mathcal{C}_f .

$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 - 2x + 3) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 - 2x + 3) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à \mathcal{C}_f .

70 1. f est définie si $x^2 - x - 2 \neq 0$.

Or $x^2 - x - 2$ s'annule en -1 et en 2 , donc f est définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 2[\cup]2; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$: la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 4) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - x - 2) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 4) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x - 2) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à \mathcal{C}_f .

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x - 2) = 0^-$: « FI ».

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{3}$.

71 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{1-\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{1-\sqrt{x}} = -\infty$.

72 FAUX. Si la droite d'équation $y = -2$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 4$: la droite d'équation $y = 4$ est une asymptote à \mathcal{C}_g en $-\infty$.

73 VRAI. Si la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote à \mathcal{C}_f , alors au moins l'une des limites de f en 3 est infinie et il en est de même pour g .

74 1. $u(v(x)) = 2x^2 + 1$, $v(u(x)) = (2x + 1)^2$ et $u(u(x)) = 4x + 3$.

2. $u(v(x)) = 5 - x^3$, $v(u(x)) = (5 - x)^3$ et $u(u(x)) = x$.

3. $u(v(x)) = \frac{1}{x-5}$, $v(u(x)) = \frac{1}{x} - 5$ et $u(u(x)) = x$.

4. $u(v(x)) = x + 1$, $v(u(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$ et $u(u(x)) = (x^2 + 1)^2 + 1$.

75 1. $f = v \circ u$ avec u définie sur $[-2; +\infty[$ par $u(x) = 2 + x$ et v définie sur $[0; +\infty[$ par $v(X) = \sqrt{X}$.

2. $f = v \circ u$ avec u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = 1 + 3x$ et v définie sur \mathbb{R} par $v(X) = X^4$.

3. $f = v \circ u$ avec u définie sur $]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$ par $u(x) = 3 + x$ et v définie sur \mathbb{R}^* par $v(X) = \frac{1}{X}$.

4. $f = u \circ v$ avec u définie sur $[0; +\infty[$ par $u(x) = \sqrt{x}$.

77 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \sqrt{3}$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty$.

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = +\infty$.

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$.

78 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$.

79 FAUX. Par exemple, pour $g(x) = x^2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, mais $\lim_{x \rightarrow -\infty} g[f(x)] = 4$.

80 FAUX, d'après le théorème $\lim_{x \rightarrow -\infty} g[f(x)] = +\infty$.

81 VRAI d'après le théorème.

82 Voir livre page 421.

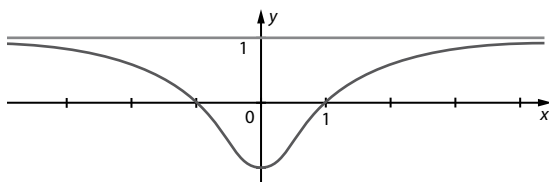
83 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$: la droite \mathcal{D} d'équation $y = 1$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$f(x) - 1 = \frac{-2}{x^2 + 1}$. Pour tout réel x , $f(x) - 1 < 0$: \mathcal{C}_f est strictement au-dessous de \mathcal{D} .

2. $f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$.

Comme $(x^2 + 1)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $4x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	1	-1	1



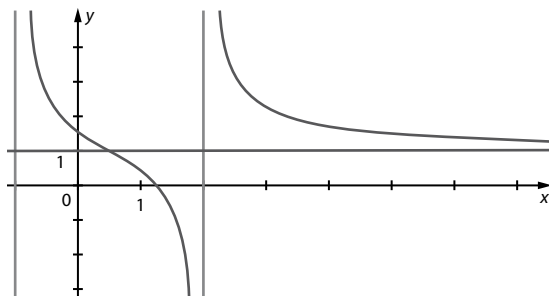
3. $1 - f(x) < 0,01$ équivaut à $\frac{2}{x^2 + 1} < 0,01$ et donc à $x^2 + 1 > 200$. Comme $x \geq 0$, on en déduit que $x > \sqrt{199}$. Pour $x > \sqrt{199}$, la distance entre le point de \mathcal{C}_f d'abscisse x et le point de \mathcal{D} d'abscisse x est strictement inférieure à $0,01$.

84 1. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$: les droites d'équations $x = -1$, $x = 2$ et $y = 1$ sont des asymptotes à \mathcal{C}_f .

2. $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{-1}{(x-2)^2}$.

Comme $\frac{-1}{(x+1)^2} < 0$ et $\frac{-1}{(x-2)^2} < 0$, $f'(x) < 0$ et donc f est strictement décroissante sur $]-1; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

x	-1	2	$+\infty$
f	$+\infty$	$-\infty$	1



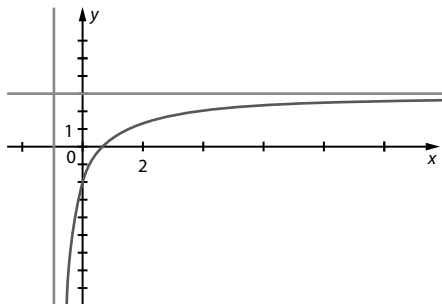
85 1. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à \mathcal{C}_f .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$: la droite \mathcal{D} d'équation $y = 3$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

$f(x) - 3 = -\frac{5}{x+1}$. Sur $] -1 ; +\infty[$, $f(x) - 3 < 0$: \mathcal{C}_f est au-dessous de \mathcal{D} .

2. $f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2}$. Sur $] -1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.

3.



86 1. f est définie si $x^2 - 2x + 5 \neq 0$. Le discriminant de $x^2 - 2x + 5$ est strictement négatif donc $x^2 - 2x + 5$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} : f est bien définie sur \mathbb{R} .

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$: la droite \mathcal{D} d'équation $y = -3$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$f(x) - (-3) = \frac{-6x+15}{x^2-2x+5}$. Comme pour tout réel x , $x^2 - 2x + 5 > 0$, $f(x) - (-3)$ est du signe de $-6x + 15$.

Si $x < \frac{5}{2}$, $f(x) - (-3) > 0$: \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{D} .

Si $x > \frac{5}{2}$, $f(x) - (-3) < 0$: \mathcal{C}_f est au-dessous de \mathcal{D} .

$$3. f'(x) = \frac{-6x(x^2 - 2x + 5) + 3x^2(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 5)^2} = \frac{6x^2 - 30x}{(x^2 - 2x + 5)^2}.$$

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	-3	0	-3,75	-3	

87 FAUX. Par exemple, pour $f(x) = x^2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ mais f n'est pas croissante sur \mathbb{R} .

88 FAUX. Par exemple, f définie par $f(x) = \frac{|x|x|}{x^2 + 1}$ est croissante sur \mathbb{R} , mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

89 $g(x) \leq 2x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

$2x - 1 \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

90 Voir livre page 421.

91 Pour tout réel x , $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$. De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

92 Pour tout réel x , $1 \leq f(x) \leq 2$ donc $3 \leq 2f(x) + 1 \leq 5$.

On en déduit que pour tout réel x non nul :

$$\frac{3}{x^2} \leq \frac{2f(x)+1}{x^2} \leq \frac{5}{x^2} \text{ d'où } \frac{3}{x^2} \leq g(x) \leq \frac{5}{x^2}.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

93 1. Pour tout réel $x > 0$, $x \leq x + 1$ (*). Comme $x + 1 > 0$, en multipliant chaque membre de l'inégalité (*) par $x + 1$, on obtient $x(x + 1) \leq (x + 1)^2$ et donc $\sqrt{x(x + 1)} \leq x + 1$ (1).

Comme $x > 0$, en multipliant chaque membre de l'inégalité (*) par x , on obtient $x^2 \leq x(x + 1)$ et donc $x \leq \sqrt{x(x + 1)}$ (2).

(1) et (2) : $x \leq \sqrt{x(x + 1)} \leq x + 1$.

2. Pour tout réel $x > 0$, $x \leq \sqrt{x(x + 1)} \leq x + 1$ donc :

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x^2}.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

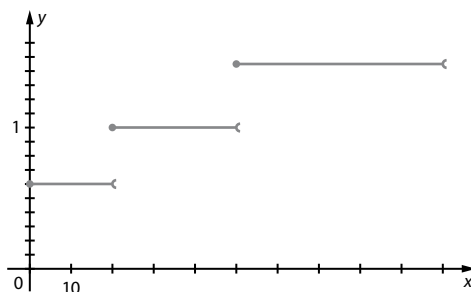
94 a. $g(x) = x$. b. $g(x) = -x$. c. $g(x) = 0$. d. $g(x) = 0,5$.

95 VRAI. Comme $f(x) \geq x^2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (théorème de comparaison).

96 FAUX. Par exemple, la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -1$ est telle que $-1 \leq g(x) \leq \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$.

97 FAUX. Par exemple, la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2 - x^3 + x^4$ est telle que $2 - x^3 \leq h(x)$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \neq -\infty$.

98 1.



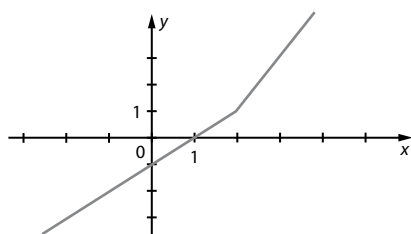
2. $\lim_{x \rightarrow 20} p(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 20} p(x) = 0,6$.

La fonction p est définie en 20, et $p(20) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 20} p(x) \neq \lim_{x \rightarrow 20} p(x)$ donc p n'est pas continue en 20.

3. $\lim_{x \rightarrow 50} p(x) = 1,45 = p(50)$ et $\lim_{x \rightarrow 50} p(x) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 50} p(x) \neq \lim_{x \rightarrow 50} p(x)$ donc p n'est pas continue en 50.



f est continue sur $]-\infty; 2[$ et sur $[2; +\infty[$ car sur chacun de ces intervalles, f est une fonction polynôme.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 1$, donc f est continue en 2.

On en déduit que f est continue sur \mathbb{R} .

100 1. Cette proposition est vraie d'après la propriété du cours.

2. La réciproque : « Une fonction continue sur un intervalle I est dérivable sur I » est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R} mais n'est pas dérivable en 0 et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0.

101 1. Cette proposition est vraie d'après la propriété du cours.

2. La contraposée de cette proposition est vraie puisque la contraposée d'une proposition vraie est vraie.

102 FAUX. Par exemple, la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = x + 1$ si $x \neq 2$ et $u(2) = 5$ est telle que :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} u(x) = 3$$

mais $u(2) \neq 3$ donc u n'est pas continue en 2.

103 FAUX. Par exemple, la fonction u de l'exercice précédent et la fonction v définie sur \mathbb{R} par $v(x) = -u(x)$ ne sont pas continues sur \mathbb{R} , mais $u + v$ est la fonction nulle : $u + v$ est continue sur \mathbb{R} .

104 1. $f'(x) = -3x^2 + 3$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$+\infty$	-1		3	$-\infty$

2. • f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(-1) = -1$. Comme 0 appartient à $[-1; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α_1 dans $]-\infty; -1]$.

• f est continue et strictement croissante sur $[-1; 1]$.

$f(-1) = -1$ et $f(1) = 3$. Comme 0 est compris entre $f(-1)$ et $f(1)$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α_2 dans $[-1; 1]$.

• f est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 3$. Comme 0 appartient à $]-\infty; 3]$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α_3 dans $[1; +\infty[$.

3. $-1,54 < \alpha_1 < -1,53$; $-0,35 < \alpha_2 < -0,34$; $1,87 < \alpha_3 < 1,88$.

105 1. $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 = x^2(5x^2 + 9)$.

Comme $x^2 \geq 0$ et $5x^2 + 9 > 0$, $f'(x) \geq 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. a. f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans \mathbb{R} .

b. $1,121 < \alpha < 1,122$.

106 1. $f'(x) = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$.

$2x^2 + 1 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

2. f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) = 0$. Comme 1 appartient à $[0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution α_1 dans $]-\infty; 0]$.

3. f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) = 0$. Comme 1 appartient à $[0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution α_2 dans $[0; +\infty[$.

4. $-0,79 < \alpha_1 < -0,78$ et $0,78 < \alpha_2 < 0,79$.

108 1. Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + x - 1$: $f'(x) = 3x^2 + 1$.

$f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans \mathbb{R} : $0,6823 < \alpha < 0,6824$.

2. Comme dans la question 1, on applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires et on en déduit que l'équation $f(x) = a$ a une unique solution dans \mathbb{R} .

109 Voir livre page 421.

110 1. En saisissant a, b, k et e , ce programme donne un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = k$ avec une précision égale à e .

2.

CASIO	TEXAS
<pre> A="":B="":C="":D="":E="":F="":G="":H="":I="":J="":K="":L="":M="":N="":O="":P="":Q="":R="":S="":T="":U="":V="":W="":X="":Y="":Z="": While B-A < E C=(A+B)/2 F=X:V1-K:F M=X:V1-K:F If F<0 Then M=B Else M=A End IfEnd WhileEnd A B </pre>	<pre> :Prompt A,B,K,E :While B-A < E : C=(A+B)/2 : F=X:V1-K:F : M=X:V1-K:F : If F<0 : Then M=B : Else M=A : End : IfEnd :WhileEnd :A :B </pre>

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 02_TS_exercice110.alg (AlgoBox).

On a défini la fonction **F1(x)=pow(x,3)+x-1**.

Tester l'algorithme puis Lancer Algorithme .

a. $a = -1, b = 0, k = -2$ et $e = 0,01$:

```

***Algorithme lancé***
-0.6875
-0.6796875
***Algorithme terminé***

```

Encadrement à 0,01 près : $-0,69 < \alpha < -0,67$.

b. $a = 0, b = 1 ; k = 0$ et $e = 0,01$:

```
***Algorithme lancé***
0.6796875
0.6875
***Algorithme terminé***
```

Encadrement à 0,01 près : $0,67 < \alpha < 0,69$.

c. $a = 1, b = 2, k = 5$ et $e = 0,01$:

```
***Algorithme lancé***
1.6328125
1.640625
***Algorithme terminé***
```

Encadrement à 0,01 près : $1,63 < \alpha < 1,65$.

111 1. Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 02_TS_exercice111-1.alg et 02_TS_exercice111-2.alg (AlgoBox).

• Avec 02_TS_exercice111-1.alg, on définit la fonction

$$F1(x) = x * x - 2.$$

Tester l'algorithme puis Lancer Algorithme.

2. $a = 1$ et $b = 2$ et $e = 0,000001$.

3. Avec $a = 1, b = 2$ et $e = 0,000001$:

```
***Algorithme lancé***
1.4142132
1.4142141
***Algorithme terminé***
```

Encadrement à 0,000001 près : $1,414213 < \sqrt{2} < 1,414215$.

Pour avoir un encadrement d'amplitude 0,000001, on choisit $e = 0,0000005$:

```
***Algorithme lancé***
1.4142132
1.4142137
***Algorithme terminé***
```

D'où : $1,414213 < \sqrt{2} < 1,414214$.

• Avec 02_TS_exercice111-2.alg, on définit la fonction

$F1(x) = x * x$. On exécute le programme avec $a = 1, b = 2, k = 2$ et $e = 0,000001$.

112 1. Voir cours.

2. La continuité de f est une condition suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, pour la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ f(x) = x + 2 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

f n'est pas continue sur $[1 ; 5]$ mais l'équation $f(x) = 2$ a une solution dans $[1 ; 5]$.

3. La stricte monotonie de f est une condition suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x$ n'est pas monotone sur \mathbb{R} , mais l'équation $f(x) = 3$ a une et une seule solution dans \mathbb{R} .

113 FAUX. Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = \frac{x|x|}{x^2 + 1}$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , mais l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

114 FAUX. Par exemple, pour la fonction f définie sur $[-2 ; 1]$ par $f(x) = x^2$, l'équation $f(x) = 0,5$ a deux solutions dans $[-2 ; 1]$ alors que $0,5$ n'est pas compris entre $f(-2)$ et $f(1)$.

115 VRAI. Si f est continue et strictement monotone sur $[a ; b]$, f admet comme extremums $f(a)$ et $f(b)$ et donc pour tout réel x de $[a ; b]$, $f(x)$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Si k n'est pas compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ n'a donc pas de solution dans $[a ; b]$.

116 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -\infty$.

117 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$: la droite d'équation $y = 4$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$: la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à \mathcal{C}_f .

118 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]^3 = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0^+, \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2} [f(x)]^3 = 0$.

119 • Si $k = 0$: la fonction f est définie par

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x < 0 \\ f(x) = -x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

f est continue sur $]-\infty ; 0[$ et sur $[0 ; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ donc f est continue sur \mathbb{R} .

• Si $k = 1$: la fonction f est définie par

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = -x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

f est continue sur $]-\infty ; 1[$ et sur $[1 ; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -1$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, donc f n'est pas continue en 1 : f n'est pas continue sur \mathbb{R} .

120 1. Soit f définie par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x ; f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	$\frac{4}{27}$	0	$+\infty$	

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} \approx 0,148.$$

• Sur $]-\infty ; 1[$, f admet un maximum strictement inférieur à 1 donc l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution dans $]-\infty ; 1[$.

• D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution α dans $[1 ; +\infty[$.

Une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut est 1,75.

2. On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans chacun des intervalles $]-\infty ; \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3} ; 1]$ et $[1 ; +\infty[$ et on en déduit que l'équation $f(x) = 0$, 1 a exactement trois solutions dans \mathbb{R} .

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 421 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

131 a. $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{3x-1}{2+x} = -\infty$. b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{5}{(x-1)(x-3)} = -\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 3)(\sqrt{x} - 1) = +\infty$. d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - 2x + 3) = -\infty$.

132 $f'(x) = 5x^4 + 2$. $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; 2]$. f est continue et strictement croissante sur $[0; 2]$. $f(0) = -4$ et $f(2) = 32$. Comme 0 est compris entre $f(0)$ et $f(2)$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0; 2]$: $1,11 < \alpha < 1,12$.

133 $f'(x) = -3x^2 + 12x = 3x(-x + 4)$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f	$+\infty$	$\rightarrow -8$	$\rightarrow 24$	$\rightarrow -\infty$	

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution :

- x_1 dans $] -\infty; 0]$: $-1,07 < x_1 < -1,06$;
- x_2 dans $[0; 4]$: $1,3 < x_2 < 1,31$;
- x_3 dans $[4; +\infty[$: $5,75 < x_3 < 5,76$.

► Asymptotes obliques

► Pour tout réel x , $f(x) - (1 + x) = \frac{3}{x^2 + 1}$.

$f(x) - (1 + x) > 0$, donc \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{D} .

► Dans le triangle MHP rectangle en H, la longueur de l'hypoténuse est supérieure à celle des autres côtés donc $MH \leq MP$.

► $0 \leq MH \leq MP$. Or $MH = u(x)$ et comme \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{D} , $MP = f(x) - (1 + x)$ donc $0 \leq u(x) \leq f(x) - (1 + x)$.

► $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1 + x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 + 1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$.

On en déduit que lorsque « x tend vers $+\infty$ », la distance du point M à la droite \mathcal{D} « tend vers 0 ».

► « $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1 + x)] = 0$ » est une condition suffisante pour que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$.

134 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x-1} \right) = 0$ donc la droite \mathcal{D} d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

135 Sur $] -\infty; -2[$, $f(x) - (2 - x) = \frac{-1}{2 + x}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2 - x)] = 0$ donc la droite \mathcal{D} d'équation $y = 2 - x$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$.

136 $f(x) - (3x - 2) = \frac{-2}{x^2 + 1}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (3x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x - 2)] = 0$ donc la droite \mathcal{D} d'équation $y = 3x - 2$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Image formée par une lentille convergente

L'objectif de ce TP est d'étudier, de « manière mathématique » un problème d'optique.

L'utilisation d'un logiciel de géométrie permet de créer et d'observer l'image formée par une lentille convergente selon la place de l'objet sur l'axe focal, de faire une conjecture sur cette image dans les cas « limites » où l'objet est « à l'infini » et où il est très proche du foyer, conjectures que l'on démontre dans la dernière partie (la relation de conjugaison que l'on utilise est écrite par les physiciens avec des mesures algébriques et non l'abscisse des points).

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

02_TS_TP1.ggb et **02_TS_correctionTP1.ggb** (GeoGebra) ;
02_TS_TP1.fig et **02_TS_correctionTP1.fig** (Cabri).

A. Construction et animation de la figure

Avec le logiciel GeoGebra

Les notations utilisées ci-dessous sont celles utilisées dans le fichier corrigé **02_TS_correctionTP1.ggb**.

Le logiciel GeoGebra nomme automatiquement les objets : cliquer droit sur l'objet pour accéder à **Renommer**.

Ouvrir le fichier **02_TS_TP1.ggb**.

Construction de A' :

Aller dans les menus **Droite parallèle**,

Intersection entre deux objets, **Segment entre deux points**,

ou **Droite passant par deux points**, pour construire :

- a_1 , la droite parallèle à (ff') passant par A ;
- E, le point d'intersection de a_1 et du segment L ;
- a_2 , le segment [AE] ;
- a_3 , la droite passant par E et F' ;
- a_0 , la droite passant par A et O ;
- A' , le point d'intersection de a_0 et a_3 .

Construction de C' :

Aller dans les menus **Droite parallèle** ou

Droite perpendiculaire, **Intersection entre deux objets**,

Segment entre deux points pour construire :

- a' , la parallèle au segment L passant par A' (ou la perpendiculaire à (ff') passant par A') ;
- C' , le point d'intersection de a' et de (ff') ;
- $a'c'$, le segment $[C'A']$.

Affichage taille objet : Aller dans le menu **Insérer un texte** et rentrer **a'c'**.

Pour plus de lisibilité, enlever l'affichage des droites a_1 et a' , et l'affichage des étiquettes des objets créés.

Avec le logiciel Cabri

Ouvrir le fichier **02_TS_TP1.fig**. Pour toutes les opérations, on choisit d'abord le menu dans la liste des icônes, puis on clique sur l'objet de la figure concerné.

Construction de A' :

On trace d'abord la droite (OA) avec le menu **Droite** (3^e icône).

On trace la parallèle à (FF') passant par A avec le menu **Droite parallèle** (5^e icône).

On détermine le point d'intersection X de cette droite avec la lentille avec **Point d'intersection** (2^e icône).

On trace la droite (XF') avec le menu **Droite**.

On détermine le point d'intersection de (XF') avec (OA) avec le menu **Point d'intersection** : c'est le point A'.

Construction de C' :

On trace la perpendiculaire à (FF') passant par A' avec le menu **Droite perpendiculaire** (5^e icône).

On détermine le point d'intersection de cette droite avec (FF') avec le menu **Point d'intersection** : c'est C'.

On définit le segment [A'C'] avec le menu **Segment** (3^e icône).

Affichage taille objet :

Dans la 9^e icône, on choisit le menu **Distance ou longueur** et on clique sur le segment [A'C'].

On déplace la zone de texte contenant cette longueur à l'endroit voulu.

B. Observations avec le logiciel

Bien déplacer le point A dans le « champ de la lentille » : ni plus haut, ni plus bas que la lentille et dans le demi-plan à gauche de la lentille.

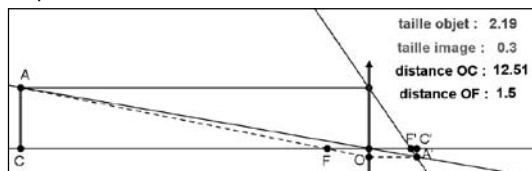
1. a. $OC = 2OF$.

b. $OC > 2OF$.

c. $OF < OC < 2OF$.

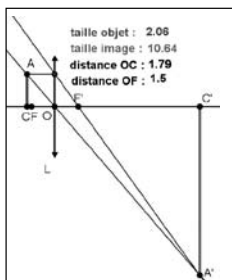
d. $OC < OF$.

2. Lorsque l'objet est « à l'infini », l'image devient très petite et très proche de F' :

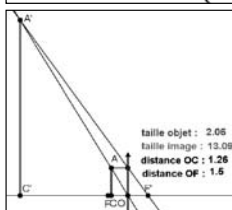


3.

Lorsque l'objet approche de très près le foyer « par la gauche », l'image est inversée, très grande et s'éloigne de F'.



Lorsque l'objet approche de très près le foyer « par la droite », l'image est très grande, du même côté que l'objet et s'éloigne de F.



C. Étude théorique

$$1. \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \text{ donc } \frac{p+f'}{pf'} = \frac{1}{q} \text{ d'où : } q = \frac{pf'}{p+f'} = \frac{-pf}{p-f}.$$

$$2. \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{-pf}{p-f} = -f = f' : \text{l'image est très proche de } F'.$$

3.

p	$-\infty$	f	0
$p-f$		$-$	$+$

$$\lim_{p \rightarrow f^-} (-pf) = -f^2 \text{ et } \lim_{p \rightarrow f^-} (p-f) = 0^-, \text{ donc } \lim_{p \rightarrow f^-} q = +\infty.$$

L'image est de l'autre côté et s'éloigne « indéfiniment » de F'.

$$\lim_{p \rightarrow f^+} (-pf) = -f^2 \text{ et } \lim_{p \rightarrow f^+} (p-f) = 0^+, \text{ donc } \lim_{p \rightarrow f^+} q = -\infty.$$

L'image est du même côté que l'objet et s'éloigne « indéfiniment » de F.

TP 2 Méthode de Lagrange

Les méthodes de dichotomie et de balayage ont été détaillées dans le cours, la méthode de Newton (ou encore « des tangentes ») a été étudiée dans un TP en classe de Première.

Nous avons choisi ici d'expliquer la méthode de Lagrange ou de « la fausse position » ou encore « des sécantes ».

Les deux premières parties permettent dans le cas particulier d'une fonction croissante et convexe, d'encadrer la solution de l'équation $f(x) = 0$, tout d'abord à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique puis à l'aide de deux algorithmes : le premier reprenant le principe de la construction géométrique (nombre d'itérations donné par l'utilisateur), l'autre permettant d'obtenir l'encadrement avec une précision choisie par l'utilisateur.

La dernière partie amène les élèves à entrevoir que cette méthode n'est pas valable pour toutes les fonctions. La convexité n'étant pas au programme, nous mettons les élèves sur la piste d'un algorithme testant à chaque étape si l'on doit tracer le segment [AC] ou le segment [BC].

Fichiers associés sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

**02_TS_TP2.ggb (GeoGebra) et 02_TS_TP2.g2w (Geoplan) ;
02_TS_algo1_TP2.alg, 02_TS_algo2_TP2.alg
et 02_TS_algo3_TP2.alg (AlgoBox).**

A. Avec un logiciel de géométrie dynamique

1. On utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

2. a. b. et c.

Avec le logiciel GeoGebra

Les notations utilisées ci-dessous sont celles utilisées dans le fichier **02_TS_TP2.ggb**.

Le logiciel GeoGebra nomme automatiquement les objets : cliquer droit sur l'objet pour accéder à **Renommer**.

Dans le menu **Options**, choisir **Arrondi** puis **5 décimales**.

Dans le champ de saisie, taper :

a=0 ; **b=5** ; **f(x)=0.05x^3-2** ; **A=(a,f(a))** et **B=(b,f(b))**

Aller dans les menus **Segment entre deux points** ,
Intersection entre deux objets pour construire :

- c, le segment [BA] ;
- c1, le point d'intersection de c et de l'axe des abscisses.

Et dans le champ de saisie : **C1=(x(c1),f(x(c1)))**

Puis continuer de la même façon et construire d, le segment [C1B], c2 le point d'intersection de d et de l'axe des abscisses, puis dans le champ de saisie : **C2=(x(c2),f(x(c2)))**...

On lit ensuite l'abscisse du point c4 dans la fenêtre Algèbre.

Avec le logiciel Geoplan

Créer ; **Numérique** ; **Fonction numérique** ; A1 variable (appeler fonction f).

Créer ; **Ligne** ; **Courbe** ; **Graphe d'une fonction déjà créée**.

Créer ; **Numérique** ; **Calcul algébrique** (Expression du calcul : 0 et Nom du calcul : a).

Créer de même b (Expression du calcul : 5 et Nom du calcul : b).

Créer ; **Point** ; **Point repéré** ; **Dans le plan** (abscisse : b, ordonnée : f(b) et nom du point : B).

* **Créer** ; **Point** ; **Point repéré** ; **Dans le plan** (abscisse : a, ordonnée : f(a) et nom du point : A).

Créer ; **Ligne** ; **Segment(s)** ; **Définis par 2 points** (AB).

Créer ; **Point** ; **Intersection 2 droites** (AB et ox ; nom : c1).

Créer ; **Numérique** ; **Calcul géométrique** ;

Abscisse d'un point dans le plan (nom du point : c1 et abscisse : x1).

Puis recommencer à * pour créer les autres points. A étant remplacé par C1 et a par x1 ...)

Créer ; **Affichage** ; **Variable numérique déjà définie** (x4 avec au moins 5 décimales)

d. Une valeur approchée de c_4 est 3,30569.

B. Avec un algorithme

1. La droite (AB) a pour équation :

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{f(a)b - af(b)}{b - a}.$$

Si $y = 0$, $x = -\frac{f(a)b - af(b)}{f(b) - f(a)}$ donc $c_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$.

2. a.

CASIO	TEXAS
<pre> =====LAGRANGE===== " A=">A# " B=">B# " N=">N# 1->K# While K<=N# A->X# Y1->P# B->X# Y1->Q# (AQ-BP)/(Q-P)->A# K+1->K# WhileEnd# A. </pre>	<pre> PROGRAM:LAGRANGE :Prompt A,B,N :1->K :While K<=N :A->X :Y1->P :B->X :Y1->Q :(AQ-BP)/(Q-P)->A :K+1->K :End :Disp A </pre>

Saisir a, b, N

k prend la valeur 1

Tant que $k \leq N$

 a prend la valeur $(af(b) - bf(a))/(f(b) - f(a))$

 k prend la valeur k + 1

Fin tant que

Afficher a

Avec AlgoBox : fichier **02_TS_algo1_TP2.alg**.

b. Pour afficher la valeur c_4 de la partie A, on exécute le programme avec $a = 0$, $b = 5$, $N = 4$.

```

***Algorithme lancé***
3.3056883
***Algorithme terminé***

```

c. Avec $N = 10$.

• $a = 0$ et $b = 20$:

```

***Algorithme lancé***
0.97324236
***Algorithme terminé***

```

• $a = 0$ et $b = 10$:

```

***Algorithme lancé***
2.869297
***Algorithme terminé***

```

• $a = 0$ et $b = 5$:

```

***Algorithme lancé***
3.4197449
***Algorithme terminé***

```

Le programme ne donne aucune idée de la précision de la valeur affichée.

3. a.

Saisir a, b, e

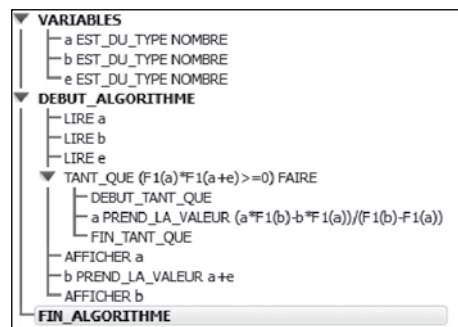
Tant que $f(a) \times f(a + e) \geq 0$

 a prend la valeur $(af(b) - bf(a))/(f(b) - f(a))$

Fin tant que

Afficher a et a + e

Avec AlgoBox : fichier **02_TS_algo2_TP2.alg**.



b. Pour $a = 0$, $b = 5$ et $e = 0,01$:

```

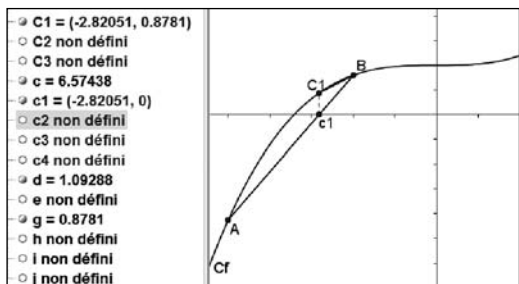
***Algorithme lancé***
3.4150352
3.4250352
***Algorithme terminé***

```

C. Encore une amélioration

Pour utiliser le fichier de la partie A, il suffit de modifier les valeurs de a, de b et l'expression de f(x).

Pour $f(x) = 0,05x^3 + 2$:



Dès la deuxième étape, le segment [BC1] ne coupe pas l'axe des abscisses.

2. Correctif : il faut lire « $f(c_1)$ et $f(b)$ sont de même signe » et non pas « $f(c_1)$ et $f(c_2)$ sont de même signe ».

```
Saisir a, b, e
c prend la valeur (af(b) - bf(a))/(f(b) - f(a))
Tant que f(c) * f(c + e) >= 0 et f(c) * f(c - e) >= 0
  c prend la valeur (af(b) - bf(a))/(f(b) - f(a))
  Si f(c) * f(b) <= 0
    a prend la valeur c
    sinon
    b prend la valeur c
  Fin si
Fin tant que
Afficher c - e, c, c + e
```

Avec AlgoBox : fichier **02_TS_algo3_TP2.alg**.

Pour $a = -5$, $b = -2$ et $e = 0,01$:

```
***Algorithme lancé***
c-e=-3.419993
c=-3.409993
c+e=-3.399993
***Algorithme terminé***
```

CAP VERS LE BAC

Sujet A

Partie A

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -\infty$.

2. $g'(x) = -6x^2 + 18x - 10 = 2(-3x^2 + 9x - 5)$.

$\Delta = 81 - 4 \times 15 = 21$.

$x_1 = \frac{9 - \sqrt{21}}{6} \approx 0,74$ et $x_2 = \frac{9 + \sqrt{21}}{6} \approx 2,26$.

Sur $[0 ; x_1[$ et sur $]x_2 ; +\infty[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante.

Sur $]x_1 ; x_2[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante.

3.

x	0	x_1	x_2	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
g	4	\searrow	$g(x_1)$	\nearrow	$g(x_2)$	\searrow	$-\infty$

avec $g(x_1) \approx 0,72$ et $g(x_2) \approx 4,28$.

4. a. • Sur $[0 ; x_2]$, le minimum de g est strictement positif, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

• g est continue et strictement décroissante sur $]x_2 ; +\infty[$. $g(x_2) \approx 4,28$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. Comme 0 appartient à $] -\infty ; g(x_2)[$, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans $]x_2 ; +\infty[$.

(E) a donc une unique solution α dans $[0 ; +\infty[$.

b. $3,09 \leq \alpha \leq 3,10$.

5. Sur $[0 ; \alpha[$, $g(x) > 0$ et sur $] \alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

1. Pour tout réel x positif ou nul :

$$A'(x) = -4x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 2g(x)$$

donc $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

2. Sur $[0 ; \alpha[$, $g(x) > 0$ donc $A'(x) > 0$: A est strictement croissante.

Sur $] \alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$ donc $A'(x) < 0$: A est strictement décroissante.

Partie C

1. L'aire du rectangle OPMQ est égale à :

$$OP \times OQ = x f(x) = x(-x^3 + 6x^2 - 10x + 8) = A(x).$$

D'après la question 2 de la partie B, la fonction A admet un maximum pour $x = \alpha$ donc l'aire est maximale lorsque M a pour abscisse α .

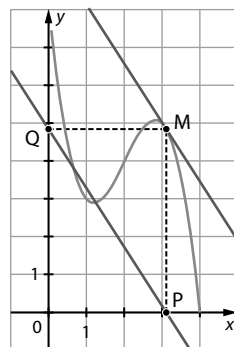
2. La tangente T en M a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.

La droite (PQ) a pour coefficient directeur $\frac{-f(\alpha)}{\alpha}$.

$xf(x) = A(x)$ donc $f(x) + xf'(x) = A'(x)$ donc $f(\alpha) + \alpha f'(\alpha) = A'(\alpha)$.

Comme $A'(\alpha) = 0$, $f(\alpha) + \alpha f'(\alpha) = 0$ et donc $f'(\alpha) = \frac{-f(\alpha)}{\alpha}$.

La tangente T et la droite (PQ) ont donc le même coefficient directeur : elles sont parallèles.



Sujet B

1. $f(x) - g(x) = x^3 - (x^2 + 4) = x^3 - x^2 - 4$

et $(x - 2)(x^2 + x + 2) = x^3 - x^2 - 4$

donc $f(x) - g(x) = (x - 2)(x^2 + x + 2)$.

2. $f(x) = g(x)$ équivaut à :

$$(x - 2)(x^2 + x + 2) = 0.$$

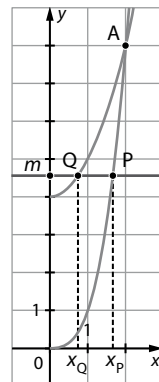
Le discriminant de $x^2 + x + 2$ est strictement négatif donc $f(x) = g(x)$ a comme unique solution 2.

$f(2) = 8$: le point d'intersection de \mathcal{C} et Γ est le point de coordonnées (2 ; 8).

3. a. Voir ci-contre.

b. $PQ = x_P - x_Q$.

$P(x_P ; m)$ et $P \in \mathcal{C}$ donc $f(x_P) = m$.



$Q(x_Q; m)$ et $Q \in \Gamma$ donc $g(x_Q) = m$ d'où $f(x_P) = g(x_Q)$.

c. Comme $PQ = 1$, $x_P - x_Q = 1$ et donc $x_Q = x_P - 1$.

Comme $f(x_P) = g(x_Q)$, $f(x_P) = g(x_P - 1)$ et donc $x_P^3 = (x_P - 1)^2 + 4$.

On en déduit que x_P est solution de l'équation (E) :

$$x^3 - x^2 + 2x - 5 = 0.$$

Soit h la fonction définie sur $[0; 2]$ par $h(x) = x^3 - x^2 + 2x - 5$.

$$h'(x) = 3x^2 - 2x + 2.$$

$\Delta = -20$. Pour tout réel x , $h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante.

h est continue et strictement croissante sur $[0; 2]$.

$h(0) = -5$ et $h(2) = 3$. Comme 0 est compris entre $h(0)$ et $h(2)$,

(E) a une unique solution dans $[0; 2]$.

$x_P \approx 1,63$ à 0,01 près par défaut.

x_P est l'abscisse du point P tel que $PQ = 1$.

Sujet C

1. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$.

b. $f_1'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

c.

x	0	$+\infty$
f_1	-2	$+\infty$

2. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

b. Sur $]0; +\infty[$, $f_n'(x) = 2 + \frac{1}{2n\sqrt{x}}$.

$f_n'(x) > 0$ donc f_n est strictement croissante.

c. f_n est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$f_n(0) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. Comme 0 appartient à $[-2; +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution α_n dans $[0; +\infty[$.

d. $f_n(0) = -2$ et $f_n(1) = \frac{1}{n}$. 0 appartient à $]f_n(0); f_n(1)[$ donc $0 < \alpha_n < 1$.

3. Comme $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, $2\alpha_{n+1} - 2 + \frac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n+1} = 0$ et donc $\sqrt{\alpha_{n+1}} = (n+1)(2 - 2\alpha_{n+1})$. On en déduit que :

$$f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \frac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n} = \frac{2(1 - \alpha_{n+1})}{n}.$$

Comme $\alpha_{n+1} < 1$, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

4. a. On suppose que la suite (α_n) est strictement décroissante. On a alors $\alpha_n > \alpha_{n+1}$.

f_n est strictement croissante donc $f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$.

Or $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$ et $f_n(\alpha_n) = 0$: on aboutit à une absurdité.

On en déduit que la suite (α_n) est croissante.

b. (α_n) est croissante et majorée (par 1), elle est donc convergente.

c. $f_n(\alpha_n) = 0$ donc $2\alpha_n - 2 + \frac{\sqrt{\alpha_n}}{n} = 0$ donc $\alpha_n = 1 - \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2n}$.

Comme $0 < \alpha_n < 1$, $0 < \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2n} < \frac{1}{2n}$

donc $1 - \frac{1}{2n} < 1 - \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2n} < 1$ et donc $1 - \frac{1}{2n} < \alpha_n < 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1$, d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1.$$

Sujet D

1. Réponse b.

2. Réponse b.

3. Réponse c.

4. Réponse c.

137 Sur $]1; +\infty[$, $\frac{2-3x}{1-x} \geq 0$ et $1-x \neq 0$ donc f est bien définie sur cet intervalle. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{3}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

Les droites d'équations $y = \sqrt{3}$ et $x = 1$ sont des asymptotes à \mathcal{C}_f .

138 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ donc \mathcal{C}_f admet une asymptote \mathcal{D} d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$f(x) - 2 = \frac{-3x-1}{x^2+1}$. Comme $x^2 + 1 > 0$, $f(x) - 2$ est du signe de $-3x - 1$.

Sur $] -\infty; -\frac{1}{3}]$, $f(x) - 2 \geq 0$: \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{D} .

Sur $[-\frac{1}{3}; +\infty[$, $f(x) - 2 \leq 0$: \mathcal{C}_f est au-dessous de \mathcal{D} .

139 Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 0,5$; $f'(x) = 6x^2 - 6x$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	0,5	-0,5	$+\infty$	

On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans $]-\infty; 0]$, $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans chacun de ces intervalles : elle admet donc trois solutions dont une unique solution α négative : $-0,4 < \alpha < -0,3$.

POUR ALLER PLUS LOIN

140 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 2$ avec $u(x) < 2$ sur $]-\infty; 2[$ et $\lim_{x \rightarrow 2} v(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(u(x)) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -7$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(u(x)) = -7$.

c. $\lim_{x \rightarrow 2} u(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} v(u(x)) = 1$.

d. $\lim_{x \rightarrow 2} u(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} v(u(x)) = 1$.

141 1. k est définie si $f(x) \geq 0$ donc k est définie sur $[-2; 1] \cup [3; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -2} k(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} k(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} k(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$.

2. g est la composée de la fonction inverse suivie de la fonction f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-X^2}{X^2+2} = 2, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-x^2}{x^2+2} = 2, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4-x^2}{x^2+2} = -1, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x^2+2} = -1, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1.$$

142 1. Pour tout réel $x > 1$:

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$143 \quad 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3\sqrt{x}) = +\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \sqrt{x}) = -\infty.$$

$$3. \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.$$

144 1. f est définie sur \mathbb{R} . De plus les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto |x| + 1$ sont continues sur \mathbb{R} donc f est continue sur \mathbb{R} .

2. f est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = -1 \neq f(0) \text{ donc } f \text{ n'est pas continue en } 0 :$$

f n'est pas continue sur \mathbb{R} .

$$145 \quad 1. \text{ Pour } m = 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 = 2 = f(1).$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x + 1) = 0 : \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ donc f n'est pas continue en 1 : f n'est pas continue sur \mathbb{R} .

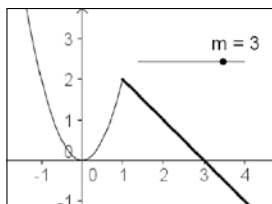
2. Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 02_TS_exercice145.ggb (GeoGebra).

Créer un curseur m .

Dans le champ de saisie, taper : **$f(x)=Si[x \leq 1, 2x^2]$** puis

$g(x)=Si[x > 1, -x+m]$.

Déplacer le curseur m .



Il semble que pour $m = 3$, on peut tracer la courbe sans lever le crayon.

3. Pour $m = 3$, f est continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 = f(1) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x + 3) = 2.$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1 : f est continue sur \mathbb{R} .

146 1. Pour $m = 0$, $f_0(x) = x - 1$: f_0 est une fonction affine.

$$2. a. \lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty.$$

$$b. \text{ Si } m < 0, \lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = -\infty.$$

$$\text{Si } m > 0, \lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = +\infty.$$

$$3. f'_m(x) = 1 - \frac{m}{x^2} = \frac{x^2 - m}{x^2}.$$

Comme $x^2 > 0$, $f'_m(x)$ est du signe de $x^2 - m$.

• Si $m < 0$, $x^2 - m > 0$ donc $f'_m(x) > 0$: f_m est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

$$\bullet \text{ Si } m > 0, f'_m(x) = \frac{(x - \sqrt{m})(x + \sqrt{m})}{x^2}.$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$	0	\sqrt{m}	$+\infty$	
$f_m'(x)$	+	0	-	-	0	+
f_m	$-\infty$	\nearrow	\searrow	$+\infty$	\searrow	$+\infty$

4. La courbe bleue est celle de f_1 ; la courbe rouge est celle de f_{-1} .

$$147 \quad 1. f'(x) = x^3 - 3x^2 + 5.$$

$$2. a. f''(x) = 3x^2 - 6x.$$

$$b. f''(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f''(x)$	+	0	-	0	+		
f'	$-\infty$	\nearrow	5	\searrow	1	\nearrow	$+\infty$

c. • Sur $]0; +\infty[$, f' admet un minimum égal à 1 donc $f'(x) > 0$: l'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution.

• D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ a une unique solution α dans $]-\infty; 0[$:

$$-1,2 < \alpha < -1,1.$$

Une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut est -1,2.

d. Sur $]-\infty; \alpha[$, $f'(x) < 0$ et sur $]\alpha; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

e.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

Avec $\alpha \approx -1,2$ et $f(\alpha) \approx -4,9$.

3. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$:

• a une unique solution θ dans $]-\infty; \alpha[$;

• a une unique solution β dans $]\alpha; +\infty[$.

$-2 < \theta < -1,9$: une valeur approchée de θ à 0,1 près par défaut est -2.

$0,2 < \beta < 0,3$: une valeur approchée de β à 0,1 près par défaut est 0,2.

148 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$: la droite \mathcal{D} d'équation $y = 5$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$: les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ sont des asymptotes à \mathcal{C}_f .

$$b. f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{-2}{(2x-6)^2} = \frac{2(x-5)(3x-7)}{(1-x)^2(2x-6)^2}.$$

x	$-\infty$	1	$\frac{7}{3}$	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	+	0	-	-	0	+
f	$\nearrow +\infty$ 5		$\nearrow 2,75$ $\searrow -\infty$		$\searrow +\infty$ 4,75	$\nearrow 5$	

f admet un maximum local en $\frac{7}{3}$ et un minimum local en 5.

c. $f(x) = 5$ équivaut à $\frac{2}{1-x} + \frac{1}{2x-6} = 0$ et donc à $3x - 11 = 0$. \mathcal{C}_f coupe \mathcal{D} en un seul point, de coordonnées $(\frac{11}{3}; 5)$.

149 1. $f(0) = 0$ donc la courbe représentative de f passe par l'origine du repère : il s'agit de \mathcal{C}_1 . \mathcal{C}_2 représente g .

2. Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont les solutions de l'équation de $f(x) = g(x)$.

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{5}{x^2+3} \text{ équivaut à } x^3 - 5x^2 + 3x - 5 = 0.$$

3. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$.

$$h'(x) = 3x^2 - 10x + 3.$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	+	
h	$-\infty$	$\nearrow -\frac{122}{27}$	$\searrow -14$	$\nearrow +\infty$		

• Sur $]-\infty; 3]$, h admet un maximum strictement négatif, donc l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution.

• D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution α dans $[3; +\infty[$.

• Comme $h(x) = 0$ a une unique solution dans \mathbb{R} , \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont un seul point d'intersection.

$4,58 < \alpha < 4,59$: une valeur approchée de son abscisse α est 4,58 à 0,01 près par défaut.

150 Partie A

1. h est continue car c'est une fonction polynôme.

2. h est continue et strictement décroissante sur $[1; 6]$. Comme 100 est compris entre $h(1)$ et $h(6)$, l'équation $h(x) = 100$ a une unique solution α dans $[1; 6]$: $2,4 < \alpha < 2,5$.

3. h est continue et strictement croissante sur $[6; 12]$. Comme 100 est compris entre $h(6)$ et $h(12)$, l'équation $h(x) = 100$ a une unique solution β dans $[6; 12]$: $8,4 < \beta < 8,5$.

Partie B

1. Le plus judicieux est d'acheter quand le cours de l'action est le plus bas, c'est-à-dire pour $x = 6$, ce qui correspond au 1^{er} juin. $250 \times 32 = 8\,000$: la dépense est de 80 000 €.

2. 1 000 € = 100 dizaines d'euros.

D'après la partie A, $h(x) = 100$ pour $x = \alpha$ et pour $x = \beta$, avec $2,4 < \alpha < 2,5$ et $8,4 < \beta < 8,5$: au cours du mois de février et au cours du mois d'août, le cours de cette action est égal à 1 000 €.

151 1. (d) a pour coefficient directeur m et passe par le point $P(0; 2)$, donc une équation de (d) est $y = mx + 2$.

\mathcal{C} a pour centre le point de coordonnées $(0; 1)$ et a pour rayon 1 donc une équation de \mathcal{C} est $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

2. Les coordonnées de H vérifient $y = mx + 2$ et $y = 0$, donc $H(\frac{-2}{m}; 0)$.

Les coordonnées de K vérifient $y = mx + 2$ et $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

On résout l'équation $x^2 + (mx + 2 - 1)^2 = 1$ qui est équivalente à $x[(1 + m^2)x + 2m] = 0$ et donc à $x = 0$ ou $x = \frac{-2m}{1 + m^2}$.

Pour $x = 0$, $y = 2$: il s'agit des coordonnées de P.

Pour $x = \frac{-2m}{1 + m^2}$, $y = \frac{-2m^2}{1 + m^2} + 2$ d'où $K(\frac{-2m}{1 + m^2}; \frac{2}{1 + m^2})$.

3. M a pour coordonnées $x_M = x_H = -\frac{2}{m}$ et $y_M = y_K = \frac{2}{1 + m^2}$.

Comme $x_M \neq 0$, on en déduit que :

$$m = -\frac{2}{x_M} \text{ et } y_M = \frac{2}{1 + (-\frac{2}{x_M})^2} = \frac{2x_M^2}{x_M^2 + 4}.$$

M est bien sur la courbe d'équation $y = \frac{2x^2}{x^2 + 4}$.

4. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

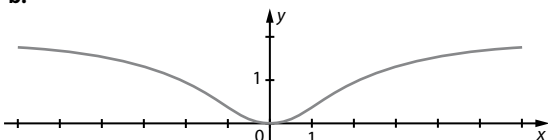
$$f'(x) = \frac{4x(x^2 + 4) - 2x^2(2x)}{(x^2 + 4)^2} = \frac{16x}{(x^2 + 4)^2}.$$

Comme $(x^2 + 4)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $16x$.

Si $x < 0$, $f'(x) < 0$ et donc f est strictement décroissante.

Si $x > 0$, $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante.

b.



152 1. T_a est parallèle à la droite \mathcal{D} d'équation $y = 2x$ si, et seulement si, elle a le même coefficient directeur que \mathcal{D} c'est-à-dire si et seulement si $f'(a) = 2$.

2. $g(x) = f'(x) - 2 = 4x^3 - 2x - 1$: $g'(x) = 12x^2 - 2$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
g	$-\infty$	$\nearrow g\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$	$\searrow g\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$	$\nearrow +\infty$	

$$g(-\frac{1}{\sqrt{6}}) \approx -0,45 \text{ et } g(\frac{1}{\sqrt{6}}) \approx -1,54.$$

• Sur $]-\infty; \frac{1}{\sqrt{6}}]$, g admet un maximum strictement négatif, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

• D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $[\frac{1}{\sqrt{6}}; +\infty[$: $0,8 < \alpha < 0,9$.

Une valeur approchée de α est 0,8 à 0,1 près par défaut.

3. L'équation $f'(x) = 2$ est équivalente à $f'(x) - 2 = 0$ et donc à $g(x) = 0$. Comme $g(x) = 0$ a une unique solution dans \mathbb{R} , l'équation $f'(x) = 2$ a une unique solution dans \mathbb{R} et donc il existe une unique tangente à \mathcal{C} parallèle à la droite d'équation $y = 2x$. Il s'agit de la tangente au point d'abscisse α .

153 Partie A

1. Graphiquement : $f(x) = 7$ pour $x = 4$ et $f(x) = 4$ pour $x = 8$.
Si le prix est de 700 €, les consommateurs achètent 4 000 unités.
Si le prix est de 400 €, ils achètent 8 000 unités.
2. Graphiquement $g(0) = 2$: au-dessous de 200 €, les producteurs ne sont plus prêts à vendre.

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: les consommateurs sont prêts à acheter une quantité très, très grande de produit lorsque le prix est très proche de 0.

2. a. L'abscisse du point d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g est la solution de $f(x) = g(x)$.

$$\frac{40}{x+2} = \frac{1}{18}x^2 + 2 \text{ équivaut à } 40 \times 18 = (x+2)(x^2 + 36)$$

ce qui équivaut à (E) : $x^3 + 2x^2 + 36x - 648 = 0$.

b. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$h(x) = x^3 + 2x^2 + 36x - 648.$$

$$h'(x) = 3x^2 + 4x + 36.$$

$\Delta < 0$. Pour tout réel x , $h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante $[0; +\infty[$.

h est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$h(0) = -648$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Comme 0 appartient à $[-648; +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution x_0 dans $[0; +\infty[$.

c. $6,781 < x_0 < 6,782$. La quantité d'équilibre est de 6 781 unités à 1 unité près par défaut. Le prix d'équilibre est alors de 455 € à 1 euro près par défaut.

154 Partie A

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

2. $g'(x) = 9x^2 - 4$.

3.

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
g	$-\infty$	$-\frac{56}{9}$	$-\frac{88}{9}$	$+\infty$	

4. Sur $]-\infty; \frac{2}{3}]$, g admet un maximum strictement négatif, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

• D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $[\frac{2}{3}; +\infty[$:
 $1,7 < \alpha < 1,71$.

5. Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{4}x + 1 + \frac{1+x}{x^2} \right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

L'axe des ordonnées est une asymptote à \mathcal{C} .

$$2. f'(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{3x^3 - 4x - 8}{4x^3} = \frac{g(x)}{4x^3}.$$

3.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	-	0	+
$4x^3$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	-	0	+
f	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$4. a. f(x) - \left(\frac{3}{4}x + 1 \right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x^2}.$$

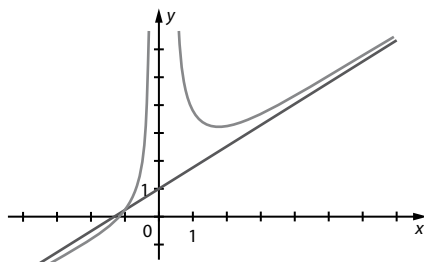
Si $-1 \leq x < 0$ ou $x > 0$, $f(x) - \left(\frac{3}{4}x + 1 \right) \geq 0$: \mathcal{C} est au-dessus de \mathcal{D} .

Si $x \leq -1$, $f(x) - \left(\frac{3}{4}x + 1 \right) \leq 0$: \mathcal{C} est au-dessous de \mathcal{D} .

$$b. d(x) = f(x) - \left(\frac{3}{4}x + 1 \right) = \frac{x+1}{x^2} : \lim_{x \rightarrow -\infty} d(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = 0.$$

Lorsque x tend vers l'infini, la distance entre le point de \mathcal{C} d'abscisse x et le point de \mathcal{D} d'abscisse x tend vers 0.

5.



Prises d'initiatives

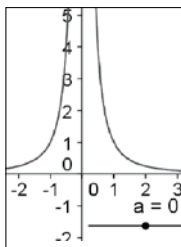
155 Fichier associé sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 02_TS_exercice155.ggb (GeoGebra).

Créer un curseur a , puis dans saisie : $g(x) = 1/(x^2 + a)$.

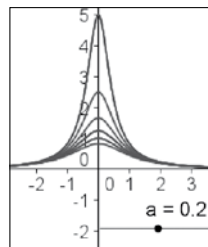
Déplacer le curseur a et observer les courbes.

On a affiché la trace des courbes tracées par le logiciel :

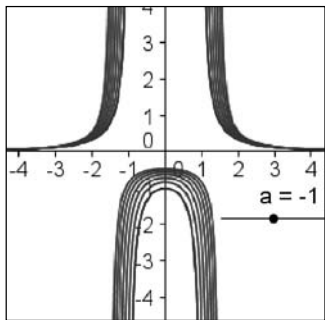
Pour $a = 0$:



Pour $a > 0$:



Pour $a < 0$:



$$g_a(x) = \frac{1}{f_a(x)} = \frac{1}{x^2 + a} \cdot g'_a(x) = \frac{-2x}{(x^2 + a)^2}.$$

Sur les intervalles où g_a est définie, $g'_a(x)$ est du signe de $-2x$.

- Si $a > 0$, g_a est définie sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'_a(x)$	$+$	0	$-$
g_a	0	$\nearrow \frac{1}{a}$	$\searrow 0$

- Si $a = 0$, g_a est définie sur \mathbb{R}^* .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'_a(x)$	$+$		$-$
g_a	$0 \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow 0$	

- Si $a < 0$, g_a est définie sur : $]-\infty; -\sqrt{-a}[\cup]-\sqrt{-a}; \sqrt{-a}[\cup]\sqrt{-a}; +\infty[$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{-a}$	0	$\sqrt{-a}$	$+\infty$
$g'_a(x)$	$+$		$+$ 0 $-$		$-$
g_a	$0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow \frac{1}{a} \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0$

156 Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 0,25x^4 - x^3 + 3x - 1$.
 $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ et $f''(x) = 3x^2 - 6x$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$ 0 $+$	
f'	$-\infty \nearrow 3$		$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ a une unique solution dans chacun des intervalles $]-\infty; 0]$, $[0; 2]$ et $[2; +\infty[$.

Soit α_1 la solution de $f'(x) = 0$ dans $]-\infty; 0]$: $-0,9 < \alpha_1 < -0,8$.

Soit α_2 la solution de $f'(x) = 0$ dans $[0; 2]$: $1,3 < \alpha_2 < 1,4$.

Soit α_3 la solution de $f'(x) = 0$ dans $[2; +\infty[$: $2,5 < \alpha_3 < 2,6$.

x	$-\infty$	α_1	α_2	α_3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$+\infty$	$\searrow f(\alpha_1)$	$\nearrow f(\alpha_2)$	$\searrow f(\alpha_3)$	$\nearrow +\infty$

avec $f(\alpha_1) \approx -2,8$; $f(\alpha_2) \approx 1,4$ et $f(\alpha_3) \approx 0,6$.

- Sur $[\alpha_2; +\infty[$, f admet un minimum égal à $f(\alpha_3)$.

Comme $f(\alpha_3) > 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[\alpha_2; +\infty[$.

- Pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$, on applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans $]-\infty; \alpha_1]$ et dans $[\alpha_1; \alpha_2]$ et on en déduit que l'équation $0,25x^4 - x^3 + 3x - 1 = 0$ a deux solutions : une dans $]-\infty; \alpha_1]$ et l'autre dans $[\alpha_1; \alpha_2]$.

157 Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} d'équations respectives $y = x^3$ et $y = mx + p$.

On doit résoudre l'équation $x^3 = mx + p$ qui est équivalente à $x^3 - mx - p = 0$.

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - mx - p$: $f'(x) = 3x^2 - m$.

- Si $m \leq 0$, $f'(x) \geq 0$ et donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} . $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans \mathbb{R} : \mathcal{C} et \mathcal{D} ont un seul point d'intersection.

- Si $m > 0$, $f'(x)$ a deux racines $x_1 = -\sqrt{\frac{m}{3}}$ et $x_2 = \sqrt{\frac{m}{3}}$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ 0 $+$	
f	$-\infty$	$\nearrow f(x_1)$	$\searrow f(x_2)$	$\nearrow +\infty$

$$f(x_1) = \frac{2m}{3} \sqrt{\frac{m}{3}} - p \text{ et } f(x_2) = -\frac{2m}{3} \sqrt{\frac{m}{3}} - p.$$

- Si $f(x_1)f(x_2) > 0$, c'est-à-dire si $27p^2 - 4m^3 > 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution : \mathcal{C} et \mathcal{D} ont un seul point d'intersection.

- Si $f(x_1)f(x_2) < 0$, c'est-à-dire si $27p^2 - 4m^3 < 0$, l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions distinctes : \mathcal{C} et \mathcal{D} ont trois points d'intersection.

- Si $f(x_1)f(x_2) = 0$, c'est-à-dire si $27p^2 - 4m^3 = 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes : \mathcal{C} et \mathcal{D} ont deux points d'intersection.

158 La courbe représentant f telle que $f(x) = \frac{5x}{x-3}$ admet comme asymptotes les droites d'équations $x = 3$ et $y = 5$.

Fonctions trigonométriques et dérivation

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Calculs de dérivées : compléments	<ul style="list-style-type: none"> Calculer les dérivées des fonctions : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$; $x \mapsto (u(x))^n$, n entier relatif non nul ; $x \mapsto e^{u(x)}$; $x \mapsto \ln(u(x))$. Calculer la dérivée d'une fonction $x \mapsto f(ax + b)$ où f est une fonction dérivable, a et b deux nombres réels. 	<p>À partir de ces exemples, on met en évidence une expression unifiée de la dérivée d'une fonction $x \mapsto f(u(x))$, mais sa connaissance n'est pas une capacité attendue.</p> <p>Les techniques de calcul sont à travailler mais ne doivent pas être un frein à la résolution de problèmes. On a recours si besoin à un logiciel de calcul formel.</p> <p>(AP) Exemples de fonctions discontinues, ou à dérivées non continues.</p>
Fonctions sinus et cosinus	<ul style="list-style-type: none"> Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus. Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité. Connaître les représentations graphiques de ces fonctions. 	<p>On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$.</p> <p>En dehors des exemples étudiés, aucun développement n'est attendu sur les notions de périodicité et de parité.</p> <p>On fait le lien entre les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$.</p> <p>⇒ [SPC] Ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique</p>

B Notre point de vue

La première partie de ce chapitre apporte des compléments sur le calcul des dérivées.

Les notions de nombre dérivé, de tangente et de fonction dérivée ont été abordées en classe de Première.

La première activité permet de réactiver ces connaissances afin de faciliter la compréhension des démonstrations que nous avons choisies de faire, des formules de dérivation des fonctions \sqrt{u} et u^n (n entier relatif non nul).

Ces notions sont également indispensables pour étudier, dans le cadre de l'approfondissement de l'accompagnement personnalisé, un exemple de fonction dérivable en un point, à dérivée non continue en ce point (l'une des propositions du programme).

Dans la dernière question de l'activité 1, ainsi que dans l'exercice 139, conformément au programme, nous avons, à partir d'exemples, mis en évidence une expression de la dérivée d'une fonction composée.

La seconde partie de ce chapitre définit les fonctions sinus et cosinus.

Le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle dans un triangle rectangle ont été étudiés au collège, le sinus et le cosinus d'un nombre réel en classe de Seconde, les équations trigonométriques en classe de Première.

Nous nous appuyons sur ces connaissances pour introduire les fonctions sinus et cosinus en faisant le lien avec le cercle trigonométrique (activité 2), donner un encadrement de $\frac{\sin x}{x}$ afin d'en déterminer la limite en 0 (activité 3), aborder la résolution des inéquations trigonométriques (activité 4).

Il nous a paru utile de compléter le cours par l'étude de la fonction tangente (exercice 112).

De nombreux exercices de tous niveaux viennent à la suite du cours.

Nous avons veillé à proposer des exercices faisant intervenir la logique (proposition directe, réciproque ou contraposée), et d'autres en lien avec la physique (mouvement d'un pendule, modélisation d'un signal carré...).

Les deux TP utilisent des logiciels de géométrie dynamique : l'un permet de comparer deux routes joignant deux points du globe terrestre, l'autre de modéliser un phénomène naturel, celui des marées.

Les notions abordées dans le chapitre 3

1. Compléments sur la dérivation
2. Fonctions sinus et cosinus
3. Limites et inéquations trigonométrique

C Avant de commencer

Voir livre page 421 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

D Activités

Activité 1 De la sécante à la tangente

L'objectif de cette activité est de rappeler la notion de nombre dérivé en un point. La fonction f étudiée est de la forme \sqrt{u} . Les élèves sont amenés à déterminer $f'(a)$ en calculant la limite du taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ lorsque h tend vers 0 et à en déduire une expression de $f'(a)$.

1. Comme $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$:

$$r(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{\sqrt{(a+h)^2 + 1} - \sqrt{a^2 + 1}}{h}.$$

2. On multiplie le numérateur et le dénominateur par :

$$\sqrt{(a+h)^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 1}.$$

On obtient, après calculs :

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \frac{2a}{2\sqrt{a^2 + 1}} \text{ donc } f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

\mathcal{C}_f admet une tangente au point A dont le coefficient directeur est égal à $f'(a)$.

3. $f(x) = g(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

$u'(a) = 2a$ et pour $x \neq 0$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc :

$$g'(u(a)) = \frac{1}{2\sqrt{u(a)}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 1}}.$$

4. $f'(a) = 2a \times \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 1}} = u'(a) \times g'(u(a)).$

Activité 2 Point par point, la courbe d'une fonction

L'objectif de cette activité est de faire le lien entre les définitions du sinus et du cosinus d'un nombre réel données en classe de Seconde et les fonctions sinus et cosinus. L'utilisation du logiciel GeoGebra permet de construire « point par point » les courbes représentatives de ces deux fonctions.

Dans la seconde partie, l'objectif est de faire une conjecture sur la fonction dérivée de la fonction sinus.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

03_TS_activite2_1s.ggb, 03_TS_activite2_2c.ggb

et 03_TS_activite2_3d.ggb (GeoGebra).

Partie A

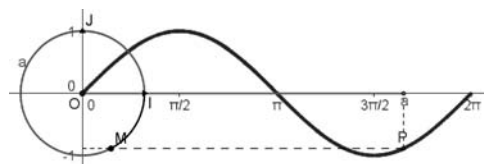
1. Comme M est le point du cercle trigonométrique associé au réel a , $y_M = \sin a$.

2. P a pour coordonnées $(a; \sin a)$.

3. Ouvrir le fichier 03_TS_activite2_1s.ggb.

Sélectionner le mode **Déplacer**, cliquer gauche sur le point M et déplacer le point sur le cercle.

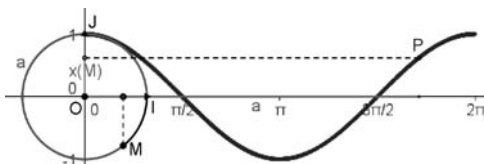
Pour recommencer l'animation : cliquer droit sur P, dans propriétés : décocher puis cocher la case **Trace**.



Comme $P(a; \sin a)$, la courbe tracée est celle de la fonction sinus sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

4. Pour que le logiciel trace la courbe représentative de la fonction cosinus, P doit avoir pour coordonnées $(a; x_M)$.

Ouvrir le fichier 03_TS_activite2_2c.ggb, activer la trace du point P, puis déplacer le point M sur le cercle.



Partie B

1. m est le coefficient directeur de la droite T.

2. T est la tangente à \mathcal{C} au point A donc son coefficient directeur m est égal à $f'(x_A)$.

3. Ouvrir le fichier 03_TS_activite2_3d.ggb.

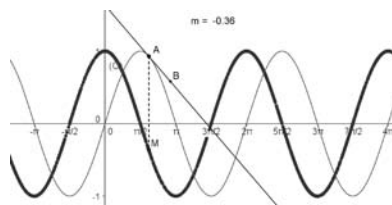
Activer la trace du point M, puis déplacer le point A sur la courbe.

- a. Comme $m = f'(x_A)$, les coordonnées de M sont $(x_A; f'(x_A))$.

La courbe tracée est celle de f' .

- b. On reconnaît la courbe de la fonction cosinus.

- c. On peut conjecturer que la fonction dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus.



3. Sur $]-\infty; 2[$, $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$.

4.

x	$-\infty$	2
f'(x)		-
f	$+\infty$	0

17 $f'(x) = -\sin x$ et $g'(x) = -\cos x$.

18 $f'(x) = 1 + 2\sin x$ et $g'(x) = 5 + \cos x$.

19 $f'(x) = \cos x - x \sin x$ et $g'(x) = \sin x + x \cos x$.

20 $f'(x) = -\sin x + \cos x$ et $g'(x) = \cos x + \sin x$.

21 $f'(x) = -2\sin x \cos x$ et $g'(x) = 2\cos x \sin x$.

22 Voir livre page 421.

23 $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ et $g'(x) = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$.

24 $f'(x) = -\sin(x+2)$ et $g'(x) = \cos(x-3)$.

25 $f'(x) = -3\sin(3x)$ et $g'(x) = -2\sin(2x)$.

26 $f'(x) = 3\cos(3x)$ et $g'(x) = 4\cos(4x)$.

27 $f'(x) = -3\sin(5+3x)$ et $g'(x) = -9\cos(1-9x)$.

28 Voir livre page 421.

29 1. $f(-x) = -f(x)$: la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

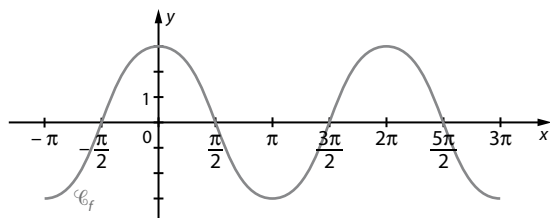
2. $g(-x) = g(x)$: la courbe représentative de g est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. f est représentée par \mathcal{C}_2 et g est représentée par \mathcal{C}_1 .

4. On retrouve les courbes de l'énoncé.

30 2. $f(-x) = f(x)$: on complète \mathcal{C}_f sur $[-\pi; 0]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

3. $f(x+2\pi) = f(x)$: on complète \mathcal{C}_f sur $[\pi; 3\pi]$ par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.



31 1. Pour tout réel x , $\cos x \leq 1$ donc $\cos x + x \leq 1 + x$.

2. $g(x) \leq 1 + x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

3. Pour tout réel x , $-1 \leq \cos x$, donc $-1 + x \leq g(x)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1+x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

32 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{\sin x}{x}\right) = 4$.

33 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x}{x} = 2$.

34 Voir livre page 422.

35 a. $f(x) \geq 0$

b. $f(x) > 0$

c. $f(x) \leq 0$

d. $f(x) < 0$

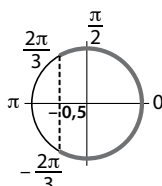
e. $f(x) \geq 0$

f. $f(x) > 0$

36 Pour justifier les réponses 1 et 2, on utilise le cercle trigonométrique.

1. Dans $]-\pi; \pi]$, (E) a pour solutions :

$$-\frac{2\pi}{3} \text{ et } \frac{2\pi}{3}.$$



2. (I) a pour ensemble de solutions $]-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[$.

3. $\cos x + 0,5 > 0$ sur $]-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[$ et

$\cos x + 0,5 < 0$ sur $]-\pi; -\frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3}; \pi]$.

37 1. $S =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$.

2. $\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ sur $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ et

$\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ sur $]-\pi; -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}; \pi]$.

38 1. $S = [0; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{7\pi}{4}; 2\pi]$.

2. $\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ sur $[0; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{7\pi}{4}; 2\pi]$ et

$\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ sur $]\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}[$.

39 1. $S =]-\pi; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; \pi]$.

2. $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ sur $]-\pi; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; \pi]$

et $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ sur $]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}[$.

40 1. $S = [0; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; 2\pi]$.

2. $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ sur $[0; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; 2\pi]$

et $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ sur $]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}[$.

41 Voir livre page 422.

42 a. $\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ sur $]-\pi; -\frac{2\pi}{3}[\cup]-\frac{\pi}{3}; \pi]$

et $\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ sur $]-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}[$.

b. $\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ sur $[0; \frac{4\pi}{3}[\cup]\frac{5\pi}{3}; 2\pi]$

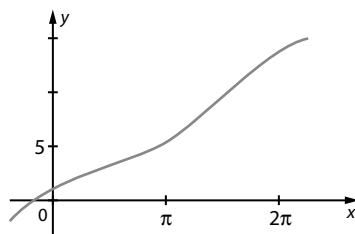
et $\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ sur $]\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}[$.

43 1. $f'(x) = 2 - \sin x$.

2. Pour tout réel x , $\sin x \leq 1$ donc $1 \leq 2 - \sin x$: $f'(x) > 0$.

3.

x	0	2π
f'(x)		+
f	1	$1 + 4\pi$



44 1. $f(-x) = f(x)$ et $f(x+2\pi) = f(x)$.

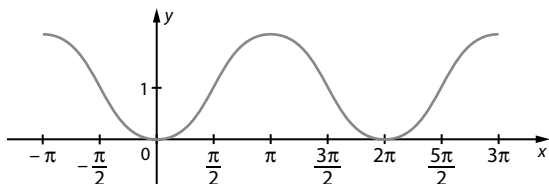
2. Il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$, on complètera \mathcal{C}_f par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis par translations de vecteurs $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$.

3. $f'(x) = \sin x$.

4. Sur $[0; \pi]$, $\sin x \geq 0$: $f'(x) \geq 0$.

5.

x	0	π	
$f'(x)$	0	+	0
f	0		2



45 1. $f(-x) = -f(x)$ et $f(x+2\pi) = f(x)$.

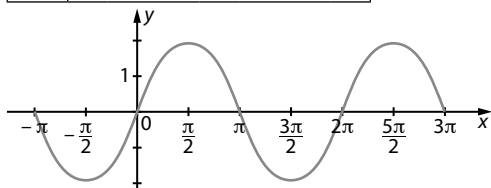
2. Il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$, on complètera \mathcal{C}_f par symétrie par rapport à l'origine du repère puis par translations de vecteurs $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$.

3. $f'(x) = 2\cos x$.

4. Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) \geq 0$ et sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, $f'(x) \leq 0$.

5.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	
$f'(x)$		+	0	-
f	0		2	0



46 1. $g(x) \geq 0$ sur $[0; \frac{\pi}{6}]$ et $g(x) \leq 0$ sur $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$.

2. a. $f'(x) = 3\cos(3x) = g(x)$.

b.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$		
$f'(x)$		+	0	-	0
f	0		1		-1

47 1. a. $f(-x) = f(x)$ et $f(x+2\pi) = f(x)$.

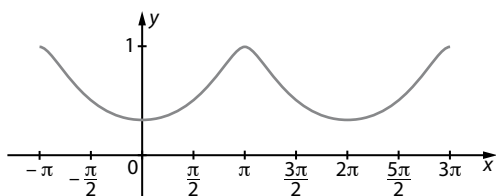
b. Il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$, on complètera \mathcal{C}_f par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$ ou $-2\pi\vec{i}$.

2. $f'(x) = \frac{\sin x}{(2 + \cos x)^2}$.

$(2 + \cos x)^2 > 0$ et sur $[0; \pi]$, $\sin x \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$.

3.

x	0	π	
$f'(x)$	0	+	0
f	$\frac{1}{3}$		1



POUR S'ENTRAÎNER

48 $f'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{1-5x}}$ et $g'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+3}}$.

49 $f'(x) = \frac{1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$.

$g'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{2(1+x)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{-1}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

50 Voir livre page 422.

51 $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2+1)^5}$ et $g'(x) = \frac{6}{(1-3x)^3}$.

52 $f'(x) = \frac{-24}{(x+1)^4}$ et $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}$.

53 1. $f'(x) = 2v'(2x-1)$, $g'(x) = -3v'(-3x)$ et $h'(x) = -v'(5-x)$.

2. $f'(x) = \frac{2}{(2x-1)^2+1} = \frac{1}{2x^2-2x+1}$.

$g'(x) = \frac{-3}{(-3x)^2+1}$ et $h'(x) = \frac{-1}{(5-x)^2+1}$.

54 Voir livre page 422.

55 $g'(x) = 2f'(2x) = 2f(2x)$.

$h'(x) = 3f'(3x) = 3f(3x)$.

$k'(x) = -f'(-x) = -f(-x)$.

$p'(x) = -f'(1-x) = -f(1-x)$.

56 1. $f'(-1) = 9$ et $f'(1) = -3$.

2. $g(x) = f(-x)$ donc $g'(x) = -f'(-x)$.

d'où $g'(-1) = -f'(1) = 3$ et $g'(1) = -f'(-1) = -9$.

$h(x) = f(2x)$ donc $h'(x) = 2f'(2x)$ d'où $h'(0,5) = 2f'(1) = -6$.

$k(x) = f(x-2)$ donc $k'(x) = f'(x-2)$ d'où $k'(1) = f'(-1) = 9$.

57 VRAI : $f'(x) = 3(4x)(2x^2-1)^2 = 12x(2x^2-1)^2$.

58 FAUX : $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

59 VRAI : $g'(x) = 2f'(2x) = -2f(2x) = -2g(x)$.

60 Voir livre page 422.

61 1. f est définie si $x^2+3x-4 \geq 0$.

x^2+3x-4 s'annule en -4 et en 1 et $x^2+3x-4 \geq 0$

sur $]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$ donc f est définie sur $]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$

et donc aussi sur \mathbb{R} .

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+3x-4) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

3. $f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-4}}$.

4.

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$f'(x)$		-		+
f	$+\infty$		0	$+\infty$

62 1. f est définie si $-x^2+3x+4 > 0$.

$-x^2+3x+4$ s'annule en 4 et en -1 et $-x^2+3x+4 > 0$

sur $]-1; 4[$ donc f est bien définie sur \mathbb{R} .

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{-x^2+3x+4} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$. De même $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$.

3. $f'(x) = \frac{2x-3}{2(-x^2+3x+4)\sqrt{-x^2+3x+4}}$.

4. Sur I , $-x^2+3x+4 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x-3$.

x	-1	1,5	4
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	0,4	$+\infty$

63 FAUX : f est définie mais pas dérivable en -1 .

64 FAUX : $f'(x) = -\frac{1}{2x^2} \sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

65 VRAI car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

66 FAUX car la limite de f en -1 n'est pas infinie ($\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$).

67 VRAI car $f'(x)$ (voir exercice 64) est du signe de $-2x^2$ donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; -1[$ et sur $]0; +\infty[$: f est décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]0; +\infty[$.

68 $f'(x) = -2\cos x + 2x\sin x$ et $g'(x) = 2x\sin x + x^2 \cos x$.

69 $f'(x) = \frac{-1}{(\sin x)^2}$ et $g'(x) = \frac{\sin x - (x+1)\cos x}{(\sin x)^2}$.

70 $f'(x) = \frac{-1-2\sin x}{(2+\sin x)^2}$ et $g'(x) = \frac{4\sin x}{(2+\cos x)^2}$.

71 Voir livre page 422.

72 $f'(x) = -6\sin(2x+5)$ et $g'(x) = 1 - 6\cos(3x)$.

73 1. Cette proposition est vraie d'après le cours.

2. La réciproque de cette proposition est :

« Si $f'(x) = \cos x$, alors $f(x) = \sin x$ ».

Cette proposition est fausse. Par exemple, f définie par $f(x) = \sin x + 1$ est telle que $f'(x) = \cos x$ mais $f(x) \neq \sin x$.

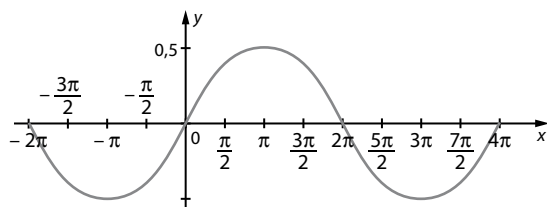
74 VRAI : $f(x) = \cos(-x) = \cos x$ donc $f'(x) = -\sin x$.

75 VRAI : $f'(x) = 2 \times 2(-\sin x)\cos x = -4\sin x \cos x$ et $g'(x) = 2 \times [-\sin(2x)] = -4\sin x \cos x$.

76 FAUX : comme $f(x) = 1 - g(x)$, $f'(x) = -g'(x)$.

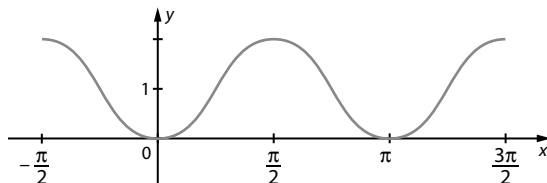
77 2. $f(-x) = -f(x)$: on complète \mathcal{C}_f sur $[-2\pi; 0]$ par symétrie par rapport à l'origine du repère.

3. $f(x+4\pi) = 0,5\sin(0,5x+2\pi) = f(x)$: on complète \mathcal{C}_f par translation de vecteur $4\pi\vec{i}$.



78 2. $f(-x) = f(x)$: on complète \mathcal{C}_f par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

3. $f(x+\pi) = 1 - \cos(2x+2\pi) = f(x)$: on complète \mathcal{C}_f par translation de vecteur $\pi\vec{i}$.



79 1. $f(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) = \sin(2x) = f(x)$.

$g\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x+2\pi) = \sin(4x) = g(x)$.

2. $f(x+\pi) = f(x)$ donc f a pour période π .

f est représentée par la courbe \mathcal{C}_f .

$g\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = g(x)$ donc g a pour période $\frac{\pi}{2}$.

g est représentée par la courbe Γ .

80 1. $5T = 100 - 40 = 60$ (en ms) donc $T = 12$ ms = $0,012$ s et donc $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,012}$ (en s^{-1}).

2. $f = \frac{v}{\lambda}$ et $\lambda = 4L$ donc $4L = \frac{v}{f}$ donc $L = \frac{v}{4f}$.

$L = \frac{340 \times 0,012}{4} = 1,020$ m.

81 1. Pour tout réel x , $h(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = h(x)$ donc cette proposition est vraie.

2. Contraposée de cette proposition : « Si la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = f(x)g(x)$ est telle qu'il existe un réel x tel que $h(-x) \neq h(x)$, alors il existe un réel x tel que $f(-x) \neq f(x)$ ou $g(-x) \neq g(x)$ ».

3. Réciproque de cette proposition : « Si la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = f(x)g(x)$ est telle que pour tout réel x , $h(-x) = h(x)$ alors pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$ et $g(-x) = g(x)$ ».

Cette proposition est fausse.

Par exemple, pour f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = g(x) = x$, $h(-x) = h(x)$ mais $f(-x) \neq f(x)$ (et $g(-x) \neq g(x)$).

82 1. Pour tout réel x :

$$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$$

donc cette proposition est vraie.

2. Réciproque de cette proposition : « Si pour tout réel x , $f(x+2T) = f(x)$ alors $f(x+T) = f(x)$ ».

Cette proposition est fausse.

Par exemple pour $T = \pi$ et $f(x) = \cos(x)$:

$$f(x+2T) = f(x+2\pi) = f(x)$$

mais $f(x+T) = f(x+\pi) = \cos(x+\pi) = -f(x) \neq f(x)$.

83 FAUX : pour tout réel x , $f(x) = \sin(\pi+x) = -\sin x$, donc $f(-x) = -f(x)$.

84 VRAI : pour tout réel x , $f(x) = \cos(\pi+x) = -\cos x$, donc $f(-x) = f(x)$: \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

85 VRAI : pour tout réel x , $f(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, donc $f(-x) = f(x)$: \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

86 Voir livre page 422.

87 Pour tout réel x , $-2-x \leq f(x) \leq 2-x$.

$f(x) \leq 2-x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

$-2-x \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2-x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

88 1. Comme pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $x^2+1 > 0$:

$$\frac{-1}{x^2+1} \leq g(x) \leq \frac{1}{x^2+1}.$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

89 Voir livre page 422.

90 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, d'après le cours.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

Pour tout réel $x > 0$, $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ donc $-x \leq h(x) \leq x$.

$\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$: la courbe qui représente f est \mathcal{C}_2 .

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$: la courbe qui représente g est \mathcal{C}_3 .

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$: la courbe qui représente h est \mathcal{C}_1 .

3. a. D'après le graphique, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $x \sin \frac{1}{x} = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$.

91 FAUX : pour tout réel x , $x - 1 \leq x + \sin x$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = +\infty$.

92 FAUX :

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = -\infty$.

93 **a.** Pour tout réel x , $0 \leq \cos^2 x \leq 1$

donc $-1 \leq \cos^2 x - 1 \leq 0$: $f(x) \leq 0$ sur \mathbb{R} et donc sur I .

b. $f(x) = \cos^3 x + \cos^2 x = \cos^2 x (\cos x + 1)$.

Pour tout réel x , $\cos x + 1 \geq 0$ et $\cos^2 x \geq 0$: $f(x) \geq 0$ sur \mathbb{R} et donc sur I .

94 **a.** $2\cos x - 1 > 0$ sur $]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}[$
et $2\cos x - 1 < 0$ sur $]-\pi; -\frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3}; \pi]$.

b. $2\cos x + \sqrt{2} > 0$ sur $]-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}[$
et $2\cos x + \sqrt{2} < 0$ sur $]-\pi; -\frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; \pi]$.

c. $-2\cos x + \sqrt{3} > 0$ sur $]-\pi; -\frac{\pi}{6}[\cup]\frac{\pi}{6}; \pi]$
et $-2\cos x + \sqrt{3} < 0$ sur $]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}[$.

d. $-2\cos x - \sqrt{2} > 0$ sur $]-\pi; -\frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; \pi]$
et $-2\cos x - \sqrt{2} < 0$ sur $]-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}[$.

95 **a.** $2\cos x - 1 > 0$ sur $[0; \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{5\pi}{3}; 2\pi[$
et $2\cos x - 1 < 0$ sur $]\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}[$.

b. $2\cos x + \sqrt{2} > 0$ sur $[0; \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{5\pi}{4}; 2\pi[$
et $2\cos x + \sqrt{2} < 0$ sur $]\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}[$.

c. $-2\cos x + \sqrt{3} > 0$ sur $]\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}[$
et $-2\cos x + \sqrt{3} < 0$ sur $[0; \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{11\pi}{6}; 2\pi[$.

d. $-2\cos x - \sqrt{2} > 0$ sur $]\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}[$
et $-2\cos x - \sqrt{2} < 0$ sur $[0; \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{5\pi}{4}; 2\pi[$.

96 **a.** $1 - 2\sin x > 0$ sur $]-\pi; \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{5\pi}{6}; \pi]$
et $1 - 2\sin x < 0$ sur $]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}[$.

b. $2\sin x + 1 > 0$ sur $]-\pi; -\frac{5\pi}{6}[\cup]-\frac{\pi}{6}; \pi]$
et $2\sin x + 1 < 0$ sur $]-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}[$.

c. $-2\sin x + \sqrt{3} > 0$ sur $]-\pi; \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3}; \pi]$

et $-2\sin x + \sqrt{3} < 0$ sur $]\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[$.

d. $-2\sin x - \sqrt{2} > 0$ sur $]-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}[$

et $-2\sin x - \sqrt{2} < 0$ sur $]-\pi; -\frac{3\pi}{4}[\cup]-\frac{\pi}{4}; \pi]$.

97 **a.** $1 - 2\sin x > 0$ sur $[0; \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{5\pi}{6}; 2\pi[$

et $1 - 2\sin x < 0$ sur $]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}[$.

b. $2\sin x + 1 > 0$ sur $[0; \frac{7\pi}{6}[\cup]\frac{11\pi}{6}; 2\pi[$

et $2\sin x + 1 < 0$ sur $]\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}[$.

c. $-2\sin x + \sqrt{3} > 0$ sur $[0; \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3}; 2\pi[$

et $-2\sin x + \sqrt{3} < 0$ sur $]\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[$.

d. $-2\sin x - \sqrt{2} > 0$ sur $]\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}[$

et $-2\sin x - \sqrt{2} < 0$ sur $[0; \frac{5\pi}{4}[\cup]\frac{7\pi}{4}; 2\pi[$.

99 **1.** $\sin(2x) = \sin(x)$ équivaut à $2\sin x \cos x = \sin x$

ce qui équivaut à $\sin x (2\cos x - 1) = 0$ et donc à $\sin x = 0$ ou $\cos x = 0,5$.

Dans $]-\pi; \pi]$, les solutions sont 0 ; π ; $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

D'où la réponse apportée par le logiciel en **1**.

2. a. $\sin(2x) < \sin(x)$ équivaut à $\sin x (2\cos x - 1) < 0$.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π		
$\sin x$		-	-	0	+	+	0
$2 \cos x - 1$		-	0	+	+	0	-
Produit		+	0	-	0	+	0

D'où la réponse apportée par le logiciel en **2**.

b. $\sin(2x) - \sin(x) = \sin x (2\cos x - 1)$.

Sur $]-\pi; -\frac{\pi}{3}[\cup]0; \frac{\pi}{3}[$, $\sin(2x) - \sin x > 0$.

Sur $]-\frac{\pi}{3}; 0[\cup]\frac{\pi}{3}; \pi[$, $\sin(2x) - \sin x < 0$.

3. Dans $[0; 2\pi[$, (**E**) a pour solutions 0 ; π ; $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

(**I**) a pour ensemble de solutions $]\frac{\pi}{3}; \pi[\cup]\frac{5\pi}{3}; 2\pi[$.

4.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\sin x$	0	+	+	0	-
$2 \cos x - 1$		+	0	-	-
Produit	0	+	0	-	0

100 $\sin(2x) - \cos(x) = \cos x (2\sin x - 1)$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π		
$\cos x$		-	0	+	+	0	-	
$2 \sin x - 1$		-	-	0	+	+	0	-
Produit		+	0	-	0	+	0	+

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	+	+	0	-	-	+
2 sin x - 1	-	0	+	+	0	-
Produit	-	0	+	0	+	0

101 Voir livre page 422.

102 1. Les solutions de l'équation $2X^2 - X - 1 = 0$ sont $-0,5$ et 1 .

2. a. $\cos(2x) = \cos x$ équivaut à $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$ et donc à $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$.

b. D'après la question 1, $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$ équivaut à $\cos x = -0,5$ ou $\cos x = 1$.

Sur $[0; 2\pi]$, (E) a pour solutions $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$ et 0 .

3. a. $P(X) = 2X^2 - X - 1 = (2X + 1)(X - 1)$.

b. $\cos(2x) - \cos(x) = 2\cos^2(x) - \cos(x) - 1$
donc $\cos(2x) - \cos(x) = (2\cos x + 1)(\cos x - 1)$.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
cos x - 1	0	-	-	-
2 cos x + 1	+	0	-	+
Produit	0	-	+	0

103 FAUX. Pour tout réel x, $\sin x \leq 1$ donc $-1 \leq -\sin x$ d'où $1 \leq 2 - \sin x$: $2 - \sin x > 0$.

104 VRAI : si x appartient à $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$, $\sin x > 0,5$ et donc $1 - 2\sin x < 0$.

105 FAUX : si x appartient à $[0; \pi]$, $\cos x - 1 \leq 0$ et $\sin x \geq 0$ donc $(\cos x - 1)\sin x \leq 0$.

106 Voir livre page 422.

107 $f(x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.

1. a. $f(-x) = f(x)$ et $f(x + \pi) = \sin^2(x + \pi) = (-\sin x)^2 = f(x)$.

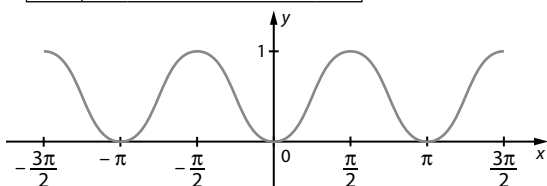
b. $f(-x) = f(x)$: \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$f(x + \pi) = f(x)$: on complète \mathcal{C}_f par translations de vecteurs $\pi\vec{i}$ et $-\pi\vec{i}$.

2. $f'(x) = 2\sin x \cos x$.

3. Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq 0$ et $\cos x \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	0	+
f	0	1



108 1. a. $f(-x) = f(x)$ et $f(x + \pi) = f(x)$.

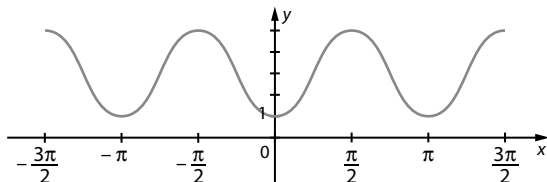
b. $f(-x) = f(x)$: \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$f(x + \pi) = f(x)$: on complète \mathcal{C}_f par translations de vecteurs $\pi\vec{i}$ et $-\pi\vec{i}$.

2. $f'(x) = 4\sin(2x) = 8\sin x \cos x$.

3. Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq 0$ et $\cos x \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	0	+
f	1	5



109 1. $f(-x) = -\sqrt{3}x + 2\sin x = -f(x)$.

2. Comme $f(-x) = -f(x)$, il suffit d'étudier f sur $[0; 2\pi]$. On complètera \mathcal{C}_f sur $[-2\pi; 0]$ par symétrie par rapport à l'origine du repère.

3. $f'(x) = \sqrt{3} - 2\cos x$.

4. $f'(x) > 0$ sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$ et $f'(x) < 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$.

5.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
f'(x)	-	0	+	-
f	0	$\frac{\sqrt{3}\pi}{6} - 1$	$\frac{11\sqrt{3}\pi}{6} + 1$	$2\sqrt{3}\pi$

110 1. $f'(x) = 1 - \cos x$.

Pour tout réel x, $\cos x \leq 1$ donc $f'(x) \geq 0$: f est croissante sur \mathbb{R} et donc sur I.

2. Sur $[0; +\infty[$, f est croissante et $f(0) = 0$ donc $f(x) \geq 0$.

3. $g'(x) = -\sin x + x = f(x)$.

Sur I, $f(x) \geq 0$ donc $g'(x) \geq 0$: g est croissante sur I.

De plus $g(0) = 0$ donc $g(x) \geq 0$ sur I.

4. a. Pour tout réel x positif, $g(x) \geq 0$ donc $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

De plus, $\cos x \leq 1$ donc $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$.

b. Pour tout réel x négatif, $-x$ est positif. D'après 4. a.

$1 - \frac{(-x)^2}{2} \leq \cos(-x) \leq 1$ et donc $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$.

112 1. a. $f(-x) = -f(x)$.

b. Il suffit d'étudier f sur $J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: on complètera la courbe par symétrie par rapport à l'origine du repère.

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote à \mathcal{C}_f .

3. $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	+	
f	0	$+\infty$

5. T a pour équation : $y = f'(0)x + f(0)$.

Comme $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$, T a pour équation $y = x$.

6. $f(x) - x = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x}$.

Sur I , $\cos x > 0$ donc $f(x) - x$ est du signe de $\sin x - x \cos x$.

Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = \sin x - x \cos x$,

$g'(x) = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x$.

Sur $]-\frac{\pi}{2}; 0]$, $x \leq 0$ et $\sin x \leq 0$ donc $g'(x) \geq 0$.

Sur $[0; \frac{\pi}{2}[$, $x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$ donc $g'(x) \geq 0$.

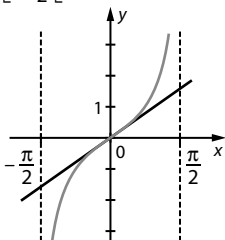
Pour tout réel x de I , $g'(x) \geq 0$ et donc g est croissante.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
g	-1	0	1

Sur $]-\frac{\pi}{2}; 0]$, $g(x) \leq 0$ donc $f(x) - x \leq 0$: \mathcal{C}_f est au-dessous de T.

Sur $[0; \frac{\pi}{2}[$, $g(x) \geq 0$ donc $f(x) - x \geq 0$: \mathcal{C}_f est au-dessus de T.

7.



113. FAUX car $f(-x) = -x + 2\cos x \neq f(x)$.

Correctif : Il se peut que dans certains manuels, il soit indiqué « est sa courbe représentative » par erreur sur la 2^e ligne de l'énoncé.

114. VRAI : $f'(x) = 1 - 2\sin x$.

Sur $[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$, $\sin x \geq 0,5$ donc $f'(x) \leq 0$: f est décroissante.

115. VRAI. La tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$. Comme $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$, une équation est : $y = x + 2$.

116. FAUX. $f(x) - x = 2\cos x$. Sur $I =]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$, $\cos x < 0$ et donc $f(x) < x$. Sur I , \mathcal{C}_f est au-dessous de la droite d'équation $y = x$.

117. 1. f est définie si $2x^2 + x + 3 \geq 0$. Le discriminant Δ de $2x^2 + x + 3$ est égal à -23 . $\Delta < 0$.

Pour tout réel x , $2x^2 + x + 3 > 0$ donc f est bien définie sur \mathbb{R} .

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + x + 3) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. $f'(x) = \frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x+3}}$. $f'(x)$ est du signe de $4x+1$

donc $f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty; -\frac{1}{4}]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[-\frac{1}{4}; +\infty[$.

4.

x	$-\infty$	-0,25	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$\sqrt{\frac{23}{8}}$	$+\infty$

118. $f'(x) = 2\cos(2x) - 4x \sin(2x)$ et $g'(x) = 2\cos(2x)$.

$f'(\frac{\pi}{2}) = g'(\frac{\pi}{2}) = -2$: les tangentes à \mathcal{C}_f et à \mathcal{C}_g aux points

d'abscisse $\frac{\pi}{2}$, sont parallèles puisqu'elles ont le même coefficient directeur.

119. 1. $f'(x) = 1 - 2\cos x$.

2. Sur $[0; \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}; 2\pi]$, $f'(x) \leq 0$ et sur $[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}]$, $f'(x) \geq 0$.

3.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f	0	$\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$	$\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$	2π	

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 422 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

132. 1. $f'(x) = 7(10x - 4)(5x^2 - 4x + 1)^6$.

$g'(x) = \frac{5x-2}{\sqrt{5x^2-4x+1}}$ et $h'(x) = \frac{-3(10x-4)}{(5x^2-4x+1)^4}$.

2. $f'(x) = 6(-2x+2)(-x^2+2x+3)^5$.

$g'(x) = \frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ et $h'(x) = \frac{-5(-2x+2)}{(-x^2+2x+3)^6}$.

133. 1. $f'(x) = 1 - 2\sin x$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	2π	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	2	$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	$\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$	$2\pi + 2$	

2. $f'(x) = 1 + 2\sin x$.

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	π	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$-\pi + 2$	$-\frac{5\pi}{6} + \sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$	$\pi + 2$	

3. $f'(x) = 1 + 2\cos x$.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	0	$\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$	$\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$	2π	

4. $f'(x) = 1 - 2\cos x$.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$	π	

► Fonctions à dérivées non continues

► On peut conjecturer que f est continue en 0, mais il est difficile de faire les autres conjectures.

► En [2], le logiciel calcule la limite de f en 0.

Réponse du logiciel : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Pour tout réel $x > 0$, $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ donc $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

On démontre de même que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ donc f est continue en 0.

$$\triangleright t(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

En [4], le logiciel calcule la limite en 0 de ce taux d'accroissement.

Pour tout réel $h > 0$, $-h \leq h \sin \frac{1}{h} \leq h$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 0$.

On démontre de même que $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 0$.

$\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = \lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

► En [5], le logiciel calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

En [6], le logiciel calcule la limite en 0 de $f'(x)$.

Réponse du logiciel : il n'y a pas de limite.

On suppose que f' est continue en 0.

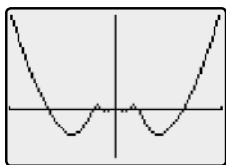
f' est continue en 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x}) = 0$, cela implique que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = 0$.

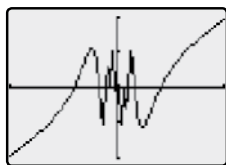
Or $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \neq 0$ donc f' n'est pas continue en 0.

► Non. Ici $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \neq 0$ alors que $f'(0) = 0$.

134 1.



Courbe représentative de f



Courbe représentant f'

2. On peut conjecturer que f est continue en 0, mais il est difficile de faire une conjecture sur la dérivabilité de f en 0 et sur la continuité de f' en 0.

3. • Pour tout réel $x > 0$, $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$ donc $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. De même $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, donc f est continue en 0.

$$\bullet \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = h \cos \frac{1}{h}$$

Pour tout réel $h > 0$, $-1 \leq \cos \frac{1}{h} \leq 1$ et donc $-h \leq h \cos \frac{1}{h} \leq h$.

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} (-h) = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

Pour tout réel $h < 0$, $-1 \leq \cos \frac{1}{h} \leq 1$ et donc $-h \geq h \cos \frac{1}{h} \geq h$.

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} (-h) = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4. $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$. Supposons que f' est continue en 0 et montrons qu'on aboutit à une absurdité.

Puisque f' est continue en 0, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (2x \cos \frac{1}{x}) = 0$, cela implique que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$.

D'après la définition de la limite d'une fonction en 0 à droite, l'intervalle $]0, 1 ; 0, 1[$ contient toutes les valeurs de $\sin \frac{1}{x}$ lorsque x est suffisamment proche de 0, c'est-à-dire lorsque x appartient à un intervalle de la forme $]0 ; \alpha[$.

Soit un entier k tel que $x_0 = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ appartient à $]0 ; \alpha[$, k existe

toujours : il suffit de prendre un entier supérieur à $\frac{1}{2\pi\alpha} - \frac{1}{4}$.

Alors, $\sin \frac{1}{x_0} = 1$, donc $\sin \frac{1}{x_0}$ n'appartient pas à $]0, 1 ; 0, 1[$: on aboutit à une absurdité.

On en déduit que f' n'est pas continue en 0.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Choisir la route la plus courte

L'objectif de ce TP est de déterminer, dans le cas particulier de deux points situés sur un même parallèle du globe terrestre, quelle est, de la route loxodromique et de la route orthodromique, celle qui est la plus courte pour joindre ces deux points.

L'utilisation du logiciel Geospace permet, dans un premier temps, de faire une conjecture. On démontre ensuite que comparer ces deux trajets nous amène à comparer les réels $\sin(kx)$ et $k \sin x$, ce que l'on fait dans les dernières questions, en étudiant la fonction qui à un réel x , associe $\sin(kx) - kx$.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

03_TS_TP1.g3w et 03_TS_correctionTP1.g3w (Geospace).

A. Avec un logiciel

1. Ouvrir le fichier 03_TS_TP1.g3w.

a. Pour créer le rayon du cercle c : Créer ; Numérique ; Calcul géométrique puis Rayon d'un cercle (Nom du cercle : c et Nom du rayon : r).

Faire de même pour créer le rayon R (Nom du cercle : C et Nom du rayon : R).

b. Pour créer l'angle \widehat{AID} : Créer ; Numérique ; Calcul géométrique puis Angle géométrique (Angle (3 pts) : AID et Nom de la mesure : a).

Faire de même pour créer l'angle \widehat{AOD} (Angle (3 pts) : AOD et Nom de la mesure : b).

c. $\ell = ar$ et $L = bR$.

Pour créer ℓ puis afficher sa valeur :

Créer ; Créer numérique puis Calcul algébrique (Expression du calcul : ar et Nom du calcul : l) ;

Créer ; Affichage puis Variable numérique déjà définie (Nom de la variable numérique : l).

Faire de même pour L.

2. En cliquant gauche sur le point I, le déplacer sur l'axe (Oz), puis faire de même avec les points A et D, en les déplaçant sur le cercle c.

3. On peut conjecturer que le plus court trajet est L.

B. Étude théorique

1. a. Le triangle ADI est isocèle en I. Soit J, le milieu de [AD]. La médiane (IJ) est aussi la bissectrice de l'angle \widehat{AID} et également la hauteur issue de I.

Dans le triangle AIJ rectangle en J, $\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{AJ}{AI} = \frac{AD}{2r}$

donc $AD = 2r \sin\left(\frac{a}{2}\right)$. De même, dans le triangle AOD isocèle en O, $AD = 2R \sin\left(\frac{b}{2}\right)$ donc : $AD = 2r \sin\left(\frac{a}{2}\right) = 2R \sin\left(\frac{b}{2}\right)$.

b. $2r \sin\left(\frac{a}{2}\right) = 2R \sin\left(\frac{b}{2}\right)$ donc $\frac{r}{R} \sin\left(\frac{a}{2}\right) = \sin\left(\frac{b}{2}\right)$.

2. Comme $\ell = ar$ et $L = bR$, l'inégalité (1) est équivalente à $ar > bR$ et donc à $\frac{r}{R} \times \frac{a}{2} > \frac{b}{2}$.

3. a. $0 \leq b \leq \pi$ donc $0 \leq \frac{b}{2} \leq \frac{\pi}{2}$. De même $0 \leq \frac{a}{2} \leq \frac{\pi}{2}$.

De plus, $0 < \frac{r}{R} \leq 1$ (car $0 < r \leq R$) donc $0 \leq \frac{r}{R} \times \frac{a}{2} \leq \frac{\pi}{2}$.
 $\frac{r}{R} \times \frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$ appartiennent à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction sinus est strictement croissante sur cet intervalle donc l'inégalité (2) est équivalente à $\sin\left(\frac{r}{R} \times \frac{a}{2}\right) > \sin\left(\frac{b}{2}\right)$.

b. Comme $\frac{r}{R} \sin\left(\frac{a}{2}\right) = \sin\left(\frac{b}{2}\right)$, l'inégalité (3) est équivalente à $\sin\left(\frac{r}{R} \times \frac{a}{2}\right) > \frac{r}{R} \sin\left(\frac{a}{2}\right)$ (4).

On en déduit que l'inégalité (1) est équivalente à l'inégalité (4).

4. $f'(x) = k \cos(kx) - k \cos x = k(\cos(kx) - \cos x)$.

$k < 1$ et $x \geq 0$ donc $kx \leq x$.

kx et x appartiennent à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction cosinus est décroissante sur cet intervalle donc $\cos(kx) \geq \cos x$.

k étant positif, on en déduit que $f'(x) \geq 0$ et donc f est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Comme $f(0) = 0$, pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \geq 0$ et donc $\sin(kx) \geq k \sin x$.

5. Si $r = R$, $\ell = L$ (car les deux trajets sont confondus), sinon, en utilisant le résultat de la question 4 avec $k = \frac{r}{R}$ et $x = \frac{a}{2}$, on obtient $\sin\left(\frac{r}{R} \times \frac{a}{2}\right) \geq \frac{r}{R} \sin\left(\frac{a}{2}\right)$. D'après la question 3. ceci équivalait à $\ell \geq L$: le plus court trajet est L.

TP 2 Un modèle mathématique pour les marées

L'objectif de ce TP est de modéliser un phénomène naturel (celui des marées) par une fonction trigonométrique dont l'expression est $f(x) = a \cos(bx + c) + d$.

En utilisant le logiciel GeoGebra, on fait varier a , b , c et d . L'observation des différentes sinusoides tracées par le logiciel permet de visualiser l'influence des réels a , b , c et d sur l'amplitude,

la période et le « déphasage » de la courbe. On calcule ensuite ces réels afin que la courbe représentative de f ait les mêmes caractéristiques que celle des marées.

Dans la dernière partie, il s'agit de déterminer, de manière autonome, une fonction modélisant un autre phénomène.

Fichiers associés sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 03_TS_TP2.ggb,

03_TS_correctionTP2.ggb,

03_TS_TP2-D.ggb et 03_TS_correctionTP2-D.ggb (GeoGebra).

A. Choix d'un modèle

$$1. m_h = \frac{10,8 + 10,6}{2} = 10,7 \text{ et } m_b = \frac{1,65 + 1,30}{2} \approx 1,5.$$

$$A = m_h - m_b = 10,7 - 1,5 = 9,2.$$

2. Entre deux marées hautes : $T = 19\text{h}35 - 7\text{h}07 = 12\text{h}28$.

Entre deux marées basses : $T = 13\text{h}40 - 1\text{h}14 = 12\text{h}26$.

$$T \approx 12,5 \text{ h.}$$

$$3. h_0 \approx 7 \text{ h.}$$

B. Observations sur « le rôle » de a , b , c et d

Ouvrir le fichier 03_TS_TP2.ggb. La courbe des marées est tracée.

1. Dans le menu Curseur, construire les curseurs a , b , c et d .

Taper $f(x) = a * \cos(b * x + c) + d$ dans le champ de saisie, puis déplacer les curseurs a , b , c ou d selon les questions posées.

Pour modifier les paramètres d'un curseur : cliquer droit sur le curseur, puis Propriétés. On peut alors modifier min, max et Incrément.

2. a. L'amplitude change.

b. La période change.

c. La courbe est translatée suivant des vecteurs colinéaires à \vec{i} .

d. La courbe est translatée suivant des vecteurs colinéaires à \vec{j} .

3. (C1) pourra être vérifiée après le calcul de a , (C2) après le calcul de b , (C3) après le calcul de c et (C4) après le calcul de d .

C. Calcul de a , b , c et d

1. a. et b. (C1) est vérifiée si $a = \frac{A}{2} = 4,6$.

2. a. Si $bT = 2\pi$ alors $b(x + T) + c = bx + c + 2\pi$ donc

$$f(x + T) = f(x) : (C2) \text{ est vérifiée.}$$

b. et c. $b = \frac{2\pi}{12,5} \approx 0,5$.

3. a. Comme a est positif, f admet un maximum en h_0 si $\cos(b \times h_0 + c) = 1$ et donc si $b \times h_0 + c = 0$.

b. et c. $c = -b \times h_0 = -0,5 \times 7 = -3,5$.

4. a. (C4) est vérifiée si $f(h_0) = m_h$

et donc si $a \cos(b \times h_0 + c) + d = m_h$.

b. et c. $d = 10,7 - 4,6 \cos(0,5 \times 7 - 3,5) = 6,1$.

5. La courbe est très proche de celle des marées.

D. Faire une prévision

a. Ouvrir le fichier 03_TS_TP2-D.ggb.

La courbe des marées est tracée.

Comme dans la partie B, créer les curseurs a , b , c et d et taper dans le champ de saisie : $f(x) = a * \cos(b * x + c) + d$.

$$m_h = \frac{9,1 + 8,7}{2} = 8,9 \text{ et } m_b = \frac{3,1 + 3,2}{2} \approx 3,2.$$

$$A = m_h - m_b = 8,9 - 3,2 = 5,7.$$

Entre deux marées hautes : $23\text{h}24 - 11\text{h}03 = 12\text{h}21$.

Entre deux marées basses : $17\text{h}35 - 5\text{h}13 = 12\text{h}22$.

$$T \approx 12,4 \text{ h et } h_0 \approx 11 \text{ h.}$$

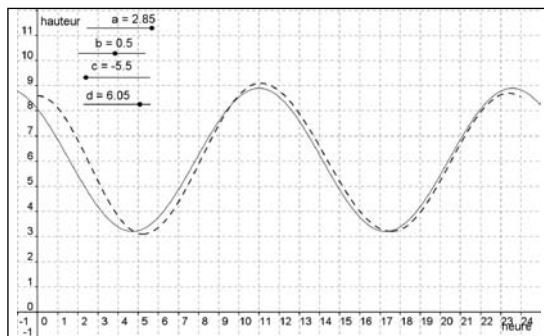
$$a = \frac{A}{2} = 2,85.$$

$$b = \frac{2\pi}{12,4} \approx 0,5.$$

$$c = -b \times h_0 = -0,5 \times 11 = -5,5.$$

$$d = 8,9 - 2,85 \cos(0,5 \times 11 - 5,5) = 6,05.$$

$$f(x) = 2,85 \cos(0,5x - 5,5) + 6,05.$$



b. À 15h la hauteur sera d'environ 4,9 m.

CAP VERS LE BAC

Correctif : dans le sujet commenté, le tableau de la réponse du

3. b. est :

α	0	α_0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	+	0	-
f	0	$f(\alpha_0)$	0

Sujet A

1. x appartient à $[0; 1]$.

2. Soit $A(x)$, l'aire du trapèze ABCD.

$$A(x) = \frac{(AB + CD) \times AH}{2} = \frac{(1 + 1 + 2x)\sqrt{1 - x^2}}{2}.$$

$$V(x) = A(x) \times BB' = 2(1 + x)\sqrt{1 - x^2}.$$

$$3. V'(x) = 2 \left[\sqrt{1 - x^2} + (1 + x) \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \right]$$

$$\text{donc } V'(x) = 2 \times \frac{1 - x - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4. $-2x^2 - x + 1$ s'annule en 0,5 et en -1.

x	0	0,5	1
$V'(x)$	+	0	-
V	2	$1,5\sqrt{3}$	0

Le volume est maximal pour $x = 0,5$ (en mètres).

Sujet B

1. Dans le triangle ABD rectangle en B,

$$\sin \alpha = \frac{BD}{AD} \text{ et } \cos \alpha = \frac{AB}{AD} \text{ d'où } BD = \frac{4 \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$CD = CB + BD = 7 + \frac{4 \sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ et } AD = \frac{4}{\cos \alpha}.$$

$$2. t_1 = \frac{CD}{60\,000} = \frac{7 + \frac{4 \sin \alpha}{\cos \alpha}}{60\,000} = \frac{7}{60\,000} + \frac{4 \sin \alpha}{60\,000 \cos \alpha}.$$

$$t_2 = \frac{AD}{30\,000} = \frac{4}{30\,000 \cos \alpha}.$$

$$3. t_1 > t_2 \text{ équivaut à } \frac{7}{60\,000} + \frac{4 \sin \alpha}{60\,000 \cos \alpha} - \frac{4}{30\,000 \cos \alpha} > 0$$

et donc à $f(\alpha) > 0$.

$$4. f'(\alpha) = 2 \frac{1}{(\cos \alpha)^2} - 4 \frac{\sin \alpha}{(\cos \alpha)^2} = \frac{2(1 - 2 \sin \alpha)}{(\cos \alpha)^2}.$$

Comme $(\cos \alpha)^2 > 0$, $f'(\alpha)$ est du signe de $1 - 2 \sin \alpha$.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	+	0	-
f	-0,5	$3,5 - 2\sqrt{3}$	$-\infty$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0,036$. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$ donc pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$, le lapin a le temps de traverser.

Sujet C

1. VRAI car $\lim_{x \rightarrow -0,5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5} f(x) = +\infty$.

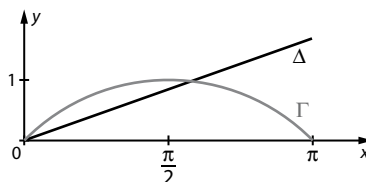
2. FAUX : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

3. VRAI : sur $]-\infty; -0,5[$, $f'(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{(4x^2 - 1)^2}$ donc $f'(x) > 0$ et f est croissante.

$$4. \text{FAUX : } f'(x) = \frac{2x(4x^2 - 1) - x^2(8x)}{2(4x^2 - 1)^2} \sqrt{\frac{4x^2 - 1}{x^2}} = \frac{-x\sqrt{4x^2 - 1}}{(4x^2 - 1)^2 |x|}.$$

Sujet D

1. a.



L'équation (1) a deux solutions dont l'une est 0 car Γ et Δ se coupent en deux points, dont l'un est l'origine du repère.

$$b. f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x.$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	-	0	+
f	0	$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

c. f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - 1 \approx -0,21$ et $f(\pi) \approx 1,57$. 0 est compris entre $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f(\pi)$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution x_0 dans $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

1.89	1.9045
1.9	1.0037

d'où $1,89 < x_0 < 1,90$.

$$2. a. T = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2} = \sin \theta \cos \theta.$$

$$b. S + T = \frac{2\theta \times 1^2}{2} = \theta \text{ donc } S = \theta - T = \theta - \sin \theta \cos \theta.$$

c. $S = T$ équivaut à $\theta - \sin \theta \cos \theta = \sin \theta \cos \theta$
et donc à $\theta - 2 \sin \theta \cos \theta = 0$ ou encore à $\theta - \sin(2\theta) = 0$.
En posant $\alpha = 2\theta$, on obtient $\frac{\alpha}{2} - \sin \alpha = 0$.
D'après la question 1, cette équation a pour solution x_0 .
 $S = T$ pour $\alpha = x_0 \approx 0,90$ à 0,01 près par excès.

Sujet E

1. Réponse a. 2. Réponse d. 3. Réponse b.

135 1. $f'(x) = \frac{(x-4) - x}{2(x-4)^2} \sqrt{\frac{x-4}{x}} = \frac{-2}{(x-4)^2} \sqrt{\frac{x-4}{x}}$.

$f'(x) < 0$ donc f est décroissante.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} f(x) = +\infty$.

Les droites d'équations respectives $y = 1$ et $x = 4$ sont des asymptotes à \mathcal{C}_f .

136 1. Dans $[0; \pi]$, l'équation $2 \sin x = \sqrt{2}$ a pour solutions $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

2. $f'(x) = \sqrt{2} - 2 \sin x$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$	+	0	-	+
f	2	$\frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}\pi}{4} - \sqrt{2}$	$\sqrt{2}\pi - 2$

137 (E) équivaut à $\cos(2x) - 2 \cos x = 0$.

Soit f définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \cos(2x) - 2 \cos x$.

$f'(x) = -2 \sin(2x) + 2 \sin x = 2 \sin x (1 - 2 \cos x)$.

Sur $[0; \pi]$, $\sin x \geq 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2 \cos x$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	0	-	0
f	-1	-1,5	3

Sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, f a pour maximum -1 : l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

Sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, f est continue et strictement croissante.

Comme 0 est compris entre $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f(\pi)$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

(E) a donc une unique solution dans $[0; \pi]$.

POUR ALLER PLUS LOIN

138 1. $g'(x) = 2 \cos(2x)$.

Sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(2x) \geq 0$: $g'(x) \geq 0$.

Sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \pi$ donc $\cos(2x) \leq 0$: $g'(x) \leq 0$.

g est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. a. Soit A l'aire du rectangle ABCD.

$A = AB \times BC = 2OB \times BC = 2 \cos \theta \sin \theta = \sin(2\theta)$.

b. Comme l'aire de ABCD est égale à $g(\theta)$, d'après la question 1, l'aire est maximale pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.

c. $BC = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $AB = 2OB = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

139 1. a. $f = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(X) = \sin X$.

b. $u'(x) = 2x$ et $v'(X) = \cos X$.

c. $f'(x) = 2x \cos(x^2 + 1) = u'(x)v'(u(x))$.

2. • Pour $f(x) = \cos(x^2 + 1)$:

$f = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(X) = \cos X$.

$u'(x) = 2x$ et $v'(X) = -\sin X$.

$f'(x) = -2x \sin(x^2 + 1) = u'(x)v'(u(x))$.

• Pour $f(x) = \sin(x^3 + 1)$:

$f = v \circ u$ avec $u(x) = x^3 + 1$ et $v(X) = \sin X$.

$u'(x) = 3x^2$ et $v'(X) = \cos X$.

$f'(x) = 3x^2 \cos(x^3 + 1) = u'(x)v'(u(x))$.

• Pour $f(x) = \cos(x^3 + 1)$:

$f = v \circ u$ avec $u(x) = x^3 + 1$ et $v(X) = \cos X$.

$u'(x) = 3x^2$ et $v'(X) = -\sin X$.

$f'(x) = -3x^2 \sin(x^3 + 1) = u'(x)v'(u(x))$.

3. On conjecture que $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$.

140 1. Pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$

donc $-x - 3 \leq g(x) \leq -x + 3$.

$-x - 3 \leq g(x)$: T' est au-dessous de \mathcal{C}_g .

T a pour équation $y = g'(0)x + g(0)$ et donc $y = -x + 3$.

$g(x) \leq -x + 3$: \mathcal{C}_g est au-dessous de T .

2. $g'(x) = -1$ équivaut à $-1 - 3 \sin x = -1$ ce qui équivaut à $\sin x = 0$ et donc à $x = k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

\mathcal{C}_g admet des tangentes de coefficient directeur -1 , aux points d'abscisses $k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse $k\pi$ est :

$y = -(x - k\pi) + g(k\pi)$ et donc $y = -x + 3 \cos(k\pi)$

(car $g(k\pi) = -k\pi + 3 \cos(k\pi)$).

Si k est pair, cette équation est $y = -x + 3$.

T est la tangente à \mathcal{C}_g aux points de coordonnées $(k\pi; -k\pi + 3)$ où k est un entier pair.

3. Si k est impair, cette équation est $y = -x - 3$.

T' est la tangente à \mathcal{C}_g aux points de coordonnées $(k\pi; -k\pi - 3)$ où k est un entier impair.

141 1. a. Sur $\left[-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right]$, $\frac{p^2}{4} - x^2 \geq 0$, donc f est bien définie

sur $\left[-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right]$.

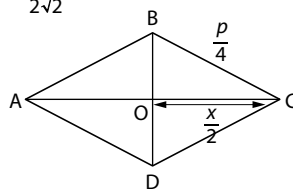
b. $f'(x) = \sqrt{\frac{p^2}{4} - x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} - x^2}} = \frac{p^2 - 8x^2}{4\sqrt{\frac{p^2}{4} - x^2}}$.

x	$-\frac{p}{2}$	$-\frac{p}{2\sqrt{2}}$	$\frac{p}{2\sqrt{2}}$	$\frac{p}{2}$			
f'(x)		-	0	+	0	-	
f	0	\searrow	$-\frac{p^2}{8}$	\nearrow	$\frac{p^2}{8}$	\searrow	0

f admet un maximum pour $x = \frac{p}{2\sqrt{2}}$.

2. a. Soit $A(x)$, l'aire de ces losanges, x appartenant à

$I = \left]0; \frac{p}{2}\right[$.



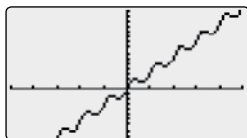
$$A(x) = 2OC \times OB = x \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{p^2}{4} - x^2}.$$

b. Sur I, $A(x) = 0,5f(x)$. Comme $0,5 > 0$, A et f ont les mêmes variations. D'après la question 1, l'aire est maximale pour

$$x = \frac{p}{2\sqrt{2}}. \text{ Pour } x = \frac{p}{2\sqrt{2}}, BD = 2 \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \left(\frac{p}{4\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{p}{2\sqrt{2}}.$$

Les deux diagonales ont alors la même longueur : le losange qui a l'aire maximale est le carré de périmètre p .

142 1. a. Courbe représentative de f :



On conjecture que f n'est pas monotone.

b. $f(0) = 0$; $f(0,25) = 1 + \frac{\pi}{4} \approx 1,8$; $f(0,5) = \frac{\pi}{2} \approx 1,6$.

$0 < 0,25$ et $f(0) < f(0,25)$: f n'est pas décroissante.

$0,25 < 0,5$ et $f(0,25) > f(0,5)$: f n'est pas croissante.

f n'est ni décroissante, ni croissante: f n'est pas monotone.

c. Pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) = \pi$.

d. (u_n) est une suite arithmétique de raison π .

Pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est croissante.

2. a. Pour tout entier n , $n < n+1$.

Comme g est croissante, $g(n) \leq g(n+1)$ et donc $u_n \leq u_{n+1}$: (u_n) est croissante.

b. La réciproque est: « Si u est croissante, alors g est croissante ». Cette proposition est fautive: dans la question 1, (u_n) est croissante mais f n'est pas croissante.

143 1. a. $\theta'(t) = \frac{2\pi}{T} \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$.

b. $\theta'(0) = 0$ donc $\cos(\varphi) = 0$: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

2. a. $\theta_0 = 5^\circ = \frac{5\pi}{180}$ radians et $T = 2$:

$$\theta(t) = \frac{5\pi}{180} \sin\left(\frac{2\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{36} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

b. $\theta(t+2) = \theta(t)$ donc θ a pour période 2.

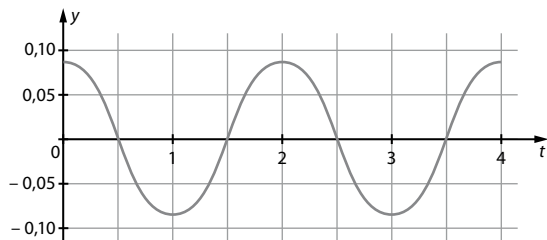
c. $\theta'(t) = \frac{\pi^2}{36} \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{36} \sin(\pi t)$.

Si $t \in [0; 1]$, $\pi t \in [0; \pi]$ donc $\sin(\pi t) \geq 0$: $\theta'(t) \leq 0$.

Si $t \in [1; 2]$, $\pi t \in [\pi; 2\pi]$ donc $\sin(\pi t) \leq 0$: $\theta'(t) \geq 0$.

t	0	1	2
$\theta'(t)$	0	-	0
θ	$\frac{\pi}{36}$	$-\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{36}$

3. Courbe représentative de la fonction θ :



4. a. $\theta(0,5) = 0$: il est à sa position d'équilibre.

b. $\theta(1) \approx -0,09$ radian: il est à -5° de sa position d'équilibre.

c. $\theta(1,5) = 0$: il est à sa position d'équilibre.

d. $\theta(2) \approx 0,09$ radian: il est à 5° de sa position d'équilibre.

e. $\theta(3) \approx -0,09$ radian: il est à -5° de sa position d'équilibre.

144 Partie A

1. \mathcal{C}_f passe par les points $A(0; 0)$, $B(4; 1)$ et $I(2; 0,5)$ donc $f(0) = 0$, $f(4) = 1$ et $f(2) = 0,5$.

Les tangentes à la courbe en A et B sont horizontales donc

$$f'(0) = 0 \text{ et } f'(4) = 0 \text{ avec } f'(x) = \frac{\pi}{4} b \cos\left(c + \frac{\pi x}{4}\right).$$

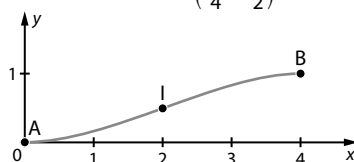
$$\text{On résout } \begin{cases} a + b \sin c = 0 \\ a + b \sin(c + \pi) = 1 \\ a + b \sin\left(c + \frac{\pi}{2}\right) = 0,5 \end{cases} \text{ qui est équivalent à } \begin{cases} a + b \sin c = 0 \\ \frac{\pi}{4} b \cos c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b \sin c = 0 \\ a - b \sin c = 1 \\ a + b \cos c = 0,5 \\ b \cos c = 0 \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} a = 0,5 \\ b \sin c = -0,5 \\ b \cos c = 0 \end{cases}$$

Comme $b \neq 0$, et pour $c \in [0; \pi]$, $a = 0,5$, $c = \frac{\pi}{2}$ et

$$b = -0,5 \text{ donc } f(x) = 0,5 - 0,5 \sin\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

2.



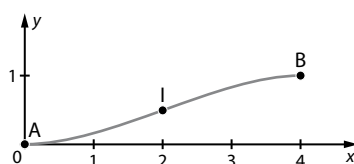
Partie B

1. $g(0) = 0$, $g(4) = 1$ et $g(2) = 0,5$ donc \mathcal{C}_g passe par les points A, B et I.

$g'(x) = -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{8}x$ donc $g'(0) = 0$ et $g'(4) = 0$: les tangentes à la courbe en A et B sont horizontales.

\mathcal{C}_g vérifie bien toutes les contraintes.

2.



Partie C

On recherche le maximum de f' sur $[0; 4]$:

$$f'(x) = \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi x}{4} \text{ et } f''(x) = \frac{\pi^2}{32} \cos \frac{\pi x}{4}.$$

Sur $[0; 2]$, $f''(x) \geq 0$ donc f' est croissante.

Sur $[2; 4]$, $f''(x) \leq 0$ donc f' est décroissante.

f' admet un maximum pour $x = 2$. Ce maximum est égal à $f'(2) = \frac{\pi}{8}$: la pente maximale de \mathcal{C}_f est $\frac{\pi}{8}$.

On recherche le maximum de g' sur $[0; 4]$:

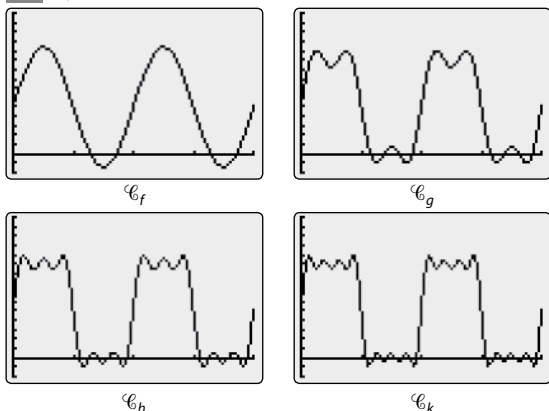
$$g'(x) = -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{8}x \text{ et } g''(x) = -\frac{3}{16}x + \frac{3}{8} = \frac{3}{16}(-x+2).$$

Sur $[0; 2]$, $g''(x) \geq 0$ donc g' est croissante.

Sur $[2; 4]$, $g''(x) \leq 0$ donc g' est décroissante.

g' admet un maximum pour $x = 2$. Ce maximum est égal à $g'(2) = \frac{3}{8}$: la pente maximale de \mathcal{C}_g est $\frac{3}{8}$.

145 1.



Les courbes sont de plus en plus « proches » du signal d'origine.

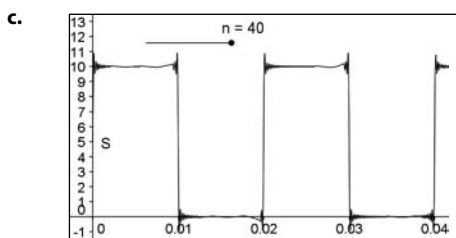
2. $S_0(t) = f(t)$; $S_1(t) = g(t)$; $S_2(t) = h(t)$ et $S_3(t) = k(t)$.

3. a. et b. Avec le logiciel GeoGebra :

– on règle les graduations sur l'axe des abscisses (de -0,01 à 0,05) ;

– on construit un curseur n (min : 0. max : 50) et dans le champ de saisie, on saisit les fonctions g et S indiquées dans l'énoncé.

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 03_TS_exercice145.ggb (GeoGebra).



On peut également utiliser le logiciel Xcas.

```
f:=unapply(5,x);
saisir(n);
k:=0;
tantque k<n faire
p:=2k+1;
f:=unapply(f(x)+(20/(p*pi))*sin(100*p*pi*x),x);
k:=k+1;
afficher(k);
afficher(f);
ftantque;
graphe(f(x),x=0..0.05)
```

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 03_TS_exercice145.xws (Xcas).

146 1. a. $BC = 2BH = 2\sin \alpha$. $AH = AO + OH = 1 + \cos \alpha$.

b. Aire du triangle = $\frac{BC \times AH}{2} = \sin \alpha (1 + \cos \alpha)$.

2. a. $f'(\alpha) = \cos \alpha (1 + \cos \alpha) + \sin \alpha (-\sin \alpha)$

$f'(\alpha) = \cos \alpha + \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1$.

b. $P(X) = 2X^2 + X - 1 = (2X - 1)(X + 1)$.

c. $f'(\alpha) = (2\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1)$.

d. Sur I , $\cos \alpha + 1 > 0$ donc $f'(\alpha)$ est du signe de $2\cos \alpha - 1$.

α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	+	0	-
f	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	1

e. L'aire de ABC est maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

ABC est alors un triangle équilatéral.

147 1. a. $f'(x) = \frac{3\cos x(2 + \cos x) - 3\sin x(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} - 1$

$f'(x) = \frac{3 + 6\cos x - (2 + \cos x)^2}{(2 + \cos x)^2} = \frac{-\cos^2 x + 2\cos x - 1}{(2 + \cos x)^2}$.

$(2 + \cos x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-\cos^2 x + 2\cos x - 1$.

b. $-\cos^2 x + 2\cos x - 1 = -(\cos x - 1)^2$ donc $f'(x) \leq 0$: f est décroissante sur I .

f est décroissante sur I et $f(0) = 0$ donc pour tout réel x appartenant à I , $f(x) \leq 0$.

2. a. $g'(x) = \frac{1}{3} \left(2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) - 1 = \frac{2\cos^3 x + 1 - 3\cos^2 x}{3\cos^2 x}$.

Comme $(\cos x - 1)^2(2\cos x + 1) = 2\cos^3 x + 1 - 3\cos^2 x$:

$g'(x) = \frac{(\cos x - 1)^2(2\cos x + 1)}{3\cos^2 x}$.

b. $(\cos x - 1)^2 \geq 0$ et sur I , $2\cos x + 1 > 0$ et $3\cos^2 x > 0$ donc $g'(x) \geq 0$: g est croissante sur I .

g est croissante et $g(0) = 0$ donc pour tout réel x appartenant à I , $g(x) \geq 0$.

3. $f(x) \leq 0$: $\frac{3\sin x}{2 + \cos x} - x \leq 0$ donc $\frac{3\sin x}{2 + \cos x} \leq x$.

$g(x) \geq 0$: $\frac{2\sin x + \tan x}{3} - x \geq 0$ donc $\frac{2\sin x + \tan x}{3} \geq x$.

D'où $\frac{3\sin x}{2 + \cos x} \leq x \leq \frac{2\sin x + \tan x}{3}$.

4. Avec l'encadrement précédent et pour $x = \frac{\pi}{6}$:

$\frac{3}{4 + \sqrt{3}} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\sqrt{3} + 1}{3\sqrt{3}}$, d'où $0,5233 < \frac{\pi}{6} < 0,5258$;

$\frac{18}{4 + \sqrt{3}} \leq \pi \leq \frac{2\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}}$, d'où $3,1402 < \pi < 3,1548$.

$\frac{\pi}{6} \approx 0,5233$ à 0,0025 près par défaut.

$\pi \approx 3,1402$ à 0,0146 près par défaut.

148 Partie A

Correctif : Dans la piste de la question B. 3. b., il faut lire « On montrera que, sur $\left] \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$, ... » et non pas « On montrera que, sur I , ... ».

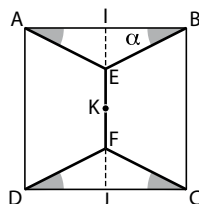
1. Soit I le milieu de $[AB]$, $EF = 1 - 2EI$.

Dans le triangle EIB rectangle en I , $\tan \alpha = \frac{EI}{IB} = 2EI$ donc

$EF = 1 - \tan \alpha$.

$\cos \alpha = \frac{IB}{EB}$ donc $EB = \frac{1}{2\cos \alpha}$.

$f(\alpha) = EF + 4EB = 1 - \tan \alpha + \frac{2}{\cos \alpha} = 1 + \frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$.



2. a. $f'(\alpha) = \frac{-\cos \alpha (\cos \alpha) - (2 - \sin \alpha)(-\sin \alpha)}{(\cos \alpha)^2}$

donc $f'(\alpha) = \frac{-1 + 2\sin \alpha}{(\cos \alpha)^2}$.

b.	α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
	$f'(\alpha)$	-	0	+
	f	3	$1+\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$

f admet un minimum en $\frac{\pi}{6}$.

c. $150(1+\sqrt{3}) \approx 409,8$. La longueur totale minimale du réseau est d'environ 410 km.

Partie B

1. Soit I, J et K les milieux respectifs de [AB], [CD] et [IJ].

Par construction : $BI \leq BE \leq BK$, donc $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Pour tout réel x appartenant à I :

$$g(x) = 4BE + 1 - 2EI = 4x + 1 - 2\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}.$$

3. a. $g(x) = 4x + 1 - \sqrt{4x^2 - 1}$. g est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et

$$g'(x) = 4 - \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} = \frac{4\sqrt{4x^2 - 1} - 4x}{\sqrt{4x^2 - 1}}.$$

b. Sur $\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\sqrt{4x^2 - 1} > 0$ donc $g'(x) \leq 0$ équivaut à

$$4\sqrt{4x^2 - 1} - 4x \leq 0 \text{ et donc } \sqrt{4x^2 - 1} \leq x.$$

Comme $x > 0$, cette inéquation est équivalente à $4x^2 - 1 \leq x^2$ et donc à $3x^2 - 1 \leq 0$.

$g'(x) \leq 0$ a pour ensemble de solutions : $\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

c.	x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	$g'(x)$	-	0	+
	g	3	$1+\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$

g admet un minimum en $\frac{\sqrt{3}}{3}$: $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}$.

On retrouve le résultat de la partie A.

Prises d'initiatives

149 Comme $A(0; 1)$ et $M(x; x^2)$:

$$AM = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}.$$

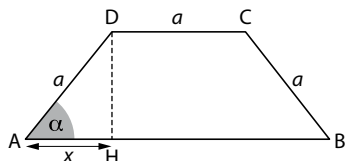
Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$.

$$f'(x) = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \frac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}.$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
f	$+\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

La distance AM est minimale lorsque M a pour abscisse $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

150



• On pose $AH = x$, x appartenant à $[0; a]$.

Soit $f(x)$, l'aire du trapèze ABCD.

$$f(x) = \frac{(AB + CD)DH}{2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + (a + x) \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{(x + a)(-2x + a)}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Sur $[0; a]$, $x + a > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x + a$.

x	0	$0,5a$	a
$f'(x)$	+	0	-
f	a^2	$0,75\sqrt{3}a^2$	0

Le trapèze dont l'aire est maximale est tel que $AB = 2a$.

• On peut également exprimer l'aire en fonction de α , α appartenant à $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit $g(\alpha)$, l'aire du trapèze. $g(\alpha) = a^2 \sin \alpha + a^2 \cos \alpha \sin \alpha$.

$$g'(\alpha) = a^2(\cos \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = a^2(2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1)$$

$$g'(\alpha) = a^2(\cos \alpha + 1)(2\cos \alpha - 1).$$

α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\alpha)$	+	0	-
g	0	$0,75\sqrt{3}a^2$	a^2

Le trapèze dont l'aire est maximale est tel que $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ($AH = a \cos \frac{\pi}{3} = 0,5a$ et donc $AB = 2a$).

151 Soit f définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \cos x - x^2$:

$$f'(x) = -\sin x - 2x.$$

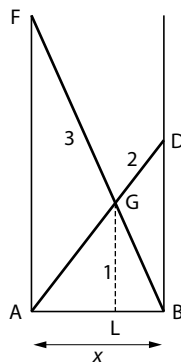
Sur $[0; \pi]$, $-\sin x \leq 0$ et $-2x \leq 0$ donc $f'(x) \leq 0$: f est strictement décroissante.

Sur $[0; \pi]$, f est continue et strictement décroissante. Comme $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1 - \pi^2$, 0 est compris entre $f(0)$ et $f(\pi)$ donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution x_0 dans $[0; \pi]$.

.82	.00982
.83	-.014

d'où $0,82 < x_0 < 0,83$.

152 On a $0 < x < 2$.



D'après le théorème de Pythagore :

$$DB = \sqrt{4 - x^2} \text{ et } AF = \sqrt{9 - x^2}.$$

D'après le théorème de Thalès :

$$AL = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \text{ et } BL = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Comme $AL + BL = x$,

$$\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = x$$

et donc $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = 1$.

Soit f la fonction définie sur $]0; 2[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

$$f'(x) = \frac{x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}.$$

Sur $]0; 2[$, $x > 0$, $4-x^2 > 0$ et $9-x^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $]0; 2[$.

f est continue, strictement croissante sur $]0; 2[$.

Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \frac{5}{6}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$, 1 appartient à $\left] \frac{5}{6}; +\infty \right[$

donc l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution dans $]0; 2[$.

1.23	99956
1.24	1.0033

d'où $x \approx 1,23$ à 0,01 près par défaut.

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonction exponentielle		
Fonction $x \mapsto \exp(x)$.	☐ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur \mathbb{R} , égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0. ☐ Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.	La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise.
Relation fonctionnelle, notation e^x .	• Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Connaître et exploiter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.	On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto \exp(u(x))$, notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisées dans des domaines variés. On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de $\frac{e^x - 1}{x}$. ⇔ [SPC et SVT] Radioactivité. (AP) Étude de phénomènes d'évolution.

B Notre point de vue

L'approche de la fonction exponentielle par les équations différentielles est abandonnée dans ce nouveau programme. Conformément au programme, nous avons introduit la fonction exponentielle comme unique fonction dérivable sur \mathbb{R} , égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0. L'unicité est démontrée. La plupart des démonstrations sont faites. La notation « exp », indispensable tant que la relation fonctionnelle et ses conséquences n'ont pas été mises en place, est ensuite remplacée le plus souvent par la notation classique. Les deux notations figurent dans les contenus du programme.

Dans le premier paragraphe figurent la relation fonctionnelle et le sens de variation de la fonction exponentielle. Un deuxième paragraphe est consacré aux propriétés de la relation fonctionnelle qui sont déduites de la relation fonctionnelle. On introduit le nombre e et la notation e^x . Cette partie se conclut par la résolution des équations et des inéquations. Mais introduire la fonction exponentielle avant la fonction logarithme népérien interdit de résoudre de manière exacte les équations $e^x = a$ ($a > 0$) sauf dans des cas simples.

Un troisième paragraphe est consacré à l'étude des limites. Dans ce paragraphe figurent les démonstrations au programme. Il se conclut par la représentation graphique de la fonction exponentielle.

Le dernier paragraphe est consacré à l'étude des fonctions du type $x \mapsto \exp(u(x))$.

Pour les savoir-faire du cours nous avons privilégié des exercices simples. Dès le départ, la définition de la fonction exponentielle permet d'étudier le sens de variation de fonctions élémentaires. Plusieurs exercices de simplification d'expressions sont proposés. Les calculs de limites avec la fonction exponentielle introduisent des formes indéterminées. Les exercices avec les fonctions de la forme $e^{u(x)}$ contiennent des calculs de limites, de dérivées et l'étude d'une fonction. L'utilisation des TICE a été développée à plusieurs endroits dans le chapitre.

Les notions abordées dans le chapitre 4

1. La fonction exponentielle
3. Limites liées à la fonction exponentielle

2. Propriétés de la fonction exponentielle
4. Fonctions de la forme e^u

C Avant de commencer

Le QCM et les exercices proposés dans cette page permettent de faire le point d'une part sur le calcul avec les exposants et d'autre part sur le calcul de dérivées, en particulier de fonctions du type $x \mapsto f(ax + b)$ qui seront utilisées dans certaines démonstrations du cours. L'introduction donne une brève idée de la modélisation en prenant comme exemple la désintégration radioactive illustrée par la méthode de datation au carbone 14.

Voir livre page 422 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

Correctif : pour l'exercice 10, la réponse du b. est $x \mapsto -af'(-ax)$.

D Activités

Activité 1 Courbes à sous-tangente constante

Dans cette activité, il s'agit d'introduire la fonction exponentielle à partir d'une situation géométrique qui conduit à la condition $f' = f$ ou $f' = -f$. Cela permet de s'apercevoir que les fonctions connues par les élèves ne suffisent pas et ainsi de motiver l'introduction d'une nouvelle fonction.

1. On obtient pour équation de T : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ soit encore $y = xf'(a) + f(a) - af'(a)$.

2. Le point P a pour ordonnée 0. Son abscisse est solution de l'équation $xf'(a) + f(a) - af'(a) = 0$.

D'où $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.

3. L'abscisse de H est égale à a . Donc :

$$PH = \left| a - \left(a - \frac{f(a)}{f'(a)} \right) \right| = \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| = 1,$$

d'après la condition sur les fonctions f cherchées.

4. Pour tout réel a , l'égalité précédente conduit à la condition $|f(a)| = |f'(a)|$; donc $f = f'$ ou $f = -f'$.

5. Il n'existe pas de fonctions usuelles de la classe de Première qui vérifie cette condition.

Activité 2 Suite de nombres

L'objectif de cette activité est d'obtenir une valeur approchée de e . Dans la première question, une construction géométrique est proposée. Dans la question 2c, il s'agit simplement d'utiliser le fichier AlgoBox fourni.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 04_TS_activite2.alg (AlgoBox) et 04_TS_correctionactivite2.ggb (GeoGebra).

1. La figure peut être obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie.

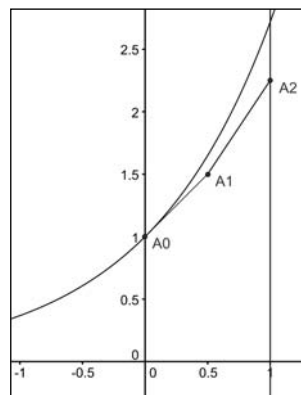
a. Le point A_0 a pour coordonnées $(0; 1)$.

b. Le coefficient directeur de la tangente est égal à e^0 . La tangente, en A_0 , à la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction exponentielle a pour équation $y = x + 1$.

c. Si $x = 0,5$ alors $y = 1,5$: le point A_1 a pour coordonnées $(0,5; 1,5)$.

d. La tangente en un point de la courbe de la fonction exponentielle a pour coefficient directeur le nombre dérivé de la fonction, c'est-à-dire l'ordonnée du point. Le point A_1 a pour ordonnée 1,5 qui est donc le coefficient directeur de la droite. Son équation est $y = 1,5x + 0,75$.

e. Le point d'abscisse 1 de cette tangente a donc pour ordonnée 2,25. Le point A_2 a pour coordonnées $(1; 2,25)$. 2,25 est une première approximation du nombre e car l'ordonnée du point de la courbe \mathcal{C} d'abscisse 1 est e^1 , soit e . Voici les tracés correspondants à cette question :



2. Chacun des intervalles a pour longueur $\frac{1}{n}$.

a. Sur l'intervalle $[x_k; x_{k+1}]$, la tangente qui approche la courbe \mathcal{C} a pour coefficient directeur y_k . De plus elle passe par le point $A_k(x_k; y_k)$. Elle a donc pour équation $y = y_k(x - x_k) + y_k$.

b. On calcule y_{k+1} en fonction de y_k : $y_{k+1} = y_k(x_{k+1} - x_k) + y_k$.

Or $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$ donc :

$$y_{k+1} = \frac{1}{n} y_k + y_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right) y_k.$$

Pour une valeur de n donnée, l'algorithme fournit une approximation du nombre e . En outre, il fournit dans un repère les différents points A_k .

c. Pour $n = 4$, on obtient $e \approx 2,4141063$.
 Pour $n = 50$, on obtient $e \approx 2,691588$.
 Pour $n = 1\,000$, on obtient $e \approx 2,7182546$.

Activité 3 Tangente au point d'abscisse 0 à la courbe de l'exponentielle

Dans cette activité, on introduit la limite en 0 du rapport $\frac{\exp(x) - 1}{x}$.
 On utilise le fichier GeoGebra fourni.

Grâce au curseur qui donne le coefficient directeur d'une sécante (AM), on amène cette droite en coïncidence avec la tangente T déjà tracée. D'où l'identification de la limite du rapport avec le nombre dérivé en 0 de la fonction exponentielle.

Fichier associé sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 04_TS_activite3.ggb (GeoGebra).

Sur la figure sont représentées la courbe de la fonction exponentielle et la tangente en A, point d'abscisse 0 de la courbe. On a construit un curseur m fournissant l'abscisse d'un point M de la courbe, voisin de A. Pour cela, on fait varier le curseur entre -1 et 1. Enfin, on a tracé la droite (AM). Le logiciel affiche le coefficient directeur de la droite (AM) lorsqu'on la fait tourner autour du point A.

1. La tangente en A a pour coefficient directeur e^0 , c'est-à-dire 1.
2. Lorsque l'abscisse m du point M tend vers 0, la droite (AM) « tend » vers la tangente en A à la courbe.
3. Le rapport $\frac{\exp(x) - 1}{x}$ représente le coefficient directeur de la droite (AM) si M est un point quelconque de la courbe d'abscisse x . Lorsque x tend vers 0, la droite a pour position limite la tangente en A qui a pour coefficient directeur 1. On peut donc conjecturer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Activité 4 Radioactivité

Cette activité permet un lien avec les deux autres matières scientifiques : SPC et SVT, conformément au programme. Elle est l'occasion d'introduire des fonctions e^u particulières en étudiant les fonctions $x \mapsto e^{-kx}$ avec k strictement positif.

1. a. Si $N(0) = 2 \times 10^{23}$, le nombre de noyaux restants au bout de 100 s est voisin de $1,38 \times 10^{23}$ et au bout de 200 s, ce nombre est voisin de $9,54 \times 10^{22}$.

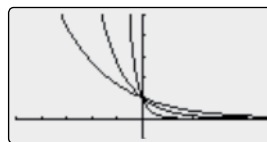
b. On doit déterminer t tel que $N(t) = \frac{1}{2} N(0)$, c'est-à-dire résoudre l'équation $e^{-0,0037t} = \frac{1}{2}$.

c. On programme une table de valeurs pour la fonction $x \mapsto e^{-0,0037x}$. On obtient :

X	Y1
186	0.5024
187	0.5006
188	0.4987
189	0.4969

Une approximation de la demi-vie du polonium est donc 187 s soit 3 min 7 s.

2. a. Ci-dessous les représentations graphiques des fonctions $f_{0,5}$, f_1 et f_3 .



b. On peut conjecturer que :

- les fonctions f_k sont décroissantes sur \mathbb{R} ;
- elles ont pour limites $+\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$;
- si $k < k'$: pour $x < 0$ on a $f_k(x) < f_{k'}(x)$ et pour $x \geq 0$, on a $f_k(x) \geq f_{k'}(x)$.

c. La courbe représentative de f_1 est représentée en bleu.

d. Soit $k < k'$.

Si $x < 0$ alors $kx > k'x$, donc $-kx < -k'x$.

Puisque la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} , on a donc $e^{-kx} < e^{-k'x}$ soit $f_k(x) < f_{k'}(x)$.

Si $x \geq 0$ alors $kx \leq k'x$, donc $-kx \geq -k'x$.

Puisque la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} , on a donc $e^{-kx} \geq e^{-k'x}$ soit $f_k(x) \geq f_{k'}(x)$.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 La fonction exponentielle est croissante donc :

- a. Vraie. b. Fausse.

2 1. a. $B < A$. b. $A < B$.

2. a. On a $x \leq 0$ donc $\exp(x) \leq \exp(0)$ soit $\exp(x) \leq 1$.

b. Soit $x > 1$ donc $\exp(x) > \exp 1$ car la fonction exponentielle est strictement croissante.

Or $\exp 1 = e$ donc $\exp(x) > e$.

c. Si $x \geq 0$, $-x \leq x$ et ainsi $\exp(-x) \leq \exp(x)$.

d. Pour x strictement positif, $x < 2x$ donc $\exp(x) < \exp(2x)$.

3 a. Vraie car $\exp(x) > 0$ sur \mathbb{R} .

b. Vraie car $\exp(1) = e$.

c. Fausse car $\exp(1) = e \neq 0$

d. Vraie car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$.

4 1. $f'(x) = \exp(x)$.

2. $f'(x) = \exp(x) + 2$.

5 1. $f'(x) = 2x - \exp(x)$.

2. $f'(x) = 5 \exp(x)$.

6 1. $f'(x) = 2 \exp(x) + 2x \exp(x) = 2(1 + x) \exp(x)$.

2. $f'(x) = 2x \exp(x) + x^2 \exp(x) = x(2 + x) \exp(x)$.

7 La fonction f est un quotient de deux fonctions donc :

$$f'(x) = \frac{2 \exp(x) \times x - 2 \exp(x) \times 1}{x^2} = \frac{2 \exp(x) \times (x - 1)}{x^2}.$$

- 8** 1. $f'(x) = \exp(x)$. La fonction f est croissante sur \mathbb{R} .
 2. $f'(x) = -\exp(x)$. La fonction f est décroissante sur \mathbb{R} .
- 9** 1. $f'(x) = \exp(x) + 3$; $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur \mathbb{R} .
 2. $f'(x) = 3 \exp(x)$ donc f est croissante sur \mathbb{R} .
- 10** 1. $f'(x) = 3 \exp(x) + 3 \exp(x) = 3(1+x) \exp(x)$. $f'(x)$ a même signe que $1+x$ donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; -1[$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[-1; +\infty[$. Ainsi f est décroissante sur $]-\infty; -1[$ et croissante sur $[-1; +\infty[$.
 2. La fonction f est un quotient de fonctions.
 Donc $f'(x) = \frac{1 \times \exp(x) - x \times \exp(x)}{(\exp(x))^2} = \frac{(1-x)\exp(x)}{(\exp(x))^2}$.
 Ainsi $f'(x)$ a même signe que $1-x$.
 Sur $]-\infty; 1[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante.
 Sur $]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante.
- 11** Voir livre page 422.
- 12** $A = \exp(8)$; $B = \exp(3)$.
- 13** a. $\exp(-x) \exp(x) = 1$.
 b. $\exp(-x) \exp(-x) = \exp(-2x)$.
 c. $\exp(x) \exp(2x) = \exp(3x)$.
 d. $\exp(-2x) \exp(4x) = \exp(2x)$.
- 14** a. $\frac{\exp(x+2)}{\exp(x)} = \exp(2)$. b. $\frac{\exp(3x)}{\exp(x)} = \exp(2x)$.
 c. $\frac{\exp(-3x)}{\exp(-2x)} = \exp(-x)$. d. $\frac{\exp(-3+x)}{\exp(x+1)} = \exp(-4)$.
- 15** a. $\exp(2x) = e^{2x}$. b. $(\exp(x))^3 = (e^x)^3$.
 c. $\frac{\exp(x+2)}{\exp(x)} = \frac{e^{x+2}}{e^x}$. d. $\frac{\exp(-x)\exp(2x)}{\exp(3x)} = \frac{e^{-x} \times e^{2x}}{e^{3x}}$.
- 16** 1. $e^{-5} \times e^3 = e^{-2}$. 2. $(e^3)^2 \times e^2 = e^8$.
 3. $\frac{e^5}{e^2} = e^3$. 4. $\frac{e^{-5}}{e^3} = e^{-8}$.
- 17** 1. $\frac{e^3 \times e^{-5}}{e^2} = e^{-4}$. 2. $\frac{e^{-4} \times e^3}{e^{-1} \times e^5} = e^{-5}$.
 3. $e^{-2} \times (e^2)^3 = e^4$. 4. $\frac{e^2 \times e^{-3}}{e^3 \times e^{-2}} = e^{-2}$.
- 18** 1. $e^x \times e^{-2x} = e^{-x}$. 2. $(e^x)^2 \times e^{-x} = e^x$.
 3. $e^{2x} \times e^{-2x} = 1$. 4. $(e^x)^2 \times (e^{-x})^3 = e^{-x}$.
- 19** 1. $e^{x+2} \times e^{-x} = e^2$. 2. $e^{x+1} \times e^{3-x} = e^4$.
 3. $(e^{2x})^3 \times (e^{-x})^2 = e^{4x}$. 4. $(e^{1-x})^2 \times e^{2x} = e^2$.
- 20** Voir livre page 422.
- 21** 1. L'équation équivaut à $2x = x$. La solution est 0.
 2. La solution est 0.
- 22** 1. La solution est 0.
 2. La solution est 0.
- 23** 1. L'équation équivaut à $2x + 1 = 2 - x$ qui a pour solution $\frac{1}{3}$.
 2. La solution est $-\frac{1}{4}$.
- 24** 1. L'équation équivaut à $x^2 = 4$. Les solutions sont -2 et 2 .
 2. L'équation équivaut à $x^2 - 1 = 2x$. Les solutions sont $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.
- 25** 1. L'équation équivaut à $3x = 0$. La solution est 0.
 2. $e^{2x} > 0$, donc l'équation n'a pas de solution.
- 26** 1. L'équation a pour solution -1 .
 2. On pose $X = e^x$. L'équation devient $X^2 + 2X + 1 = 0$. On résout $e^x = -1$, équation qui n'a pas de solution.
- 27** 1. L'équation a pour solution $-\frac{1}{2}$ et 1 .

2. On pose $X = e^x$. On est conduit à résoudre les équations $e^x = -\frac{1}{2}$ et $e^x = 1$. Il y a donc une seule solution 0.
- 28** 1. L'inéquation équivaut à $x + 1 \leq 2$. Elle a pour ensemble solution $]-\infty; 1]$.
 2. L'inéquation équivaut à $1 - 2x \geq x$. Elle a pour ensemble solution $]-\infty; \frac{1}{3}]$.
- 29** 1. L'inéquation équivaut à $-x + 6 \leq 2x$. Elle a pour ensemble solution $[2; +\infty[$.
 2. L'inéquation équivaut à $e^{-x} < e^0$ soit $-x < 0$ ou encore $x > 0$. L'ensemble solution est $]0; +\infty[$.
- 30** 1. L'inéquation équivaut à $-3x + 2 < 2x - 3$ ou $5 < 5x$. Elle a pour ensemble solution $]1; +\infty[$.
 2. On sait que pour tout réel x , $e^x > 0$. Donc $e^x \geq -1$ pour tout réel x . L'inéquation a pour ensemble solution l'ensemble \mathbb{R} .
- 31** 1. L'inéquation $e^{-x} < e$ équivaut à $-x < 1$ ou encore à $x > -1$. Elle a pour ensemble solution $]-1; +\infty[$.
 2. L'inéquation $e^x < \frac{1}{e^x}$ équivaut à $e^x < e^{-x}$ ou encore à $x < -x$ soit $2x < 0$. L'ensemble solution est $]-\infty; 0]$.
- 32** Voir livre page 422.
- 33** $A(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$, $A(0) = 0$ et $A(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.
 $B(x)$ est un produit dont un des facteurs est e^{-x} positif sur \mathbb{R} .
 Donc $B(x)$ a le signe de $1 - x^2$. On en déduit :
 $B(x) < 0$ sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$; $B(x) \geq 0$ sur $[-1; 1]$.
 On peut factoriser $C(x)$. $C(x) = e^x(e^x - 1)$. Donc $C(x)$ a le signe de $e^x - 1$. Ainsi $C(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $C(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.
- 34** 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2e^x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2e^x) = -\infty$.
 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 3) = 3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 3) = +\infty$.
 3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^x) = -\infty$.
- 35** 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x) = +\infty$.
 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x - 1) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2x - 1) = +\infty$.
- 36** 1. a. Il s'agit de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».
 b. On a $f(x) = x(e^x - 2)$.
 c. La fonction f s'écrit alors sous forme d'un produit de deux fonctions qui ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
 Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^x - 2x) = +\infty$.
 2. On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x - 2x) = +\infty$.
- 37** Voir livre page 422.
- 38** 1. On peut conjecturer que la limite en 0 est $+\infty$ et la limite en $+\infty$ est $+\infty$.
 2. On a $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1$.
 Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} = +\infty$ car $x > 0$.
 Par suite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} e^x = +\infty$.
 On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} e^x = +\infty$.
- 39** 1. On a $\frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{e^x - 1}{x}$. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$.
 2. On a $\frac{e^x}{x-1} = \frac{1}{x-1} \times e^x$. Or $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e$.

Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0$ avec $e^x - 1 > 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = +\infty$.

40 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = +\infty$. 2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^x = 0$. 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{e^x - e} = +\infty$.

41 1. On a $f'(x) = -3e^x$. Donc $f'(x) < 0$ et ainsi f est décroissante sur \mathbb{R} .

2. $f'(x) = e^x + 1$. Donc $f'(x) > 0$ et f est croissante sur \mathbb{R} .

42 1. $f'(x) = (1+x)e^x$. Donc $f'(x)$ a même signe que $1+x$.

Sur $]-\infty; -1[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante.

Sur $]-1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante.

2. $f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$. $f'(x)$ a même signe que $x-1$. La fonction f est décroissante sur $]-\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

43 1. $f'(x) = 2 + e^x$. La fonction f est croissante sur \mathbb{R} .

2. $f'(x) = \frac{1 \times e^x - x e^x}{(e^x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}}$. $f'(x)$ a même signe que $1-x$.

Donc f est croissante sur $]-\infty; 1]$ et elle est décroissante sur $[1; +\infty[$.

44 1. $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

Donc sur \mathbb{R} $f'(x) > 0$ et f est croissante.

2. $f'(x) = \frac{1 \times e^x - (x-3) \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{(4-x)e^x}{e^{2x}}$.

$f'(x)$ a même signe que $4-x$. Donc f est croissante sur $]-\infty; 4]$ et décroissante sur $[4; +\infty[$.

45 1. $f'(x) = 2e^x$. Donc $f'(x) > 0$ sur \mathbb{R} et donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

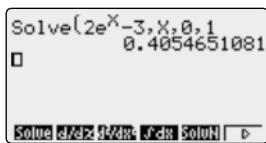
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ donc la droite d'équation $y = -3$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Puisque $0 \in]-3; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α , d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

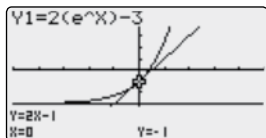
On a $f(0,40) \approx -0,016$ donc $f(0,40) < 0$ et $f(0,41) \approx 0,014$ donc $f(0,41) > 0$. On en déduit $\alpha \approx 0,40$.

On peut aussi utiliser la commande **solve** de la calculatrice.



4. Une équation de \mathcal{T} est $y = 2x - 1$.

5. Voici les tracés de \mathcal{C} et de \mathcal{T} obtenus :



46 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

47 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^3} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^3} = +\infty$.

48 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + x) = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2+1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+1} = +\infty$.

49 a. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$. b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}}{x^2} = +\infty$. c. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} e^{\frac{x+2}{x-1}} = +\infty$.

50 1. $f'(x) = 2e^{2x}$.

2. $f'(x) = -4e^{-4x}$.

51 1. $f'(x) = 1 - e^{-x}$.

2. $f'(x) = \cos x e^{\sin x}$.

52 1. $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$.

2. $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$.

53 1. $f'(x) = 3e^{3x}$.

2. $f'(x) = -2e^{-2x}$.

54 1. $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$.

2. $f'(x) = e^{x+3}$.

55 Voir livre page 422.

56 1. $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x$.

2. $f'(x) = \frac{(e^x + 2)e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$.

POUR S'ENTRAÎNER

57 1. $\exp(-7) \times \exp(2) = \exp(-5)$.

2. $\exp(3x) \times \exp(2x) = \exp(5x)$.

3. $\exp(5-2x) \times \exp(-7x) = \exp(5-9x)$.

4. $\exp(4x) \times \exp(-x-2) = \exp(3x-2)$.

58 1. $\exp(-4x) \times \exp(-2x) = \exp(-6x)$.

2. $\exp(x) \times \exp(-3x) = \exp(-2x)$.

3. $\exp(-3x-1) \times \exp(-2-x) = \exp(-4x-3)$.

4. $\exp(-2) \times \exp(4x) = \exp(-2+4x)$.

59 $2 - \frac{2}{1 + \exp(-x)} = \frac{2 + 2\exp(-x) - 2}{1 + \exp(-x)} = \frac{2\exp(-x)}{1 + \exp(-x)}$

60 1. $f'(x) = \exp(x) + 2$. $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur \mathbb{R} .

2. $f'(x) = \exp(x)$ donc f est croissante sur \mathbb{R} .

61 1. $f'(x) = -3\exp(x)$; f est décroissante sur \mathbb{R} .

2. $f'(x) = \frac{\exp(x)}{7}$; f est croissante sur \mathbb{R} .

62 1. $f'(x) = (-1-x)\exp(x)$; f est croissante sur $]-\infty; -1]$ et décroissante sur $[-1; +\infty[$.

2. $f'(x) = (x^2 + 2x - 2)\exp(x)$. f est croissante sur $]-\infty; -1 - \sqrt{3}]$ et sur $[-1 + \sqrt{3}; +\infty[$ et f est décroissante sur $]-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}[$.

63 1. $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{e^x}$. La fonction f est décroissante sur $]-\infty; 1 - \sqrt{2}]$ et sur $[1 + \sqrt{2}; +\infty[$ et f est croissante sur $]1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}[$.

2. $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ donc f est croissante sur \mathbb{R} .

64 1. L'énoncé est vrai.

2. L'énoncé réciproque est : « Si la fonction est égale à sa dérivée alors f est la fonction exponentielle ».

Cet énoncé est faux. Voici un contre-exemple :

soit f telle que $f(x) = 2\exp(x)$; on a $f'(x) = 2\exp(x) = f(x)$ mais f n'est pas la fonction exponentielle.

65 1. Voir cours.

2. Si $h = \frac{1}{3}g$ alors $h'(x) = \frac{1}{3}g'(x) = \frac{1}{3}g(x) = h(x)$.

$h(0) = \frac{1}{3}g(0) = 1$.

Donc h est la fonction exponentielle et $g(x) = 3\exp(x)$.

66 1. $e^{-3x} \times e^{3x} = 1$.

2. $e^{2x+1} \times e^{-4x-3} = e^{-2x-2}$.

3. $e^{-x-6} \times e^{2x-4} = e^{x-10}$.

67 1. $e \times (e^3)^2 = e^7$.

2. $e^{-2x} \times (e^{2x})^2 = e^{2x}$.

3. $(e^x)^3 \times (e^{-x})^2 = e^x$.

68 1. $\frac{e^{2x+1}}{e^{1-x}} = e^{3x}$.

2. $\frac{e^{2x} \times e^{-4x}}{e^{3x+1}} = e^{-5x-1}$.

3. $\frac{e^{-x+2} \times e^{-2x-1}}{e^{3x+2} \times e^{-x-1}} = e^{-5x}$.

69 L'égalité s'obtient en multipliant le numérateur et le dénominateur par e^{-x} et en utilisant la propriété $e^x \times e^{-x} = 1$.

70 On utilise la même démarche qu'à l'exercice 69.

71 L'égalité s'obtient en multipliant le numérateur et le dénominateur par e^{-2x} et en utilisant la propriété $e^{2x} \times e^{-2x} = 1$.

72 Voir livre page 422.

73 Pour tout entier naturel n , on a $u_n = a + nr$.

Donc $e^{u_n} = e^{a+nr} = e^a \times (e^r)^n$. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison e^r et de premier terme e^a .

74 On utilise le sens de variation de la fonction exponentielle dans la preuve de l'hérédité.

75 VRAI.

76 FAUX.

77 FAUX.

78 VRAI.

79 1. L'équation a pour solution 0.

2. L'équation a pour solution -1.

3. L'équation a pour solution -1.

80 1. L'équation équivaut à $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Elle a pour solutions 1 et 4.

2. L'équation équivaut à $x = -x$.

Elle a pour solution 0.

3. Comme $e^{5x} > 0$, l'équation n'a pas de solution.

4. L'équation a pour solution -1.

81 Voir livre page 423.

82 1. L'inéquation équivaut à $0 \leq 3x$.

L'ensemble solution est $[0; +\infty[$.

2. L'inéquation équivaut à $-x^2 + x \leq 0$.

L'ensemble solution est $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$.

3. L'inéquation équivaut à $e^{x+3} \geq e^{-x}$ soit encore $2x + 3 \geq 0$.

L'ensemble solution est $[-\frac{3}{2}; +\infty[$.

83 Voir livre page 423.

84 1. L'inéquation n'a pas de solution.

2. L'inéquation équivaut à $e^{-x-2} \leq e^{-x}$. Elle n'a pas de solution.

85 A a même signe que $1 - x$. Donc $A > 0$ pour $x < 1$.

$A \leq 0$ pour $x \geq 1$.

$B = e^x(e^x - 1)$. Donc B a même signe que $e^x - 1$.

Ainsi $B < 0$ pour $x < 0$ et $B \geq 0$ pour $x \geq 0$.

C est la somme de deux réels positifs donc $C > 0$ pour tout réel x .

86 A a même signe que $x^2 - 1$. Donc $A \geq 0$ pour $x \leq -1$ ou pour $x \geq 1$ et $A < 0$ pour $-1 < x < 1$.

B est un quotient dont le dénominateur est strictement positif.

B a le même signe que $1 - e^x$.

Donc $B > 0$ pour $x < 0$ et $B \leq 0$ pour $x \geq 0$.

$C = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$. C a même signe que $e^{2x} - 1$.

$C < 0$ pour $x < 0$ et $C \geq 0$ pour $x \geq 0$.

87 1. Les solutions sont -4 et 1.

2. On pose $X = e^x$. L'équation $e^x = -4$ n'a pas de solution.

L'équation $e^x = 1$ a pour solution 0.

88 a. L'équation admet une solution unique 0.

b. L'équation admet une solution unique 0.

90 $A = \frac{e^{2x} + e^x - 2}{e^x} = \frac{(e^x + 2)(e^x - 1)}{e^x}$.

A a même signe que $e^x - 1$.

Pour $x < 0$: $A < 0$; et pour $x \geq 0$: $A \geq 0$.

$B = (5e^x + 1)(e^x - 1)$. B a même signe que $e^x - 1$.

Pour $x < 0$: $B < 0$; et pour $x \geq 0$: $B \geq 0$.

91 FAUX.

92 FAUX.

93 VRAI.

94 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x + 3x - 4) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^x + 3x - 4) = +\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x + 3) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 + \frac{3}{x} \right) = +\infty$

95 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3)(1 - e^{-x}) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3)(1 - e^{-x}) = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + e^{-x} + x^2) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{-x} + x^2) = +\infty$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 2x + xe^x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x + xe^x) = +\infty$.

96 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 + \frac{3}{e^x + 1} \right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \frac{3}{e^x + 1} \right) = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = -2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = 1$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^{-x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3xe^{-x} = 0$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3 + xe^x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3 + xe^x) = +\infty$.

97 On a les limites suivantes pour $x > 0$.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{e^x - 1} = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$.

98 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3$.

99 Voir livre page 423.

100 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1$.

102 1. Voir cours.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{-x}) = -\infty$.

103 1. FAUX.

2. VRAI.

104 1. $f'(x) = (2x + x^2)e^x$.

2. $f'(x) = \frac{(x-1)^2 e^x}{(x^2 + 1)^2}$.

105 1. $f'(x) = 2 + \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

2. $f'(x) = e^x - 3$.

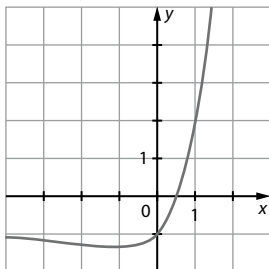
106 Voir livre page 423.

107 1. $f'(x) = (x+1)e^x$.

La fonction f est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et croissante sur $[-1; +\infty[$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

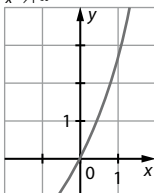
2.



108 1. $f'(x) = 1 + e^x$ donc f est croissante sur \mathbb{R} .

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

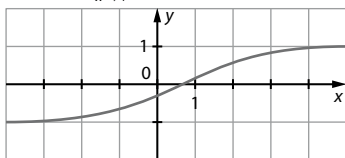
2.



109 1. $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x+2)^2}$. La fonction f est croissante sur \mathbb{R} .

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

2.



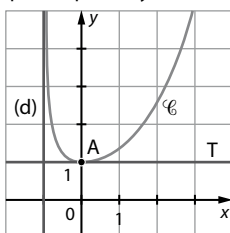
110 1. $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$. La fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

2. a. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. La droite (d) a pour équation $x = -1$.

3. La tangente T a pour équation $y = 1$.

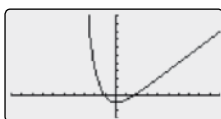
4.



111 1. $f'(x) = \frac{e^x-1}{e^x}$. La fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

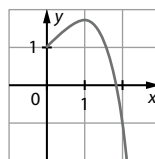
3.



112 1. $f'(x) = (1-x)e^x$. La fonction f est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3.



4. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1; 2]$. De plus $f(1) = e-1$ et $f(2) = -1$.

$0 \in [-1; e-1]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[1; 2]$.

On a $f(1,84) \approx 0,007$ donc $f(1,84) > 0$ et $f(1,85) \approx -0,046$ donc $f(1,85) < 0$. On en déduit $\alpha \approx 1,84$.

Avec la fonction **solve** de la calculatrice, on obtient :

`Solve((2-X)*e^X-1,X,1)`
1.84140566

5. On a $f(x) \geq 0$ sur $[0; \alpha]$ et $f(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

113 FAUX.

114 VRAI.

115 VRAI.

116 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x+3} = 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x-2}{x+2}} = e^1$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

117 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x e^{4x} = 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-2x) e^{1-2x} = +\infty$.

118 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x}-3}{e^x+1} = -3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}-3}{e^x+1} = +\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{e^{2x}+5} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{e^{2x}+5} = 0$.

119 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{e^{x+3}} = e^2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{e^{x+3}} = e^2$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{3x} - e^{2x} - 1) = -1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} - e^{2x} - 1) = +\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3+x)e^{\frac{x}{2}} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3+x)e^{\frac{x}{2}} = 0$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + (1-x)e^{2x}) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + (1-x)e^{2x}) = -\infty$.

120 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{3x}-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{3x}-1} = 0$.

2. Les droites d'équations $x = 0$ et $y = 1$ sont asymptotes à la courbe représentative de f .

Les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes à la courbe représentative de g .

121 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}-1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x}-1}{x} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{e^{2x}-1} = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{e^{2x}-1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{e^{2x}-1} = +\infty$.

122 Les fonctions sont dérivables sur \mathbb{R} .

1. $f'(x) = -6e^{-6x}$.

2. $f'(x) = -2e^{1-2x}$.

3. $f'(x) = (-3x+2)e^{3x}$.

4. $f'(x) = (6x-2)e^{3x^2-2x+1}$.

123 Les fonctions sont dérivables sur \mathbb{R} .

$$1. f'(x) = \frac{6e^{3x}}{(e^{3x} + 1)^2} \quad 2. f'(x) = (2x^2 - 5)e^{2x}.$$

$$124 \quad 1. f \text{ est dérivable pour } x \neq -3. f'(x) = \frac{5}{(x+3)^2} e^{\frac{2x+3}{x+3}}.$$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R} : f'(x) = \cos x e^{\sin x}$.

125 Voir livre page 423.

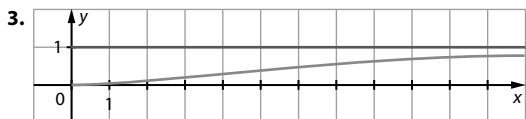
126 1. VRAI. 2. VRAI.

127 1. FAUX. 2. FAUX.

$$128 \quad 1. f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2} e^{\frac{x+3}{1-x}}. \text{ On a } f'(x) > 0 \text{ sur }]1; +\infty[\text{ donc } f \text{ est}$$

strictement croissante sur cet intervalle.

$$2. \text{ On a } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-1}.$$



129 On a $f'(x) = (2x^2 - 2x + 1)e^{x^2}$. La fonction f est donc croissante sur \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

130 1. $f'(x) = e^{-x}$; $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. a. On effectue la démonstration par récurrence.

Soit $P(n)$: « $u_n < u_{n+1}$ » pour tout entier naturel n .

Initialisation

$$u_1 = 3 - e^2. \text{ Donc } u_0 < u_1.$$

$P(0)$ est vraie.

Hérédité

Supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p < u_{p+1}$.

Puisque f est strictement croissante $f(u_p) < f(u_{p+1})$, c'est-à-dire :

$$u_{p+1} < u_{p+2}.$$

$P(p+1)$ est vraie.

Conclusion

La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire.

Donc d'après le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

La suite (u_n) est donc croissante.

b. On peut remarquer que, pour tout x , $f(x) < 3$ et faire une démonstration par récurrence.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 3. Elle converge donc vers une limite inférieure ou égale à 3.

$$131 \quad 1. \text{ On a } f(a+b) = f(a)f(b).$$

2. a. L'énoncé est vrai.

b. L'énoncé réciproque est : « Si f est une fonction telle que pour tous réels a et b : $f(a+b) = f(a)f(b)$, alors f est la fonction exponentielle ».

Cet énoncé est faux. On prend comme contre-exemple la fonction f de la question 1.

$$133 \quad 1. \text{ On a } f'(x) = 10(-x+3)e^{-0,5x}.$$

Donc $f'(x)$ a même signe que $-x+3$.

La fonction f est croissante sur $[0,5]$ et décroissante sur $[3;8]$.

2. a. On doit avoir $f(x) > 0$, donc $x > 1$. La production minimale est donc égale à 100 bicyclettes.

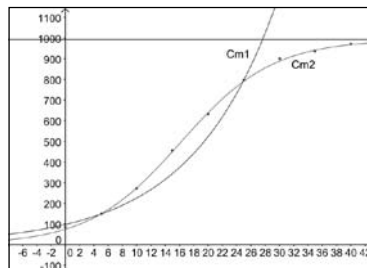
b. $f'(x)$ s'annule en changeant de signe pour $x = 3$ et $f(3) = 8,925$. Pour obtenir un bénéfice maximal, l'entreprise doit produire 300 bicyclettes.

Le bénéfice est alors égal à 8 925 euros.

134 Voir livre page 423.

135 Fichier associé sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 04_TS_exercice135.ggb (GeoGebra).

1. Voici les tracés obtenus :



2. $m_1(t) = 97,4e^{0,084t}$ donc $m'_1(t) = 8,1816e^{0,084t}$. La fonction m_1 est croissante sur $[0; +\infty[$.

$$3. a. m_2(t) = \frac{992}{1+12,3e^{-0,155t}} \text{ donc } m'_2(t) = \frac{1\,891,248e^{-0,155t}}{(1+12,3e^{-0,155t})^2}.$$

$m'_2(t) > 0$ donc m_2 est croissante sur $[0; +\infty[$.

d. $1+12,3e^{-0,155t} > 1$, donc $m_2(t) < 992$.

e. De plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} m_2(t) = 992$. La droite d'équation $y = 992$ est asymptote à la courbe.

Âge	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$m_1(t)$	97	148	226	343	523	795	1 211	1 842	2 804
$m_2(t)$	75	149	275	450	638	790	888	941	967

Les nombres figurant dans le tableau sont les valeurs approchées à 1 g près.

4. Le tracé de la représentation graphique de m_2 est le plus proche des observations faites. La fonction m_2 est une fonction « logistique ».

136 FAUX.

137 VRAI.

138 FAUX.

139 FAUX.

140 VRAI.

141 $f'(x) = 2(e^{2x} - 1)$. $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$. La fonction admet un minimum en 0.

Ce minimum est égal à $f(0)$ soit 1.

La fonction f est donc strictement positive sur \mathbb{R} .

142 On a $f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2}$. Donc $f'(x) > 0$ et la fonction f est croissante sur $]-1; +\infty[$.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e.$$

$$143 \quad g'(x) = (x+2)e^x. \text{ Ainsi } g'(x) > 0 \text{ sur } [0; +\infty[.$$

La fonction g est donc strictement croissante et continue sur $[0; +\infty[$. En outre $g(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une solution unique sur $[0; +\infty[$.

$$144 \quad 1. \text{ On a } 2x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} = 2x + \frac{-(e^x + 1) + 2}{e^x + 1} = f(x).$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

3. On a $f'(x) = \frac{2(e^{2x} + e^x + 1)}{(e^x + 1)^2}$. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe \mathcal{C} est égale à $f'(0)$ soit 1,5.

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 423 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

156 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 1$. b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^x + 1} = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2 + 1} = +\infty$.

157 a. $f'(x) = (2x + 1)e^{2x}$. b. $g'(x) = -(x - 1)^2 e^{-x}$.

c. $h'(x) = (-2x^2 - 1)e^{-2x}$. d. $i'(x) = 3e^{3x} - 3e^x$.

► Modèles de croissance de population

Cette rubrique propose deux problèmes modélisant des phénomènes d'évolution, comme indiqué par le programme.

► $g' = 0,25 g$ car g' est proportionnelle à g avec 0,25 comme facteur de proportionnalité.

Si $g(t) = Ce^{0,25t}$ alors $g'(t) = 0,25Ce^{0,25t} = 0,25 g(t)$.

► On a $h'(t) = 0$ donc il existe une constante C telle $g(t) = Ce^{0,25t}$.

► Si $g(0) = 1$, $Ce^0 = 1$ donc $C = 1$. Donc $g(t) = e^{0,25t}$.

► On détermine une solution approchée de l'équation $e^{0,25t} = 2$. La population doublera au bout de 2,77 ans. Elle triplera au bout de 4,4 ans environ.

► La population doublera au bout de 5,5 ans environ.

Lorsque t tend vers $+\infty$, la taille de la population tend vers 300 rongeurs.

158 1. La fréquence des personnes qui ne connaissent pas la rumeur est égale à $1 - f$ et le coefficient de proportionnalité est 1,15, d'où la condition $f' = 1,15f(1 - f)$.

2. On a $f'(t) = \frac{114e^{-1,15t}}{(1 + 99e^{-1,15t})^2} = 1,15f(t)(1 - f(t))$.

3. La fonction est croissante sur $[0; +\infty[$. La limite de la fonction en $+\infty$ est égale à 1.

4. À midi, $t = 4$. On a $f(4) \approx 0,5012$. Le nombre de personnes connaissant la nouvelle à midi est égal à 5 012.

5. Au bout de 8 h environ, 99 % de la population connaîtra la rumeur.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Étude d'un problème de tangentes

Dans ce TP, on étudie des propriétés des courbes représentatives de deux familles de fonctions dépendantes d'un paramètre k .

Ce TP fait appel à l'utilisation d'un logiciel de géométrie.

De nombreux outils du logiciel sont mis en œuvre.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 04_TS_TP1A.ggb, 04_TS_TP1B.ggb et 04_TS_TP1B8.ggb (GeoGebra).

A. Étude du cas où $k = 1$

Voir fichier 04_TS_TP1A.ggb.

1. Utiliser l'instruction **Fonction** dont la syntaxe est **Fonction[expression,xmin,xmax]**.

2. a. Utiliser l'outil **Curseur** et saisir les paramètres donnés.

b. Le point M est défini par **M=(a,f(a))**. On définit de même le point N. L'abscisse a est fixée par le curseur.

3. a. On utilise l'instruction **Tangente** pour construire chacune des deux tangentes.

b. Pour construire le point d'intersection P de la tangente T et de l'axe des abscisses, utiliser l'outil **Intersection entre deux objets** de l'outil **Points**. On procède de même pour le point Q.

c. Pour faire afficher par le logiciel la distance PQ, utiliser l'outil **Distance ou Longueur** dans la boîte des **Mesure**.

d. L'outil **Relation entre objets** de la boîte **Propriétés** permet de conjecturer que les droites T et Δ sont perpendiculaires quand a varie.

e. On peut conjecturer que la distance PQ est constante et égale à 2 quand a varie.

4. a. La droite T passe par le point M($a; e^a$) et a pour coefficient directeur e^a . Son équation est donc $y = e^a x + e^a(1 - a)$.

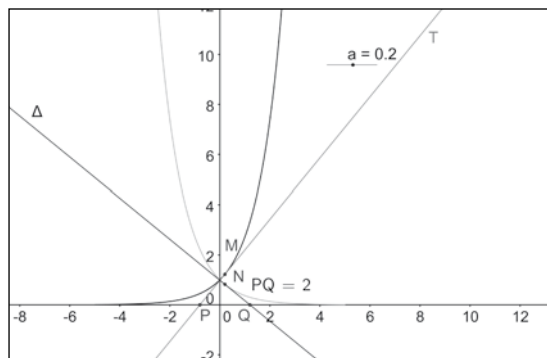
La droite Δ passe par le point N($a; e^{-a}$) et a pour coefficient directeur $-e^{-a}$. Son équation est donc $y = -e^{-a}x + e^{-a}(1 + a)$.

b. T a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; e^a)$ et Δ a pour vecteur directeur $\vec{v}(1; -e^{-a})$. Le produit scalaire des deux vecteurs est nul. Les droites sont donc perpendiculaires.

c. Le point P a pour coordonnées $(a - 1; 0)$ et le point Q a pour coordonnées $(1 + a; 0)$.

d. On a donc $PQ = |(1 + a) - (a - 1)| = |2| = 2$. La conjecture émise à la question 3. e. est donc validée.

Pour cette partie, on obtient la figure suivante :



B. Étude du cas où $k \neq 1$

Voir fichier 04_TS_TP1B.ggb.

2. Pour la fonction f , entrer **Fonction[e^(k*x),-5,5]**.

Pour la fonction g , entrer **Fonction[e^(-k*x),-5,5]**.

3. c. On peut conjecturer que pour une valeur donnée de k , si a varie la distance PQ est constante. Par exemple si $k = 0,8$, on a $PQ = 2,5$.

d. Les droites T et Δ ne sont pas perpendiculaires pour toutes les valeurs de a .

e. Pour placer le point I , utiliser l'outil **Milieu ou centre** de la boîte **Points**. On peut conjecturer que l'abscisse du point I est égale à a .

4. Les conjectures des questions **3.** de la partie B sont toujours valables.

5. La droite T passe par le point $M(a; e^{ka})$ et a pour coefficient directeur ke^{ka} .

Elle a pour équation $y = ke^{ka}x + e^{ka}(1 - ka)$.

La droite Δ passe par le point $N(a; e^{-ka})$ et a pour coefficient directeur $-e^{-ka}$.

Elle a pour équation $y = -ke^{-ka}x + e^{-ka}(1 + ka)$.

6. Le point P est l'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses, son ordonnée est donc nulle. Son abscisse est solution de l'équation $ke^{ka}x + e^{ka}(1 - ka) = 0$.

Son abscisse est $\frac{ak-1}{k}$.

De même l'abscisse de Q est solution de l'équation $-e^{-ka}x + e^{-ka}(1 + ka) = 0$. L'abscisse de Q est $\frac{ak+1}{k}$.

7. a. L'abscisse du point I est égale à $\frac{1}{2} \times (\frac{ak-1}{k} + \frac{ak+1}{k}) = a$.

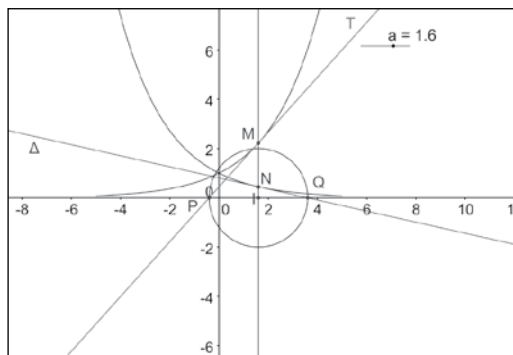
On a $PQ = \left| \frac{ak+1}{k} - \frac{ak-1}{k} \right| = \frac{2}{k}$.

b. Les conjectures des questions **3. c.** et **3. e.** sont donc bien validées : l'abscisse du point I est égale à a , abscisse de M et de N . Pour k fixé, la distance PQ est constante.

8. Lorsque $k = 0,5$, l'abscisse de P est égale à $a - 2$ et celle de Q est égale à $a + 2$.

Pour une valeur quelconque de a , on place les points M et N . On construit le point I , intersection de la droite (MN) et de l'axe des abscisses (les points I , M et N ont même abscisse a). On trace le cercle de centre I et de rayon 2. Les points P et Q sont les intersections du cercle et de l'axe des abscisses. La tangente T est donc la droite (MP) . La tangente Δ est la droite (NQ) .

Voici la figure obtenue tracée à l'aide d'un logiciel de géométrie (voir fichier **04_TS_TP1B8.ggb**) :



TP 2 Approximation du nombre e

Dans ce TP, on utilise un logiciel de calcul formel pour effectuer des calculs algébriques et pour construire un programme fournissant une approximation du réel e , avec une précision donnée, à l'aide d'une étude d'une famille de fonctions.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 04_TS_TP2D.alg (AlgoBox), 04_TS_TP2A.xws et 04_TS_TP2D.xws (Xcas).

A. Avec un logiciel de calcul formel

Voir fichier **04_TS_TP2A.xws**.

1. a. On obtient respectivement : $f_1(x) = -e^{-x}(1+x)$;
 $f_2(x) = -e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$; $f_3(x) = -e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)$.

b. Pour $n = 1$, on entre **f1(x):=-exp(-x)*(1+x/1)** dans le champ de saisie et on valide par la touche **Entrée**.

À la ligne suivante, on utilise l'instruction **deriver** en écrivant **deriver(f1(x))** puis on valide.

Puis on simplifie l'expression obtenue en utilisant l'instruction **Simplifier** du menu **Scolaire** **Seconde**.

Pour éviter de réécrire l'expression obtenue à la ligne précédente, on la met en surbrillance et on utilise l'instruction **Coller** du menu **Edit**.

On obtient $f'_1(x) = xe^{-x}$, $f'_2(x) = \frac{x^2e^{-x}}{2}$ et $f'_3(x) = \frac{x^3e^{-x}}{6}$.

c. On sait que $e^{-x} > 0$ sur \mathbb{R} . Donc $f'_1(x)$ a même signe que x . Ainsi f_1 est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et f_1 est croissante sur $[0; +\infty[$.

De même $f'_2(x)$ a même signe que x^2 . Donc $f'_2(x) \geq 0$ sur \mathbb{R} . La fonction f_2 est croissante sur \mathbb{R} .

Enfin $f'_3(x)$ a même signe que x^3 donc même signe que x . Ainsi f_3 est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et f_3 est croissante sur $[0; +\infty[$.

2. a. On peut conjecturer que $f'_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

b. Puisque $n! > 0$ et $e^{-x} > 0$, $f'_n(x)$ a même signe que x^n .

Si n est pair, $x^n \geq 0$ sur \mathbb{R} et la fonction f_n est croissante sur \mathbb{R} .

Si n est impair, x^n a même signe que x . Donc f_n est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et f_n est croissante sur $[0; +\infty[$.

B. Propriétés de la fonction f_n

1. a. La fonction f_3 est un produit de deux fonctions.

Ainsi $f'_3(x) = e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right) - e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^3e^{-x}}{6}$.

b. On remarque que $k! = (k-1)! \times k$. Donc $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$.

c. La fonction f_n est un produit de deux fonctions.

D'où $f'_n(x) = e^{-x}\left(1+\dots+\frac{x^n}{n!}\right) - e^{-x}\left(1+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

La conjecture faite dans la question **A. 2. a.** est donc validée.

d. Si $0 \leq x \leq 1$, $x^n \leq 1$ et $e^{-x} \leq 1$.

De plus $0 \leq x^n$, donc $0 \leq f'_n(x) \leq \frac{1}{n!}$.

e. La fonction f_n est croissante sur $[0; 1]$, donc $f_n(1) \geq f_n(0)$.

2. On a $g'(x) = f'_n(x) - \frac{1}{n!}$. Donc $g'(x) \leq 0$. La fonction g est décroissante sur $[0; 1]$. Ainsi $g(1) \leq g(0)$ et $f_n(1) \leq f_n(0) + \frac{1}{n!}$.

C. Étude d'une suite

1. On a successivement $v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 2,5$ et $v_3 = \frac{8}{3}$.

2. On remarque que $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = -e^{-1}v_n$.
L'inégalité obtenue dans B. 2. conduit à $-e^{-1}v_n \leq -1 + \frac{1}{n!}$.
D'où $e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leq v_n \leq e$.
3. On en déduit que $e - v_n \leq \frac{e}{n!} \leq \frac{3}{n!}$ car $e \leq 3$.
4. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e - v_n) = 0$.
Et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e$.

D. Approximation du nombre e à l'aide d'un algorithme

Voir fichiers **04_TS_TP2D.xws** et **04_TS_TP2D.alg**.

1. On obtient $v_5 = \frac{163}{60}$. On a $e - v_5 \approx 0,0016$. Ainsi v_5 est une valeur approchée de e à 0,01 près.

2. a. Voici l'algorithme complété :

```
Saisir A
V prend la valeur 1
N prend la valeur 0
Tant que e - V > A
  N prend la valeur n + 1
  V prend la valeur V + 1/n!
Fin Tant que
Afficher n
```

- b. Il est possible de compléter l'algorithme en faisant afficher une approximation de v_{n_0} .

Ci-dessous le programme écrit avec AlgoBox :

```
VARIABLES
V EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
A EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
V PREND_LA_VALEUR 1
E PREND_LA_VALEUR exp(1)
N PREND_LA_VALEUR 0
LIRE A
TANT_QUE (exp(1)-V>pow(10,-10)) FAIRE
DEBUT_TANT_QUE
N PREND_LA_VALEUR N + 1
V PREND_LA_VALEUR V + 1/ALGOBOX_FACTORIELLE(N)
FIN_TANT_QUE
AFFICHER N
AFFICHER V
FIN_ALGORITHME
```

Voici maintenant le programme pour une calculatrice :

```
=====APPROXIM=====
P→A
i→U
0→N
While e^1-U>A
N+1→N
U+1÷N!→U
Z1:MPR nCr RAND
```

```
=====APPROXIM=====
N+1→N
U+1÷N!→U
WhileEnde
N
Z1:MPR nCr RAND
```

Avec Xcas (voir fichier **04_TS_correctionTP2.xws**) pour programmer l'algorithme :

Dans le menu **Prg**, choisir **Nouveau programme**.

Utiliser les instructions figurant dans le menu **Scolaire** **Programme**.

Ne pas oublier d'écrire **;** à la fin de chaque ligne d'instructions.

Voici le programme obtenu :

```
saisir(A);
V:=1;
n:=0;
tantque exp(1)-V>A faire
n:=n+1;
V:=V+1/factorial(n);
ftantque;
afficher(n);
afficher(V);
```

Pour exécuter le programme cliquer sur le bouton **OK** et entrer la valeur de A.

- c. Si $A = 10^{-10}$, on obtient $n_0 = 13$ et $v_{n_0} \approx 2,718281828$.

Ci-dessous l'écran obtenu avec une calculatrice :

```
? 10^-10
2.718281828
- DISP -
```

CAP VERS LE BAC

Le sujet commenté détaille l'étude du sens de variation d'une fonction et les calculs de limites.

Les cinq sujets proposés sont extraits de sujets de bac récents et ils mettent en œuvre les différentes notions du chapitre ainsi que les différents types d'exercices : ROC, Vrai-faux.

Sujet A

1. Vrai. 2. Vrai. 3. Faux.

Sujet B

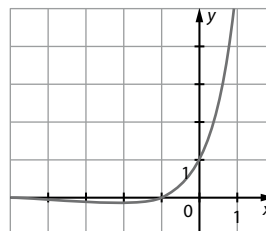
Partie A

1. On a $f'(x) = (x+2)e^x$. Donc $f'(x)$ est du signe de $x+2$.

La fonction f est décroissante sur $]-\infty; -2]$ et croissante sur $[-2; +\infty[$.

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2.



Partie B

1. a. La fonction f_0 est affine.

b. Pour déterminer les abscisses des points d'intersection, on résout l'équation $x + 1 = (x + 1)e^x$.

Cette équation équivaut à $x + 1 = 0$ ou $e^x = 1$.

Il y a deux points d'intersection qui ont pour coordonnées $(-1; 0)$ et $(0; 1)$.

Pour tout entier k , $f_k(-1) = 0$ et $f_k(0) = 1$.

Les points trouvés appartiennent à la courbe \mathcal{C}_k pour tout entier k .

2. L'expression est un produit de deux facteurs : $x + 1$ et $e^x - 1$.

L'expression $(x + 1)(e^x - 1)$ est positive sur $]-\infty; -1]$ et sur $[0; +\infty[$.

Elle est négative sur $[-1; 0]$.

On étudie le signe de $f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x + 1)(e^x - 1)e^{kx}$.

La différence est du signe de $(x + 1)(e^x - 1)$.

On en déduit que \mathcal{C}_{k+1} est au-dessus de \mathcal{C}_k sur $]-\infty; -1]$ et sur $[0; +\infty[$. \mathcal{C}_{k+1} est au-dessous de \mathcal{C}_k sur $[-1; 0]$.

3. a. On a $f'_k(x) = (kx + k + 1)e^{kx}$.

Donc $f'_k(x)$ est du signe de $kx + k + 1$.

b. Pour $k = 0$, la fonction est affine et croissante.

Si $k > 0$, f_k est décroissante sur $]-\infty; \frac{-k-1}{k}]$ et f_k est croissante

sur $[\frac{-k-1}{k}; +\infty[$.

Si $k < 0$, f_k est croissante sur $]-\infty; \frac{-k-1}{k}]$ et f_k est décroissante

sur $[\frac{-k-1}{k}; +\infty[$.

Sujet C

Partie A

1. $f(x) = 0$ équivaut à $x = e^{-x}$ donc à $e^x = \frac{1}{x}$.

2. $f'(x) = 1 + e^{-x}$. La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

b. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

En outre f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

L'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique α .

c. On a $f(\frac{1}{2}) \approx -0,1065$ et $f(1) \approx 0,6321$. $f(\frac{1}{2}) < 0$ et $f(1) > 0$, donc α appartient à $[\frac{1}{2}; 1]$.

d. $f(x) < 0$ sur $[0; \alpha]$.

Partie B

1. $g(x) = x$ équivaut à $1 + x = x + xe^x$ soit $xe^x = 1$ donc à $f(x) = 0$.

2. α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $g(\alpha) = \alpha$.

3. $g'(x) = \frac{1 - xe^x}{(1 + e^x)^2}$. $g'(x)$ est du signe de $1 - xe^x$.

Or $1 - xe^x = -f(x)e^x$ et $f(x) < 0$ sur $[0; \alpha]$.

Donc $g'(x) > 0$ et la fonction g est croissante sur cet intervalle.

Partie C

1. Soit $P(n)$ la propriété $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

Initialisation

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = g(u_0) = \frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{2} \leq \alpha$ d'après **A. 2. c.**

Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Supposons qu'il existe un entier naturel p tel que :

$$0 \leq u_p \leq u_{p+1} \leq \alpha.$$

Puisque g est croissante sur $[0; \alpha]$:

$$g(0) \leq g(u_p) \leq g(u_{p+1}) \leq g(\alpha).$$

$$\text{Donc } 0 \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq \alpha \text{ car } g(0) = \frac{1}{2} \text{ et } g(\alpha) = \alpha.$$

Conclusion

$P(0)$ est vraie et la propriété $P(n)$ est héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

2. La suite est croissante et majorée par α , elle est donc convergente.

3. Correctif : il faut calculer u_4 à 10^{-6} près à la question **b.**, pas à la question **a.**

a. On obtient l'algorithme suivant :

Variables

A, I

Initialisation

A prend la valeur 0

Traitement

Pour I variant de 1 à 4

 A prend la valeur $\frac{1+A}{1+e^A}$

Fin Pour

Sortie

Afficher A

b. En programmant sur une calculatrice :

```
0→A
For 1 to 4
  (1+A)÷(1+e^A)→A
Next
A
```

Le résultat affiché par la calculatrice :

0.5671432904
- DISP -

On obtient $u_4 \approx 0,567143$.

Sujet D

Partie A

Voir cours.

Partie B

1. On a $f'_k(x) = (-x - k + 1)e^{-x}$. f'_k a même signe que $-x - k + 1$. La fonction f_k admet un maximum pour $x = 1 - k$ car f'_k est positive pour $x \leq 1 - k$ et négative pour $x \geq 1 - k$.

2. L'ordonnée du point M_k est égale à $f_k(1 - k)$.

On obtient $f_k(1 - k) = (1 - k + k)e^{-1+k} = e^{-1+k}$.

3. a. Le point $(0; 1)$ appartient à la courbe Γ .

La courbe Γ est donc la courbe rouge.

La courbe \mathcal{C}_k est la courbe bleue.

b. On a $f_k(0) = k$. Donc $k = 2$.

Sujet E

1. On peut conjecturer que la fonction est croissante sur $[-3; 2]$.

2. On a $f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x = xg(x)$.

3. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$.

b. On obtient $g'(x) = (x + 3)e^{x-1}$.

$g'(x)$ a même signe que $x + 3$. Donc $g'(x) < 0$ pour $x < -3$ et $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq -3$.

c. La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty; -3]$ et strictement croissante sur $[-3; +\infty[$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
g	-1	$-e^{-4} - 1$	$+\infty$

d. Sur $]-\infty; -3]$, $g(x) < 0$.

Sur $[-3; +\infty[$, g est continue et strictement croissante.

De plus $g(-3) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-3; +\infty[$ et donc dans \mathbb{R} .

On remarque que $g(0,2) < 0$ car $g(0,2) \approx -0,011$ et $g(0,21) > 0$ car $g(0,21) \approx 0,003$.

On en déduit que $0,2 < \alpha < 0,21$.

e. Sur $]-\infty; \alpha[$, $g(x) < 0$, et sur $]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$ avec $g(\alpha) = 0$.

4. a. $f'(x) = xg(x)$. Donc $f'(x)$ est un produit de deux facteurs : $f'(x) \geq 0$ sur $]-\infty; 0]$ et sur $[\alpha; +\infty[$; $f'(x) < 0$ sur $]0; \alpha[$.

b. Donc la fonction f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[\alpha; +\infty[$ et elle est décroissante sur $]0; \alpha[$.

c. La conjecture est erronée.

159 1. On a $X^2 + X - 2 = (X + 2)(X - 1)$.

2. On peut écrire $e^{2x} + e^x - 2 = (e^x + 2)(e^x - 1)$.

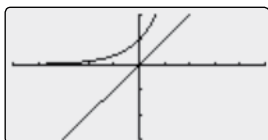
Puisque $e^x + 2 > 0$, $e^{2x} + e^x - 2$ a même signe que $e^x - 1$.

On a donc $e^{2x} + e^x - 2 < 0$ pour $x < 0$ et $e^{2x} + e^x - 2 \geq 0$ pour $x \geq 0$.

3. On a $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$.

Donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et elle est croissante sur $[0; +\infty[$.

160 1. Voici l'écran obtenu :



2. On a $f'(x) = e^x - 1$, donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et elle est croissante sur $[0; +\infty[$.

La fonction f admet un minimum en 0 égal à 1.

Donc $f(x) \geq 0$ pour tout réel x . Ainsi la conjecture de la question 1. est justifiée.

POUR ALLER PLUS LOIN

Les problèmes proposés dans cette rubrique sont plus difficiles. Plusieurs d'entre eux font intervenir des situations dans d'autres domaines que les mathématiques : SPC, SVT et économie.

161 1. Voir cours.

2. On a les égalités suivantes :

$$(\exp(x))^2 = \exp(x) \times \exp(x) = \exp(x + x) = \exp(2x).$$

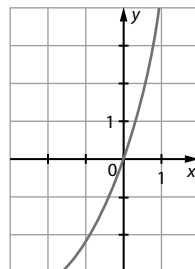
162 1. Pour que la courbe \mathcal{C} passe par O, on doit avoir $f(0) = 0$ donc $2 + b = 0$. Ainsi $b = -2$.

De même $f'(0) = 3$, donc $2 + a = 3$.

Donc $a = 1$. D'où $f(x) = 2e^x + x - 2$.

2. $f'(x) = 2e^x + 1$. $f'(x) > 0$ sur \mathbb{R} donc la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3. On obtient le tracé suivant :



163 1. a. La courbe \mathcal{C} est symétrique par rapport à l'origine du repère.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Donc $f'(x) > 0$ et f est croissante sur \mathbb{R} .

c. Pour $x < 0$: $f(x) < 0$, et pour $x \geq 0$: $f(x) \geq 0$.

d. On a $f'(0) = 1$.

Voir figure à la fin de la question 2.

2. a. La courbe \mathcal{C}' est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

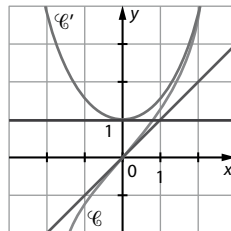
b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

$g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = f(x)$ donc $g'(x)$ a même signe que $f(x)$. Ainsi g est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

c. On a $f(x) - g(x) = -e^{-x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

Les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont très proches lorsque x tend vers l'infini : on dit que ces courbes sont asymptotes.

d. $g'(0) = 0$.



3. $f(x) + g(x) = \frac{e^x - e^{-x} + e^x + e^{-x}}{2} = e^x$.

$g^2(x) - f^2(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1$.

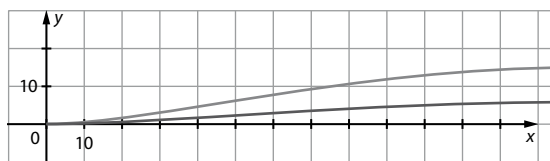
164 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} D(t) = 15$.

2. $D'(t) = \frac{150e^{-0,5t}}{(1 + 20e^{-0,5t})^2}$. $D'(t) > 0$ et D est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

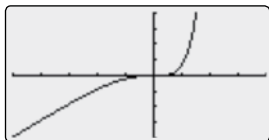
t	0	$+\infty$
$D'(t)$		+
D	$\frac{5}{7}$	15

3. Une équation de T est $y = \frac{50}{147}t + \frac{5}{7}$.

4.



165 1.



2. On peut conjecturer que f est croissante sur $[-5; 4]$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur cet intervalle.

3. a. L'équation $e^x = 1,1$ admet une solution unique α dans \mathbb{R} et $\alpha \approx 0,09$.

b. $f'(x) = e^{2x} - 2,1e^x + 1,1 = (e^x - 1,1)(e^x - 1)$.

La fonction f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[\alpha; +\infty[$.

Elle est décroissante sur $]0; \alpha[$.

On a $f(0) = 0$.

c. $f(\alpha) = \frac{1}{2}(e^\alpha)^2 - 2,1e^\alpha + 1,1\alpha + 1,6$.

On sait que $e^\alpha = 1,1$ donc $f(\alpha) = -0,105 + 1,1\alpha$.

Par suite $-0,000159 < f(\alpha) < -0,000158$.

Donc $f(\alpha) < 0$.

d. Sur $]-\infty; \alpha]$, f admet un maximum égal à 0.

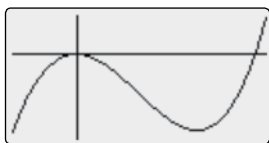
L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique 0.

Sur $[\alpha; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $f(\alpha) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

On peut donc conclure que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} .

4. On peut choisir comme valeurs extrêmes de l'ordonnée $-0,00018$ et $0,00008$.

On obtient le tracé suivant :



166 1. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b. $f'(x) = -0,5(x+2)e^{-0,5x}$, $f'(x)$ est du signe de $-x-2$.

D'où f est croissante sur $]-\infty; -2]$ et décroissante sur $[-2; +\infty[$.

2. a. Si $x = 2$, $f(2) \approx 2,20728$. Si le prix unitaire est fixé à 200 €, le nombre d'objets est égal à 2 207.

b. On obtient $\varepsilon(x) = \frac{-x(x+2)}{2(x+4)}$. c. Non.

167 1. Dans le cas d'une capitalisation annuelle, la valeur acquise est $1\,000 \times 1,06^5 = 1\,338,23$ €.

2. Dans le cas d'une capitalisation semestrielle, la valeur acquise est $1\,000 \times 1,034^{10} = 1\,343,92$ €.

3. Si la capitalisation est trimestrielle, le taux est $\frac{6}{4} = 1,5$ et le nombre de périodes est de $4 \times 5 = 20$.

La valeur acquise est donc $1\,000 \times 1,015^{20} = 1\,346,86$ €.

Pour une capitalisation mensuelle, puis journalière, on obtient respectivement :

$$1\,000 \times 1,005^{60} = 1\,348,85 \text{ €}$$

$$1\,000 \times \left(1 + \frac{0,06}{365}\right)^{1825} \approx 1\,349,83 \text{ €}$$

4. Si la capitalisation est réalisée p fois pendant une année, le taux correspondant sera de $\frac{1}{p}$. Le nombre de périodes est $p \times n$ sur n années.

On obtient ainsi la valeur acquise $C_0 \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{pn}$ où C_0 représente le capital initial.

$$5. a. \text{ On remarque que } C \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{pn} = C_0 \left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{i}} \right]^{ni}.$$

En posant $h = \frac{p}{i}$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} h = +\infty$ et

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{i}} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = e.$$

D'où $\lim_{p \rightarrow +\infty} C_0 \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{pn} = C_0 e^{in}$.

b. et c. La valeur acquise par le capital de 1 000,00 € est donc $1\,000 \times e^{0,06 \times 5}$ soit environ 1 349,86 €. À 0,003 € près, on retrouve le résultat de la question 3.

168 1. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x - 1$ est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = e^x - 1$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

f admet un minimum égal à 0 en 0. Donc, sur \mathbb{R} , $f(x) \geq 0$ et par suite pour tout réel x : $e^x \geq x + 1$.

2. En posant $X = -x$, il vient $1 - X \leq e^{-X}$.

Si $X < 1$ alors $1 - X > 0$; donc $e^X \leq \frac{1}{1-X}$.

3. En posant $x = \frac{1}{n}$, l'inégalité $x + 1 \leq e^x$ devient $\frac{1}{n} + 1 \leq e^{\frac{1}{n}}$. Par suite $\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n \leq e$.

De même pour $n \geq 1$, on a $n + 1 > 1$ et $\frac{1}{n+1} < 1$.

Posons $X = \frac{1}{n+1}$ dans l'inégalité obtenue à la question 2.

On sait alors que $e^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$.

Donc $e^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$ ou $e^{\frac{1}{n+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Par suite $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. On a donc bien montré que pour $n \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

4. Si $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, alors $u_n \leq e$; donc $e - u_n \geq 0$.

En outre $e - u_n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$e - u_n \leq \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{e}{n} \leq \frac{3}{n}.$$

D'où pour tout $n \geq 1$, $0 \leq e - u_n \leq \frac{3}{n}$.

5. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$, cet encadrement permet de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

169 1. La différence entre la température du corps et celle de la salle est à chaque instant t égale à $\theta(t) - 20$ d'où $\theta'(t) = -2,08(\theta(t) - 20)$.

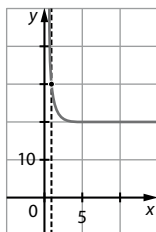
2. a. $C = 80$.

b. On en déduit $\theta(t) = 20 + 80e^{-2,08t}$ sur $[0; +\infty[$.

3. a. $\theta'(t) = -166,4e^{-2,08t}$. Donc θ est décroissante sur $[0; +\infty[$.

b. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 20$.

c.



4. $\theta(\frac{1}{3}) \approx 60^\circ\text{C}$ et $\theta(0,5) \approx 48^\circ\text{C}$.

5. On constate que la température tombera à 30°C au bout d'une heure environ ($\theta(1) \approx 29,994$).

170 1. a. On note que $(e^{\frac{x}{2}})^2 = e^x$ et $4(\frac{x}{2})^2 = x^2$. D'où l'égalité (1).

b. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

2. a. On remarque que $(\frac{x}{e^n})^n = e^x$ et $n^n \times (\frac{x}{n})^n = x^n$. D'où l'égalité (2).

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

171 1. On a $N'(t) = -0,0001238N_0e^{-0,0001238t}$
 $= -0,0001238N(t)$.

2. Au bout de 20 000 ans, le nombre d'atomes est :

$$N(20\,000) = N_0 e^{-2,476} \approx 0,084N_0.$$

Il reste 8,4 % des atomes. On en a perdu 91,6 %.

3. La période du carbone ^{14}C vérifie l'équation :

$$e^{-0,0001238t} = \frac{1}{2}.$$

Notons $f(t) = e^{-0,0001238t}$. L'équation $f(t) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique comprise entre 5 000 et 6 000.

En effet $f(5\,000) \approx 0,538$ et $f(6\,000) \approx 0,476$.

En utilisant la fonction « table » de la calculatrice, on obtient $t \approx 5\,599$ ans.

La fonction \ln permettra ultérieurement une résolution plus rapide de cette question.

4. Les fragments d'os trouvés dans la grotte conservent 70 % de leur teneur en carbone.

L'âge t du fragment d'os est donc la solution de l'équation :

$$e^{-0,0001238t} = 0,7.$$

En procédant comme dans la question précédente, on obtient : $t \approx 2\,881$ ans.

172 Partie A

1. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{2x} = +\infty$.

En $-\infty$, posons $X = 2x$ alors $\lim_{X \rightarrow -\infty} X = -\infty$.

$$1 - e^{2x} - 2xe^{2x} = 1 - e^X - Xe^X.$$

Comme $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$, $\lim_{X \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.

2. $g'(x) = -4(x+1)e^{2x}$. $g'(x)$ a le signe contraire de $x+1$.

D'où le tableau de variation de g avec $g(-1) = 1 + e^{-2}$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
g	1	$\nearrow g(-1) \searrow$	$-\infty$

3. $g(0) = 0$ donc $g(x) > 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $g(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{3}{x} - e^{2x} \right) = -\infty.$$

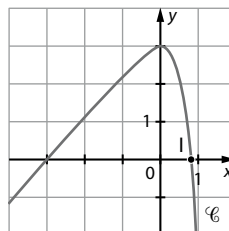
2. $f'(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x} = g(x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	$-\infty$	$\nearrow 3 \searrow$	$-\infty$

3. f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]-\infty; 3]$. L'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique qui est l'abscisse x_1 du point I d'intersection de \mathcal{C} et de l'axe des abscisses.

Or $f(0,7) \approx 0,86$ et $f(0,8) \approx -0,16$ donc $0,7 < x_1 < 0,8$.

4.



173 Partie A

1. On a $g'(x) = e^x + 1$ donc $g'(x) > 0$ sur \mathbb{R} et g est strictement croissante sur \mathbb{R} .

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

2. La fonction g est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} ; de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

L'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que :

$$-1,28 < \alpha < -1,27.$$

3. g est négative sur $]-\infty; \alpha]$ et positive sur $[\alpha; +\infty[$.

Partie B

1. On a $f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 1) - e^x(xe^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

Donc $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.

Donc sur $]-\infty; \alpha]$, $f'(x) \leq 0$ et donc f est décroissante.

Sur $[\alpha; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ et donc f est croissante.

2. $f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1}$; or $g(\alpha) = 0$ d'où $e^\alpha = -\alpha - 1$.

Ainsi $f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha} = \alpha + 1$.

Par suite $-0,28 < f(\alpha) < -0,27$.

3. a. La droite T a pour équation $y = \frac{1}{2}x$.

b. $f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$.

Si $x \leq 0$, $e^x - 1 \leq 0$: \mathcal{C} est au-dessous de T.

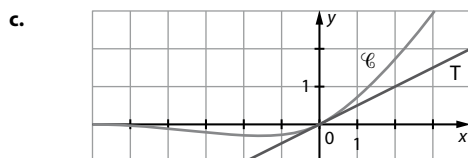
Si $x \geq 0$, $e^x - 1 \geq 0$: \mathcal{C} est au-dessus de T.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$, l'axe des abscisses, est asymptote à \mathcal{C} .

5. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	0	$\alpha + 1$	$+\infty$



Prises d'initiatives

174 On a $f'(x) = \sin x e^{-\cos x}$.

Une équation de la tangente en A est :

$$y = \sin a e^{-\cos a} x + e^{-\cos a} (1 - a \sin a).$$

Elle passe par O si et seulement si les coordonnées (0; 0) vérifient cette équation soit $0 = -a \sin a e^{-\cos a} + e^{-\cos a}$.

Puisque $e^{-\cos a} \neq 0$, on peut simplifier par $e^{-\cos a}$ d'où $a \sin a = 1$.

175 La tangente T a pour équation $y = 6e^{3a}(x - a) + 2e^{3a}$. L'abscisse de H est $x_H = a$.

Pour $y = 0$, on obtient l'abscisse de $x_P = a - \frac{1}{3}$.

Donc $PH = |x_H - x_P| = \frac{1}{3}$.

La distance PH est indépendante de a .

176 On introduit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x - a$.

On a $f'(x) = e^x - 1$.

Sur $]-\infty; 0]$, f est décroissante et sur $[0; +\infty[$ f est croissante.

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$1 - a$	$+\infty$

Le signe de $1 - a$ détermine le nombre de solutions de l'équation.

Si $a > 1$, il y a deux solutions.

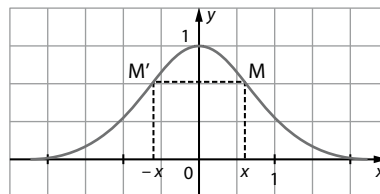
Si $a = 1$, il y a une solution ($x = 0$).

Si $a < 1$, il n'y a aucune solution.

177 Soit M le sommet d'abscisse x , positive, d'un de ces rectangles. L'aire \mathcal{A} du rectangle est donnée par $\mathcal{A}(x) = 2xe^{-x^2}$.

On a $\mathcal{A}''(x) = (2 - 4x^2)e^{-x^2}$.

Il suffit d'étudier les variations de \mathcal{A} sur $[0; +\infty[$.



On vérifie que \mathcal{A} admet un maximum pour $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On calcule $f''(x) : f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$.

On vérifie que $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonction logarithme népérien Fonction $x \mapsto \ln x$. Relation fonctionnelle, dérivée.	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître le sens de variation, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. • Utiliser, pour a réel strictement positif et b réel, l'équivalence $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Connaître et exploiter : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$ 	<p>On peut introduire la fonction logarithme népérien grâce aux propriétés de la fonction exponentielle ou à partir de l'équation fonctionnelle.</p> <p>On souligne dans les cadres algébrique et graphique que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont réciproques l'une de l'autre. Tout développement théorique sur les fonctions réciproques est exclu.</p> <p>On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction logarithme en 1 et la limite en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{x}$.</p> <p>On évoque la fonction logarithme décimal pour son utilité dans les autres disciplines.</p> <p>⇒ [SI] Gain lié à une fonction de transfert.</p> <p>⇒ [SPC] Intensité sonore, magnitude d'un séisme, échelle des pH.</p> <p>ⒶP Équations fonctionnelles.</p>

B Notre point de vue

Pour introduire la fonction logarithme népérien, nous utilisons les propriétés de la fonction exponentielle comme préconisé par le programme. Nous avons évité bien sûr tout développement théorique sur les fonctions réciproques en faisant simplement observer la symétrie des courbes représentatives de deux fonctions réciproques autour de la droite d'équation $y = x$ au cours de l'activité 1. Une démonstration accessible est proposée dans la correction, elle s'adresse aux élèves les plus avancés.

Une introduction de la fonction logarithme népérien à partir de l'équation fonctionnelle est proposée en approfondissement et s'adresse donc, d'après nous, aux élèves les plus avancés.

La relation fonctionnelle du logarithme népérien est introduite dans l'activité 3 en lien avec les tables de logarithmes. L'importance historique de ces tables et plus tard des règles à calcul mérite alors d'être soulignée auprès des élèves qui ont du mal à concevoir les problèmes qu'ont pu représenter les calculs sans calculatrice. C'est l'objet, entre autre, du texte d'introduction page 133. Cette relation fonctionnelle sera particulièrement utilisée dans la résolution d'équations et d'inéquations comportant des « \ln ». Dans la résolution de ces exercices, il est important d'insister sur la notion préliminaire de condition d'existence pour ancrer ce réflexe chez les élèves.

Les propriétés de la fonction logarithme népérien : sa dérivée et ses limites sont introduites dans les activités 2 et 4. La majorité des exercices portent sur l'étude de fonctions comportant un « \ln », c'est aussi le cas des deux TP proposés. Dans ces exercices interviendront particulièrement les notions de composition dans le cadre des dérivées et des limites et assez régulièrement le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Puisque bon nombre d'équations comportant un « \ln » ne peuvent pas être résolues de manière exacte, c'est ainsi qu'on envisage l'existence et le nombre de solutions à ces équations.

Conformément au programme, dans les recherches de limites, la connaissance des limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ (avec } n \text{ entier naturel)}$$

n'est pas indispensable ; l'élève peut simplement savoir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et effectuer les bonnes transformations d'écriture pour pouvoir se ramener à cette limite.

La fonction logarithme décimal est introduite dans l'activité 5. Les exercices utilisant cette notion permettent d'appréhender son utilité dans d'autres disciplines.

C Avant de commencer

Voir livre page 423 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

D Activités

Activité 1 Un aller-retour avec la fonction exponentielle

Le but de cette activité est d'introduire la fonction logarithme népérien comme fonction réciproque de la fonction exponentielle. La restriction de la fonction carré aux réels positifs et la fonction racine sont prises dans un premier temps en exemple pour présenter la notion de fonctions réciproques. La symétrie des courbes représentatives des fonctions réciproques autour de la droite d'équation $y = x$ est ici attendue comme conjecture à partir du graphique, une démonstration, détaillée, est envisageable pour les élèves les plus avancés.

1. a. La fonction h est continue et strictement croissante. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $h(x) \in [0; +\infty[$; comme $m \in [0; +\infty[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation $h(x) = m$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$.

b. La solution de l'équation $h(x) = m$ est \sqrt{m} .

c. $h(i(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$ et $i(h(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x$ puisque $x \geq 0$.

d. On obtient le tracé de la courbe représentative de la fonction racine.

e. La droite rouge a pour équation $y = x$. Cette droite semble être un axe de symétrie pour les deux courbes.

Démonstration :

Soit i et h deux fonctions réciproques, et \mathcal{C}_h et \mathcal{C}_i respectivement leurs courbes représentatives.

Soit M et M' les points de coordonnées, dans un repère orthonormé, $(x; y)$ et $(x'; y')$ et soit $s_{(d)}$ la symétrie autour de la droite (d) d'équation $y = x$.

$$s_{(d)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} (MM') \text{ et } (d) \text{ sont perpendiculaires} \\ \text{le milieu de } [MM'] \text{ est sur } (d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{x+x'}{2} = \frac{y+y'}{2} \end{cases}$$

avec \vec{u} un vecteur directeur de (d), soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x + y' - y = 0 \\ \frac{x+x'}{2} = \frac{y+y'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Finalement, d'une part, si $M \in \mathcal{C}_h$ alors $y = h(x)$ et $x' = h(y')$ donc $i(x') = i(h(y')) = y'$, soit $M' \in \mathcal{C}_i$.

D'autre part, si $M \in \mathcal{C}_i$ alors $y = i(x)$ et $x' = i(y')$ donc $h(x') = h(i(y')) = y'$, soit $M' \in \mathcal{C}_h$.

Donc \mathcal{C}_h et \mathcal{C}_i sont symétriques autour de la droite (d).

2. a. $e^x > 0$ pour tout x réel donc $e^x = m$ n'a pas de solution si m est un réel négatif ou nul.

b. $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $e^x = e \Leftrightarrow x = 1$; $e^x = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = -1$.

c. La fonction exponentielle est continue et strictement croissante et pour tout x réel, $e^x \in]0; +\infty[$.

Comme $m \in]0; +\infty[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation $e^x = m$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .

d. Avec la calculatrice, on obtient : $\alpha \approx 0,69$.

3. a. $M'(1; 0)$, $M'(e; 1)$ et $M'\left(\frac{1}{e}; -1\right)$.

b. Les deux courbes sont symétriques autour de la droite d'équation $y = x$.

c. $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln e^{-1} = \ln \frac{1}{e} = -1$ et $\ln 2 = \alpha \approx 0,69$.

Activité 2 En pente douce

Le but de cette activité est de déterminer la dérivée de la fonction logarithme népérien.

Les deux premières questions permettent d'émettre des conjectures qu'on démontre ensuite dans la question 3 en admettant que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 05_TS_activite2_1.ggb et 05_TS_activite2_2.ggb (GeoGebra).

1. a. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien au point d'abscisse un réel x strictement positif, semble être $\frac{1}{x}$.

b. Dans la cellule **C2**, on peut taper la formule **=1/A2**.

$$\mathbf{2. a.} \ m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$$

- b. $\lim_{x \rightarrow 2} m = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2} = \frac{1}{2}$; cette valeur est le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f en A.
- c. Conjecture : pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.
3. a. $g'(x) = u'(x) e^{u(x)}$.
- b. $g(x) = e^{\ln x} = x$ donc $g'(x) = \ln'(x) e^{\ln x} = \ln'(x) \times x$ ou $g'(x) = 1$.
- c. On a $g'(x) = \ln'(x) \times x = 1$ donc $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Activité 3 Additionner pour calculer un produit

Le but de cette activité est de découvrir la relation fonctionnelle de la fonction logarithme népérien. Cette relation établie, les élèves pourront expérimenter l'utilité des tables de logarithmes. Ce peut être aussi l'occasion de parler des règles à calcul utilisant le même principe et qui étaient utilisées il y a encore 40 ans.

1. a. $A \approx 3,555$; $B \approx 3,496$; $C \approx 4,356$; $D \approx 3,496$; $E \approx 4,356$; $F \approx 3,555$. Il semblerait que : $A = F$ soit $\ln 5 + \ln 7 = \ln 35$; $B = D$ soit $\ln 3 + \ln 11 = \ln 33$; $C = E$ soit $\ln 13 + \ln 6 = \ln 78$.
- b. On peut bien sûr utiliser un tableur. On peut conjecturer que : $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$.
2. $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b$ et $e^{\ln(a \times b)} = a \times b$, donc : $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$.
3. $\ln(7 \times 15,3) = \ln 7 + \ln 15,3 \approx 1,946 + 2,728 \approx 4,674$; or $\ln(107,1) \approx 4,674$ donc $7 \times 15,3 = 107,1$.

Activité 4 Droite se confondant avec une courbe

Le but de cette activité est d'établir la limite de $\frac{\ln(1+h)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 05_TS_activite4.ggb (GeoGebra).

1. Le coefficient directeur de (AM) pour h s'approchant de 0 semble être de 1.

2. a. $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{(1+h) - 1} = \frac{\ln(1+h)}{h}$.

b. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ d'après la question 1.

c. Cette limite est le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f en A.

3. a. $f'(1) = 1$, le coefficient directeur de T est donc 1.

b. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = f'(1) = 1$. Ainsi, on introduit l'idée d'une approximation affine de la fonction logarithme népérien au voisinage de 0.

Activité 5 Pour contracter un graphique

Le but de cette activité est d'introduire et de donner une pertinence à la fonction logarithme décimal.

1. $\frac{\ln(10^k)}{\ln 10} = \frac{k \ln 10}{\ln 10} = k$.

2. Le graphique n'est pas à l'échelle.

	Abscisse	
(A) France	4,54	5
(B) États-Unis	4,64	B
(C) Brésil	3,59	H
(D) Afrique du Sud	3,68	A
(E) Congo	3,02	4
(F) Turquie	3,79	F
(G) Vietnam	2,79	D
(H) Singapour	4,42	C
(I) Algérie	3,43	I
(J) Burundi	1,95	3
(K) Norvège	4,79	E
		G
		2
		J
		1
		0

E Exercices

POUR DÉMARRER

1. a. $B > A$. b. $A > B$.

2. a. $x + 1 > x$ donc $\ln(x+1) > \ln x$.

b. $x < 1$ donc $\ln x < \ln 1$ soit $\ln x < 0$.

c. $x > e$ donc $\ln x > \ln e$ soit $\ln x > 1$.

2. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.

2. a. Par définition de la limite en $+\infty$ ou pour $x > e^{1000}$, on a $\ln x > 1000$.

- b. Par définition de la limite en 0 ou pour $x < e^{-1000}$, on a $\ln x < -1000$.

3. 1. Fausse, par exemple $f\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

2. Vraie, $f(e) = \ln e = 1$.

3. Fausse, \ln n'est pas définie en 0.

4. Vraie, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc \mathcal{C} admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

5. Fausse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

4 1. Si $x < 0$ alors $4 - 5x > 4$ et a fortiori $4 - 5x > 0$.

2. Si $-2 < x < 2$ alors $4 > 4 - x^2 > 0$.

3. Si $x < 1$ alors $1 - x > 0$.

5 1. On doit avoir $5 - 2x > 0$ soit $x < \frac{5}{2}$.

2. On doit avoir $4x^2 - 25 > 0$ soit $x > \frac{5}{2}$ ou $x < -\frac{5}{2}$.

3. On doit avoir : $x > 0$ et $2 - x > 0$ soit $0 < x < 2$.

4. On doit avoir : $x > 0$ et $x^2 - 1 > 0$ soit $x > 1$.

6 1. $S = \left\{ \frac{e^3}{5} \right\}$. 2. $S = \{\sqrt{e}\}$. 3. $S = \left\{ \frac{1}{7e} \right\}$. 4. $S = \{1\}$.

7 Voir livre page 423.

8 1. Condition d'existence : $x \in]-2; 2[$; $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

2. Condition d'existence :

$$x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[; S = \{-\sqrt{1+e}; \sqrt{1+e}\}.$$

3. $S = \{\ln 3\}$.

4. Condition d'existence : $x \in]0; +\infty[$; $S = \{3\}$.

9 a. $S = \{e\}$. b. $S = \{1; 5\}$.

c. $S = \{1; e\}$. d. $S = \{1; e^2\}$.

10 1. $S = \{(-1; 2)\}$. 2. $S = \{(e^{-1}; e^2)\} = \left\{ \left(\frac{1}{e}; e^2 \right) \right\}$.

11 1. $S = \{(-5; 3)\}$. 2. $S = \{(e^{-5}; e^3)\} = \left\{ \left(\frac{1}{e^5}; e^3 \right) \right\}$.

12 1.

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
$1 - 2\ln x$		+	-

2.

x	0	$\frac{1}{e^3}$	$+\infty$
$3 + \ln x$		-	+

3.

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x(1 - \ln x)$		-	0	-

4.

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$(\ln x)^2 - 1$		+	0	+

13 Voir livre page 423.

14 1. Condition d'existence : $x \in]0; +\infty[$; $S = \left]0; \frac{e}{3}\right]$.

2. Condition d'existence : $x \in]-\infty; 4[$; $S = \{3; 4\}$.

3. Condition d'existence : $x \in]-1; \frac{3}{2}[$; $S = \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$.

4. Condition d'existence :

$$x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[; S =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[.$$

15 1. Condition d'existence : $x \in \mathbb{R}$; $S = \mathbb{R}$.

2. Condition d'existence : $x \in]-1; 1[$; $S = \left]-1; -\frac{1}{2}\right[$.

3. Condition d'existence : $x \in]-7; 7[$; $S =]-5; 5[$.

4. Condition d'existence : $x \in \left]-\frac{1}{2}; 3\right[$; $S = \left[\frac{2}{3}; 3\right]$.

16 $f'(x) = e^x - 3$.

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
f		$3 - 3\ln 3$	

17 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$; $g'(x) = 1 + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{x+2}{x}$;

$$h'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

f est décroissante sur $]0; 1[$ et croissante sur $]1; +\infty[$.

g est croissante sur $]0; +\infty[$.

h est décroissante sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ et croissante sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.

18 1. et 2. $f'(x) = 2\ln x \times \frac{1}{x}$; $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f		0	

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
g		$\frac{1}{e}$	

19 Voir livre page 423.

20 $A = 3\ln 2$, $B = 4\ln 2$, $C = 5\ln 2 + 1$, $D = \frac{5}{2}\ln 2$, $E = -\ln 2$,
 $F = 1 - \ln 2$, $G = 2 - 2\ln 2$ et $H = 6\ln 2 + 3$.

21 $A = 2\ln 2 + \ln 5$, $B = 2\ln 2 + 2\ln 5$, $C = 1 + 4\ln 2 + \ln 5$,
 $D = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5$, $E = \ln 5 - \ln 2$, $F = -\ln 2 - 2\ln 5$
et $G = \ln 5 - 2\ln 2$.

22 $A = \ln 4$, $B = \ln 5$, $C = \ln 2$ et $D = \ln(3e^2)$.

23 $A = -\ln 3$, $B = -\ln 4$ et $C = -\ln 100$.

24 1. $B = \ln 6$, donc $A < B$.

2. $A = \ln 8$ et $B = \ln 9$, donc $A < B$.

25 a. Condition d'existence : $x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$; $S = \{-4\}$.

b. Condition d'existence : $x \in]1; +\infty[$; $S = \{5\}$.

c. Condition d'existence : $x \in]-5; +\infty[$; $S = \{8e - 5\}$.

d. Condition d'existence : $x \in]5; +\infty[$; $S = \{7\}$.

26 a. Pour $x > 0$ et $y > 0$, le système est équivalent à
 $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases}$ donc $S = \{(2; 2)\}$.

b. Pour $x > 0$ et $y > 0$, le système est équivalent à
 $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ donc $S = \{(2; 3); (3; 2)\}$.

27 a. Condition d'existence : $x \in \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$; $S =]1; +\infty[$.

b. Condition d'existence :

$$x \in]-\infty; +\infty[; S =]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[.$$

c. Condition d'existence : $x \in]-\infty; 5[$; $S =]-\infty; -7[$.

d. Condition d'existence : $x \in]2; +\infty[$; $S = [3; +\infty[$.

28 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.

29 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

30 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

31 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

32 Voir livre page 423.

33 a. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \ln x) = -\infty$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$ comme la fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} .

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \ln x) = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{3}{1 - \ln x} = +\infty$ avec $\lim_{x \rightarrow e} \ln x = \ln e = 1$ comme la fonction logarithme népérien est continue sur $]0; +\infty[$ et $\ln x < 1$ pour $0 < x < e$.

d. $\lim_{x \rightarrow e^2} \frac{x}{-2 + \ln x} = +\infty$ avec $\lim_{x \rightarrow e^2} \ln x = \ln e^2 = 2$ comme la fonction logarithme népérien est continue sur $]0; +\infty[$ et $\ln x > 2$ pour $x > e^2$.

34 $1. x \times \left(2 - \frac{\ln x}{x}\right) = 2x - \ln x = f(x)$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ d'après le cours donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{\ln x}{x}\right) = 2$$

et avec la règle sur la limite d'un produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

35 $1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$.

2. $f'(x) = \frac{1}{x-2}$.

3.

x	$-\infty$	2
f	$+\infty$	$-\infty$

36 $1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$.

2. $f'(x) = \frac{2}{2x+6} = \frac{1}{x+3}$.

3.

x	-3	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

37 Voir livre page 423.

38 $1. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. $f'(x) = \frac{-1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2 + x}$.

3.

x	0	$+\infty$
f	$+\infty$	0

POUR S'ENTRAÎNER

39 a. Condition d'existence : $x \in]-\infty; 2[$; $S = \{2 - e^{-3}\}$.

b. Condition d'existence :

$$x \in]-\infty; -\sqrt{8}[\cup]\sqrt{8}; +\infty[; S = \{-3; 3\}.$$

c. Condition d'existence :

$$x \in \left]-\frac{4}{3}; 0\right[\cup]0; +\infty[; S = \{-1; 4\}.$$

d. Condition d'existence : $x \in]-\infty; -2[$; $S = \{-4\}$.

e. Condition d'existence : $x \in \mathbb{R}$; $S = \{-2 + \ln 3\}$.

f. Condition d'existence :

$$x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[; S = \left\{\frac{\ln 2}{1 - \ln 2}\right\}.$$

40 a. Condition d'existence : $x \in]2; +\infty[$; $S = \emptyset$.

b. Condition d'existence : $x \in \mathbb{R}$; $S = \{\ln(e^2 - 1)\}$.

c. Condition d'existence : $x \in]2; +\infty[$; $S = \{3\}$.

d. Condition d'existence :

$$x \in]-\infty; 2[\cup]4; +\infty[; S = \{1; 5\}.$$

e. Condition d'existence : $x \in \mathbb{R}$; $S = \emptyset$.

f. Condition d'existence : $x \in]-\infty; 0[\cup]3; +\infty[$; $S = \emptyset$.

41 Voir livre page 424.

42 a. $S = \emptyset$.

b. $S = \emptyset$.

c. $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{e}}; e\right\}$.

d. $S = \left\{\frac{1}{e^3}; e\right\}$.

e. $S = \emptyset$.

f. $S = \{0; \ln 3\}$.

43 a. Condition d'existence :

$$x \in \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[; S = \left]\frac{e^{-1}-1}{3}; +\infty\right[.$$

b. Condition d'existence : $x \in]-2; +\infty[$; $S =]-2; -1[$.

c. Condition d'existence :

$$x \in \mathbb{R}; S =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[.$$

d. Condition d'existence : $x \in]-1; 1[$; $S = \left]-1; \frac{1}{3}\right[$.

e. Condition d'existence : $x \in \mathbb{R}$; $S = [1 - \ln 3; +\infty[$.

f. Condition d'existence :

$$x \in \mathbb{R}; S =]-\infty; -\sqrt{4 + \ln 2}[\cup]\sqrt{4 + \ln 2}; +\infty[.$$

44 a. Condition d'existence : $x \in \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$; $S = \left]\frac{1}{3}; 1\right[$.

b. Condition d'existence :

$$x \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[; S = [-2e; -e[\cup]e; 2e].$$

c. Condition d'existence :

$$x \in]-\infty; -3[\cup]-1; +\infty[; S = \left]-1; \frac{2e-3}{1-2e}\right[.$$

d. Condition d'existence :

$$x \in]0; +\infty[; S = \left]0; \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2})\right[.$$

45 **1.** La réciproque est vraie : si $\ln x > 3$ alors $x > e^3$.

2. Correctif : dans certains livres, il manque la condition « Soit $x > 0$. » au début de la question.

Si $\ln x$ est négatif alors $0 < x \leq 1$.

46 a. Condition d'existence : $x \in]0; +\infty[; S =]0; \ln 2[$.

b. Condition d'existence : $x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[; S = \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

c. Condition d'existence : $x \in \mathbb{R}; S =]-\infty; \ln 4[$.

d. Condition d'existence : $x \in \mathbb{R}; S =]-\infty; \ln 2[$.

47 a. Condition d'existence :

$$x \in]0; +\infty[; S =]0; e^2] \cup [e^3; +\infty[.$$

b. Condition d'existence :

$$x \in]0; +\infty[; S =]0; e^{-1}[\cup [e^3; +\infty[.$$

c. Condition d'existence :

$$x \in \mathbb{R}; S =]-\infty; 0[\cup]\ln 4; +\infty[.$$

d. Condition d'existence : $x \in \mathbb{R}; S =]-\ln 3; \ln 2[$.

49 1. $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 4$.

$$p(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup]4; +\infty[.$$

2. a. $S = \left\{ e^{-\frac{1}{2}}; e^4 \right\}$. **b.** $S =]\ln 4; +\infty[$.

c. Condition d'existence :

$$x \in \left] -\infty; \frac{3}{2} \right[\cup]2; +\infty[; S = \left\{ -\frac{1}{2}; 4 \right\}.$$

50 Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

05_TS_exercice50.ods (OpenOffice), 05_TS_exercice50.xls (Excel 2003) et 05_TS_exercice50.xlsx (Excel 2007).

1. La suite semble décroissante et minorée par 1.

2. On démontre par récurrence la propriété $P(n)$:

« $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ » pour n entier naturel quelconque, en utilisant dans la preuve de l'hérédité le fait que la fonction logarithme népérien est croissante sur $]0; +\infty[$.

3. (u_n) est minorée par 1 et décroissante, elle est donc convergente.

51 FAUX, condition d'existence : $x \in]0; +\infty[; S = \{2\}$.

52 VRAI : $S = \{\ln 4\}$.

53 FAUX, condition d'existence :

$$x \in]0; +\infty[; S =]e^{-2}; e^7[.$$

54 FAUX : $-1 \leq -e^x \leq -0,3 \Leftrightarrow \ln 0,3 \leq x \leq 0$.

55 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

f est décroissante sur $]0; 1[$ et f est croissante sur $]1; +\infty[$.

56 1.

x	0	e	$+\infty$
$u(x)$	-	0	+

2. a. $f'(x) = u(x)$.

b.

x	0	e	$+\infty$
f		$-e$	

57 1.

x	0	$e^{\frac{5}{2}}$	$+\infty$
$u(x)$	-	0	+

2. a. $f'(x) = u(x)$.

b.

x	0	$e^{\frac{5}{2}}$	$+\infty$
f		$-2e^{\frac{5}{2}}$	

58 1. Vraie.

2. a. La réciproque de la proposition est : « si $f'(x) = \frac{1}{x}$, alors $f(x) = \ln x$ ».

b. Cette proposition réciproque est fausse.

Un contre-exemple : $g(x) = \ln x + 3$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$.

59 1. La tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse e a pour équation $y = \frac{1}{e}x$, elle passe donc par l'origine du repère.

2. La tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$, elle coupe donc l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -1.

60 Voir livre page 424.

61 1. f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

x	1	\sqrt{e}	$+\infty$
f	$f(1) = 0$	$\frac{1}{2e}$	

2. On a $n+1 \geq n \geq 2$ comme f est décroissante sur $]2; +\infty[$, il vient : $f(n+1) \leq f(n) \leq f(2)$ donc $w_{n+1} \leq w_n$.

On en déduit que (w_n) est décroissante à partir du rang 2.

62 1. $f'(x) = a + \frac{c}{x}$, $f(1) = 1$ donc $a + b = 1$ (E_1).

$f'(2) = 0$ donc $a + \frac{c}{2} = 0$ soit $2a + c = 0$ (E_2);

$f(2) = 2\ln 2$ soit $2a + b + c\ln 2 = 2\ln 2$ et avec (E_1) on obtient $a + c\ln 2 = 2\ln 2 - 1$.

2. $a = -1$; $b = 2$ et $c = 2$ donc $f(x) = -x + 2 + 2\ln x$.

3. $f'(x) = -1 + \frac{2}{x}$. f est croissante sur $]0; 2[$ et décroissante sur $]2; +\infty[$.

63 1. FAUX, $f'(x) = 2x \times \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$.

donc $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$. La tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$.

2. VRAI, $f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 0$ donc la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$ est horizontale.

64 VRAI, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2}$ donc $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$ soit f est strictement décroissante.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. Comme f est continue

sur $]0; +\infty[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$.

65 $A = 4 \ln 2 = 4a$.

$B = 2 \ln 3 + \ln 2 = 2b + a$.

$C = \ln 3 + 2 \ln 2 + 2 \ln 5 = 2a + b + 2c$.

$D = -\ln 3 - \ln 2 + \ln 5 = -a - b + c$.

$E = 2 \ln 5 - 3 \ln 3 = -3b + 2c$.

$F = 2 + \ln 5 + 2 \ln 3 - 5 \ln 2 = 2 - 5a + 2b + c$.

$G = 3 \ln 5 + 2 \ln 2 - \ln 3 - 4 = -4 + 2a - b + 3c$.

$H = \ln 3 + 3 \ln 5 + 2 \ln 2 - 1 = -1 + 2a + b + 3c$.

66 a. $\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln \left(x \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln(1+x)$.

b. $\ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = \ln(x+1-x)$

donc $\ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = \ln 1 = 0$.

67 Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 05_TS_exercice67.alg (AlgoBox).

Pour $n = 3$, on obtient $a = 3 \ln 2 = \ln 8$.

Pour $n = 10$, on obtient $a = 10 \ln 2 = \ln(2^{10}) = \ln 1\,024$.

68 1. $T^2 = kd^3 \Leftrightarrow \ln(T^2) = \ln(kd^3)$ donc :

$$2 \ln T = \ln k + 3 \ln d + \ln k.$$

2. D'après le 1., dans un repère du plan les points M de coordonnées $(\ln T; \ln d)$ sont alignés sur la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x - \ln k$.

69 a. Condition d'existence : $x \in]4; +\infty[$; l'équation est équivalente à $x^2 - 6x + 5 = 0$ donc $S = \{5\}$.

b. Condition d'existence : $x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{17}{2}; +\infty[$; l'équation est équivalente à $2x^2 - 17x - 9 = 0$ donc $S = \left\{-\frac{1}{2}; 9\right\}$.

70 a. Condition d'existence : $x \in]32; +\infty[$; l'équation est équivalente à $x^2 - 34x = 0$ donc $S = \{34\}$.

b. Condition d'existence : $x \in]-\infty; 2[\cup]32; +\infty[$; l'équation est équivalente à $x^2 - 34x = 0$ donc $S = \{0; 34\}$.

71 a. $n \geq 42$.

b. $n \geq 47$.

c. $n \geq 21$.

72 a. Condition d'existence : $x \in \left] \frac{1}{3}; +\infty[\right]$; l'inéquation est équivalente à $3x^2 - 3x \leq 0$ donc $S = \left] \frac{1}{3}; 1 \right]$.

b. Condition d'existence : $x \in]3; +\infty[$; l'inéquation est équivalente à $3x^2 - 3x \leq 0$ donc $S = \emptyset$.

c. Condition d'existence : $x \in \left] \frac{1}{3}; +\infty[\right]$; l'inéquation est équivalente à $3x^2 - 3x \leq 0$ donc $S = \left] \frac{1}{3}; 1 \right]$.

73 Voir livre page 424.

74 1. a. $(x-1)(2x^2+x-6) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6 = p(x)$.

b. $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = \frac{3}{2}$.

$p(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2; -1[\cup \left] \frac{3}{2}; +\infty[\right]$.

2. a. Condition d'existence : $x \in]6; +\infty[$; l'équation est équivalente à $p(x) = 0$ donc $S = \emptyset$.

b. Condition d'existence : $x \in]6; +\infty[$; l'inéquation est équivalente à $p(x) > 0$ donc $S =]6; +\infty[$.

76 1. $u_{n+1} = 3 \times u_n$ et $u_n = 2 \times 3^n$.

2. $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(3) + \ln(u_n) - \ln(u_n) = \ln 3$, donc la suite de terme général $\ln(u_n)$ est arithmétique.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et par composition : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = +\infty$.

4. $u_n > 10^{1\,000} \Leftrightarrow 2 \times 3^n > 10^{1\,000}$ d'où $n > \frac{\ln(10^{1\,000}) - \ln 2}{\ln 3}$.

Comme $\frac{1\,000 \ln 10 - \ln 2}{\ln 3} \approx 2\,095,3$, la plus petite valeur de n telle que $u_n > 10^{1\,000}$ est $n = 2\,096$.

77 Soit p_n le prix de la voiture au 1^{er} janvier (2012 + n).

(p_n) est une suite géométrique de premier terme

$p_0 = 10\,000$ et de raison $q = 0,89$. On cherche n tel que

$p_n \leq 4\,000$ soit $10\,000 \times 0,89^n \leq 4\,000$; il vient $n \geq \frac{\ln 0,4}{\ln 0,89}$ donc $n \geq 8$. La voiture vaudra moins de 4 000 euros en 2020.

78 VRAI, $\ln a^3 - \ln a^2 = \ln \left(\frac{a^3}{a^2} \right) = \ln a$

et $\ln a^{25} - \ln a^{24} = \ln \left(\frac{a^{25}}{a^{24}} \right) = \ln a$.

79 FAUX, $\ln x$ n'existe pas pour tout réel x .

80 FAUX, on a : $u_{n+1} = e \times u_n$ donc :

$$v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(e) + \ln(u_n) - \ln(u_n) = 1.$$

(v_n) est arithmétique de raison 1.

81 $\lim_{x \rightarrow 0} (2x+1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (-1 + \ln x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow e} (2x+1) = 2e+1$ et $\lim_{x \rightarrow e} (-1 + \ln x) = 0$ avec $-1 + \ln x < 0$ pour $x < e$, donc $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = -\infty$. On en déduit que \mathcal{C}_f admet la

droite d'équation $x = e$ comme asymptote verticale.

82 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

83 Voir livre page 424.

84 Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 05_TS_exercice84.alg (AlgoBox).

1. a. et b. On démontre par récurrence la propriété $P(n)$: « $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ » pour tout entier naturel n en utilisant dans l'hérédité le fait que la fonction logarithme népérien est croissante sur $]0; +\infty[$.

2. (u_n) est majorée par 4 et croissante donc elle converge.

3.



On en déduit : $\ell \approx 3,1461$.

85 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x} \right) \right) = +\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x} \times \frac{\ln x}{x} \right) = 0$.

86 a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln x}{x} = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln((x-1)+1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right)$

et par composition et d'après une limite du cours :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln((x-1)+1)}{x-1} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$$

donc $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{x^2 - 1} \right) = \frac{1}{2}$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x^2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x} \right) \right) = +\infty$.

87 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2}{\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{2}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}} \right) = 1$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = 0$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + (\ln x)^2}{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} + \ln x}{\frac{1}{\ln x} - 1} = -\infty$.

88 1. a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x (1 - \ln x)) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x (1 - \ln x)) = -\infty$.

b. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

2. a. $f'(x) = \frac{1}{x} - 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{1 - 2 \ln x}{x}$.

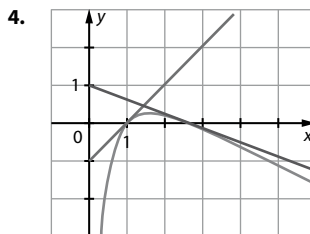
x	0	1	\sqrt{e}	e	$+\infty$
f	$-\infty$	0	$f(\sqrt{e})$	0	$-\infty$

b. Le maximum de f est $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{4}$.

3. a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x (1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$ donc les points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées (1 ; 0) et (e ; 0).

b. La tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$. La tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse e a pour équation $y = -\frac{1}{e}x + 1$.

c. Avec le tableau de variation et la question 3. a., on peut dire que \mathcal{C}_f est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \in]1 ; e[$ et \mathcal{C}_f est au-dessous de l'axe des abscisses pour $x \in]0 ; 1[\cup]e ; +\infty[$.



89 1. VRAI : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln X}{X} \right) = 0$.

2. FAUX : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\ln(x^3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{\ln X}{X}} \right) = +\infty$.

90 VRAI : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

91 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x + 4) = +\infty$ et

$\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$, donc, avec le théorème sur la limite des fonctions composées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = +\infty$.

2. $f'(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4}$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$-\frac{11}{4}$	$+\infty$

92 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = \frac{2x \times (x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x^2} = \frac{x+2}{x(x+1)}$.

f est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

93 Voir livre page 424.

94 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 3x - 4) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = 1$ et $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = \ln 1 = 0$, comme la fonction logarithme népérien est continue sur $]0 ; +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} \right) = 0$$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(\frac{1+2x}{1-x} \right) = +\infty$.

d. $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{x+7}{9-x^2} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$, donc, avec le théorème sur la limite des fonctions composées : $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \ln\left(\frac{x+7}{9-x^2}\right) = +\infty$.

95 a. $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+1}$. b. $g'(x) = 3 \times \frac{2x}{x^2} + 2x = \frac{6}{x} + 2x$.

c. $h'(x) = 2x - \frac{2}{1+2x}$. d. $k'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1}$.

97 1. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^x) = +\infty$.

b. $\lim_{X \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale.

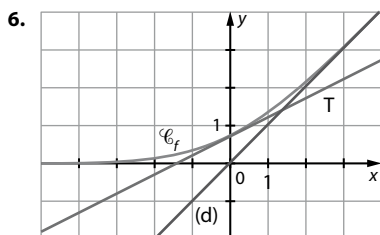
2. $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	0	$+\infty$

3. f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , de plus pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in]0; +\infty[$, donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation $f(x) = m$ pour $m \in]0; +\infty[$ admet une unique solution.

4. T a pour équation : $y = \frac{1}{2}x + \ln 2$.

5. $1 + e^x > e^x$ donc $\ln(1 + e^x) > \ln(e^x)$ comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, soit $f(x) > x$, donc \mathcal{C}_f est au-dessus de la droite (d).



98 1. Pour un acide : $10^{-7} < [\text{H}_3\text{O}^+] < 10^{-1}$.

2. Pour une base : $10^{-14} < [\text{H}_3\text{O}^+] < 10^{-7}$.

3. Pour le sang : $\text{pH} = -\log(3,98 \times 10^{-8}) \approx 7,4$ donc le sang est légèrement basique.

99 La contraposée de la proposition est : « si $a = b$, alors $\log(a) = \log(b)$ » et cette proposition est vérifiée.

100 1. VRAI :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$$

2. VRAI : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\left(-\frac{1}{x}\right) \times \ln(1-x)\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(1+(-x))}{-x} = \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$

101 1. VRAI : $f'(x) = \frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}} = \frac{1}{e^{-x-1}+1}$.

2. FAUX, pour tout réel x : $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.

102 1. FAUX :

$$\log(5 \times 10^3) = \frac{\ln(5 \times 10^3)}{\ln 10} = \frac{\ln 5}{\ln 10} + \frac{3 \ln 10}{\ln 10} = \log 5 + 3.$$

2. FAUX : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln 10} = +\infty$.

103 a. Condition d'existence : $x \in]1; +\infty[$; l'équation est équivalente à $x^2 - x - 12 = 0$ donc $S = \{4\}$.

b. Condition d'existence : $x \in]-5; -2[\cup]1; +\infty[$; l'équation est équivalente à $x^2 - x - 12 = 0$ donc $S = \{-3; 4\}$.

104 a. Condition d'existence : $x \in]0; +\infty[$; l'inéquation est équivalente à $X^2 - 3X - 4 \geq 0$ avec $X = \ln x$ donc :

$$S =]0; e^{-1}] \cup [e^4; +\infty[.$$

b. Condition d'existence : $x \in]-\infty; 0[\cup]3; +\infty[$; l'inéquation est équivalente à $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ donc $S =]-1; 0[\cup]3; 4[$.

105 a. $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (3x - x^2) = 0$ avec $(3x - x^2) > 0$ pour $0 < x < 3$

et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln X = -\infty$ donc, avec le théorème sur la limite des

fonctions composées : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (3x - x^2) = -\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3+x)}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(3+x)}{3+x}}{\frac{1+x}{3+x}}$, or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{3+x} = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3+x)}{3+x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3+x)}{1+x} = 0.$$

106 $f'(x) = \frac{1}{x} - 3 \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{1-6 \ln x}{x}$.

x	0	$e^{\frac{1}{6}}$	$+\infty$
f'(x)		+	-
f		$\frac{1}{12}$	

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 429 et le site www.bordas-index.fr pour les corrections détaillées.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

116 Condition d'existence : $x \in]0; 5[$; l'inéquation est équivalente à $-x^2 + 5x - 6 < 0$ donc $S =]0; 2[\cup]3; 5[$.

117 Condition d'existence : $x \in]1; +\infty[$; l'inéquation est équivalente à $4x^2 - 4x - 3 > 0$ donc $S = \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$.

118 1. $f'(x) = 1 \times (1 + \ln x) + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 2$.

2. $g'(x) = 1 + \frac{2x+5}{x^2+5x}$.

3. $h'(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

► Équations fonctionnelles

► $k \ln(x \times y) = k(\ln x + \ln y) = k \ln x + k \ln y$ donc les fonctions $k \ln$ sont solutions de l'équation fonctionnelle (1).

► $f(1 \times 1) = f(1) = f(1) + (1)$ donc $f(1) = 0$.

Pour tout x de $]0; +\infty[$, on a :

$$g(x) = f(x \times a) - f(x) = f(x) + f(a) - f(x) = f(a)$$

donc g est une fonction constante sur $]0; +\infty[$.

On déduit $g'(x) = 0$ et d'autre part :

$$g'(x) = af'(x \times a) - f'(x) \text{ donc } f'(x) = af'(x \times a).$$

► $h'(x) = f'(x) - \frac{k}{x} = 0$ donc h est une fonction constante.

$$h(1) = f(1) - k \ln(1) = 0 - 0 = 0.$$

► Finalement $h(x) = 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$, donc $f(x) = k \ln(x)$.

On a vu pour tout x de $]0; +\infty[$: si $f = k \ln$ alors f est solution de l'équation fonctionnelle (1) et si f est solution de l'équation fonctionnelle alors $f = k \ln$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation fonctionnelle (1) sont les fonctions de la forme $k \ln$.

119 1. $k(x + y) = kx + ky$ donc les fonctions linéaires sont solutions de l'équation fonctionnelle (2).

2. a. Pour $x = 0$ et $y = 0$, on a $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ donc :

$$f(0) = 2f(0) \text{ et } f(0) = 0.$$

b. Pour tout x de \mathbb{R} , on a :

$$g(x) = f(x + a) - f(x) = f(x) + f(a) - f(x) = f(a)$$

donc g est une fonction constante et $g'(x) = 0$.

D'autre part $g'(x) = f'(x + a) - f'(x)$, on en déduit :

$f'(x + a) = f'(x)$ d'où avec $x = 0$, $f'(a) = f'(0)$ pour tout réel a de $]0; +\infty[$ soit f' est une fonction constante.

c. Comme f' est une fonction constante, soit $f'(x) = k$ où k est un réel, on a : $f(x) = kx + k'$ où k' est une constante réelle. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f(x) = kx$.

3. On a vu que pour tout x de \mathbb{R} : si $f(x) = kx$ alors f est solution de l'équation fonctionnelle (2) et si f est solution de l'équation fonctionnelle alors $f(x) = kx$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation fonctionnelle (2) sont les fonctions linéaires.

120 Correctif : La première ligne de l'énoncé doit être « On cherche à déterminer toutes les fonctions définies, dérivables sur \mathbb{R} , **non nulles** et solutions de ... ».

1. $e^{k(x+y)} = e^{kx} \times e^{ky}$ donc les fonctions $x \mapsto e^{kx}$ sont solutions de l'équation fonctionnelle (3).

2. a. Correctif : il faut lire $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$, on s'assure ainsi que pour x réel : $f(x) \geq 0$. De plus s'il existe un réel a tel que $f(a) = 0$, alors pour tout x réel :

$$f(x) = f((x - a) + a) = f(x - a) \times f(a) = 0$$

ce qui est impossible puisque f n'est pas la fonction constante égale à 0. Donc pour tout x réel : $f(x) > 0$.

b. L'existence de g est justifiée par la remarque ci-dessus.

$g(x + y) = \ln(f(x + y)) = \ln(f(x) \times f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y))$ donc $g(x + y) = g(x) + g(y)$ soit g vérifie l'équation fonctionnelle (2).

D'après l'exercice 119 : g est telle que $g(x) = kx$ pour tout x réel donc $\ln(f(x)) = kx$ et $f(x) = e^{kx}$ pour tout x réel.

On a vu que pour tout x réel : si $f(x) = e^{kx}$ alors f est solution de l'équation fonctionnelle (3) et si f est solution de l'équation fonctionnelle alors $f(x) = e^{kx}$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation fonctionnelle (3) sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto e^{kx}$ où k est un réel quelconque.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Position relative de deux courbes

Ce TP permet d'étudier la position relative de deux courbes, d'abord graphiquement puis en démontrant ces résultats à l'aide de l'étude d'une fonction. On étudie une fonction faisant intervenir un paramètre ; les valeurs de ce paramètre conduisent à envisager deux types de variation.

Fichiers associés sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

05_TS_TP1.ggb (GeoGebra) et 05_TS_TP1.g2w (Geoplan).

A. Émettre une conjecture

1. a. Pour tracer la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction \ln , taper **f(x)=lnx** dans le champ de saisie.

b. Construire un curseur a , puis taper **g(x)=a*x^2** dans le champ de saisie.

2. Il semble que :

- pour $a > 0,2$: \mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f ;
- pour $0,2 > a > 0$: \mathcal{C}_g est d'abord au-dessus puis au-dessous et de nouveau au-dessus de \mathcal{C}_f ;
- pour $a < 0$: \mathcal{C}_f est d'abord au-dessus puis au-dessous de \mathcal{C}_g .

B. Étude de la différence $g(x) - f(x)$

1. Si $h(x) > 0$ on a $g(x) - f(x) > 0$ soit $g(x) > f(x)$ donc \mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f et de même si $h(x) < 0$ alors \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g .

2. a. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 - \ln x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(ax - \frac{\ln x}{x} \right)$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc :

– si $a > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$;

– si $a < 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.

3. a. $h'(x) = 2ax - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 1}{x}$.

b. Si $a < 0$:

x	0	$+\infty$
h	$+\infty$	$-\infty$

c. Si $a > 0$:

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$+\infty$
h	$+\infty$	$\frac{1}{2}(1 + \ln 2a)$	$+\infty$

C. Étude du cas où $a < 0$

1. Sur $]0; +\infty[$, h est continue, h est strictement décroissante et $h(x) \in]-\infty; +\infty[$; or $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc le corollaire du

théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un unique réel α de $]0; +\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

2. Correctif : il faut lire « ...donner la position relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g lorsque a est un réel strictement négatif ».

On a :

x	0	α	$+\infty$
$h(x)$		+	0 -

Donc, lorsque $a < 0$:

– pour $0 < x < \alpha$: \mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f ;

– pour $x > \alpha$: \mathcal{C}_g est au-dessous de \mathcal{C}_f .

D. Étude du cas où $a > 0$

1. $h\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{1}{2}(1 + \ln 2a)$ et d'après le tableau de variation du **B.3.c.**, c'est le minimum de h donc pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$h(x) \geq \frac{1}{2}(1 + \ln 2a).$$

2. $\frac{1}{2}(1 + \ln 2a) \geq 0 \Leftrightarrow \ln 2a \geq -1 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2e}$.

3. Si $a < \frac{1}{2e}$, alors $h\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) < 0$.

Sur $]0; \frac{1}{\sqrt{2a}}[$, h est continue, h est strictement décroissante

et $h(x) \in \left]h\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right); +\infty\right[$. Or $0 \in \left]h\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right); +\infty\right[$, donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un unique réel β de $]0; \frac{1}{\sqrt{2a}}[$ tel que $h(\beta) = 0$.

Sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2a}}; +\infty\right[$, h est continue, h est strictement croissante

et $h(x) \in \left]h\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right); +\infty\right[$. Or $0 \in \left]h\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right); +\infty\right[$, donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un unique réel γ de $\left]\frac{1}{\sqrt{2a}}; +\infty\right[$ tel que $h(\gamma) = 0$.

Finalement sur $]0; +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions : β et γ .

4. a. Si $0 < a < \frac{1}{2e}$.

x	0	β	γ	$+\infty$
$h(x)$		+	0 -	0 +

Pour $0 < x < \beta$: \mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f .

Pour $\beta < x < \gamma$: \mathcal{C}_g est au-dessous de \mathcal{C}_f .

Pour $\gamma < x$: \mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f .

b. Si $a = \frac{1}{2e}$.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$+\infty$
$h(x)$		+	0 +

\mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f et pour $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_f ont un point commun.

c. Si $a > \frac{1}{2e}$, h est positive donc \mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f .

TP 2 Plus courte distance d'un point à la courbe de \ln

Ce TP s'intéresse à la distance d'un point à une courbe. On conjecture un résultat puis on le démontre à l'aide de l'étude d'une fonction.

Fichiers associés sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

05_TS_TP2.ggb (GeoGebra) et 05_TS_TP2.g2w (Geoplan).

A. Envisager un minimum

1. Avec GeoGebra, taper **f(x)=lnx** dans le champ de saisie.

2. a. Après avoir placé un point M sur la courbe, construire le segment [OM] et afficher la distance $d = OM$.

Tracer la courbe d'équation $y = d(x)$ (pour cela faire apparaître le lieu des points de coordonnées $(x; d(x))$). En faisant bouger le point M sur \mathcal{C}_f , on crée des points de la courbe d'équation $y = d(x)$.

b. On a : $0,6 < \alpha < 0,7$.

B. Étude de $d(x)$

1. $d(x) = OM = \sqrt{x^2 + (\ln x)^2}$.

$$2. a. d'(x) = \frac{2x + 2\ln x \times \frac{1}{x}}{2\sqrt{x^2 + (\ln x)^2}} = \frac{x^2 + \ln x}{x\sqrt{x^2 + (\ln x)^2}}.$$

b. Pour $x \in]0; +\infty[$, $x\sqrt{x^2 + (\ln x)^2} > 0$ donc $d'(x)$ est du signe de $x^2 + \ln x$.

3. a. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + \ln x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x) = +\infty$.

b. $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$. g est croissante sur $]0; +\infty[$.

c. Sur $]0; +\infty[$, g est continue, g est strictement croissante et $g(x) \in]-\infty; +\infty[$. Or $0 \in]-\infty; +\infty[$, donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un unique réel α de $]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

d. Avec la calculatrice, on obtient : $0,652 < \alpha < 0,653$.

4. a.

x	0	α	$+\infty$
$d'(x)$		-	0 +
d			

b. Le minimum de d est atteint pour $x = \alpha$ donc $\alpha = x_0$.

c. On a $g(\alpha) = 0$ soit $\alpha^2 + \ln \alpha = 0$ donc $\ln \alpha = -\alpha^2$ et

$$d(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + (\ln \alpha)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (-\alpha^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4}.$$

On a vu que $\alpha > 0$ donc :

$$d(\alpha) = \sqrt{\alpha^2} \times \sqrt{1 + \alpha^2} = |\alpha| \sqrt{1 + \alpha^2} = \alpha \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

C. Tangente au point d'abscisse α

1. Il semblerait que T soit perpendiculaire à (OM) lorsque la distance OM est minimale.

2. a. T_0 a pour équation $y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln \alpha$.

b. \vec{u} a pour coordonnées $\left(1; \frac{1}{\alpha}\right)$.

c. $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $(\alpha; \ln \alpha)$.

d. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha + \frac{\ln \alpha}{\alpha}$, or $\ln \alpha = -\alpha^2$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha + \frac{-\alpha^2}{\alpha} = 0$.

e. On en déduit que \vec{u} et \vec{v} ont orthogonaux soit T_0 et (OM) sont perpendiculaires, ce qui démontre la conjecture du 1.

CAP VERS LE BAC

Sujet A

1. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ donc $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$ soit f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2. a. $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{-x^2+2x-4}{x+4} < 0$ pour tout $x > 0$, donc g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

b. Pour $x \in [2; 3]$, g est continue et strictement décroissante de plus $g(x) \in [g(3); g(2)]$. Or $0 \in [g(3); g(2)]$, donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2; 3]$ et avec la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 2,2$.

c. Pour $0 \leq x < 2$: $g(x) > 0$ puisque $g(2) > 0$ et g est strictement décroissante et pour $x > 3$: $g(x) < 0$ puisque $g(3) < 0$ et g est strictement décroissante. On en déduit que α est l'unique solution de $g(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$ autrement dit α est l'unique valeur telle que $f(x) - x = 0$ sur $]0; +\infty[$ soit α est l'unique solution de $f(x) = x$ sur $]0; +\infty[$.

3. a. On démontre par récurrence la propriété P(n): « $1 \leq u_n \leq \alpha$ » pour tout entier naturel n , en utilisant dans l'hérédité le fait que la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$ et que $f(\alpha) = \alpha$.

b. Pour tout n entier naturel: $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Or on a vu que pour tout entier naturel n , $u_n \leq \alpha$ et g est strictement décroissante donc $g(u_n) \geq g(\alpha)$ soit $g(u_n) \geq 0$. On en déduit que (u_n) est croissante.

Finalement (u_n) est croissante et majorée par α donc (u_n) converge. Notons ℓ sa limite, on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

comme f est continue sur $]0; +\infty[$ donc $\ell = f(\ell)$ et on en déduit que $\ell = \alpha$ d'après le 1.c.

Sujet B

1. VRAI: $\ln 4 \times \ln \sqrt{2} = 2 \ln 2 \times \frac{1}{2} \ln 2 = (\ln 2)^2$.

2. FAUX: $u'(x) = -1 + \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2} + \frac{\ln(2x)}{2x} \right) \right) = -\infty$.

x	0	1	$+\infty$
u	$-\infty$	$\ln 2$	$-\infty$

Donc en appliquant deux fois le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$, on montre que l'équation $u(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0; +\infty[$.

3. FAUX, $f'(x) = \ln x + 1$ donc $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$. Une équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x$.

4. FAUX. $u_{n+1} - u_n = 1 - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ donc:

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+1}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right).$$

Comme $n^2+2n+1 > n^2+2n$ pour tout n entier naturel:

$\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$ et comme la fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: $\ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right) > 0$.

Finalement $u_{n+1} - u_n > 0$, donc (u_n) est croissante.

5. VRAI: $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$ et $f(0) = 0$.

x	0	$+\infty$
f	0	

On en déduit que pour tout x de $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$.

6. VRAI:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{\ln(x^2+3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln(x^2+3)}{x^2+3}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln X}{X}} = +\infty.$$

Sujet C

1. $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{(\ln x)^2}$ donc $f'(x) > 0$ pour $x > 1$, soit f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. T_a a pour équation $y = f'(a) \times x + f(a) - af'(a)$. T_a passe par le point O si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.

b. $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - xf'(x) = 0$ donc:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{\ln x} - \frac{(\ln x)^2 + 1}{(\ln x)^2} = 0.$$

D'où $g(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$,

soit $g(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$.

c. $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$.

t	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$u'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
u	$-\infty$	$-\frac{22}{27}$	-2	$+\infty$	

Sur $]-\infty; 1[$, $u(t) < -\frac{22}{27}$ donc l'équation $u(t) = 0$ n'a pas de solution. Sur $]1; +\infty[$, u est continue et strictement croissante, de plus $u(t) \in]-2; +\infty[$ donc, avec le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution α . Finalement sur \mathbb{R} , l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution α .

d. D'après b., α est aussi l'unique solution de $g(x) = 0$, donc il existe une unique tangente à la courbe \mathcal{C} passant par le point O.

Sujet D

1. $f'_n(x) = -n - 1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x} = -n - 1 - \ln x$.

2. a. L'abscisse x du point A_n tel que la tangente à \mathcal{C}_n en A_n soit parallèle à l'axe des abscisses est telle que :

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow -n - 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -n - 1 \Leftrightarrow x = e^{-n-1}.$$

Il existe donc bien un unique point A_n .

b. A_n a pour coordonnées $(e^{-n-1}; f(e^{-n-1}))$, or

$f(e^{-n-1}) = -ne^{-n-1} - e^{-n-1} \ln(e^{-n-1}) = -ne^{-n-1} - e^{-n-1} \times (-n-1)$ donc $f(e^{-n-1}) = e^{-n-1}$. On en déduit que A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.

3. a. \mathcal{C}_n coupe l'axe des abscisses au point B_n d'abscisse x tel que $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow -x(n + \ln x) = 0$.

Comme $x \neq 0$, $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow n + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-n}$.

Donc \mathcal{C}_n coupe l'axe des abscisses en un unique point B_n d'abscisse e^{-n} .

b. On a $f'_n(e^{-n}) = -n - 1 + n = -1$, donc le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_n au point B_n est indépendant de l'entier n .

Sujet E

Partie A

1. $f'_1(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x} - 1 = \frac{1 - x}{e^x + x}$, sur $]0; +\infty[$: $e^x + x > 0$ donc $f'_1(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit que f_1 est croissante sur $]0; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$.

2. $f_1(x) = \ln(e^x + x) - \ln e^x = \ln\left(\frac{e^x + x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = 0.$$

3.

x	0	1	$+\infty$
f_1	0	$\ln(e+1) - 1$	0

Partie B

1. $f'_k(x) = \frac{e^x + k}{e^x + kx} - 1 = \frac{k(1-x)}{e^x + kx}$, sur $]0; +\infty[$; f_k est croissante sur $]0; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$.

2. $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - \ln e^x = \ln\left(\frac{e^x + kx}{e^x}\right) = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right) = 0.$$

3. a.

x	0	1	$+\infty$
f_k	0	$\ln(e+k) - 1$	0

b. D'après le tableau de variation, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f_k(x) \leq \ln(e+k) - 1.$$

$$\text{Or } \ln(e+k) - 1 = \ln(e+k) - \ln e = \ln\left(\frac{e+k}{e}\right) = \ln\left(1 + \frac{k}{e}\right).$$

Étudions sur $]0; +\infty[$ la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x - \ln(1+x).$$

$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, on en déduit que g est croissante sur $]0; +\infty[$ et comme $g(0) = 0$, pour tout x de $]0; +\infty[$: $g(x) \geq 0$, en particulier pour $x = \frac{k}{e}$. Ce qui donne $\frac{k}{e} \geq \ln\left(1 + \frac{k}{e}\right)$.

Finalement, on établit ainsi que pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f_k(x) \leq \ln\left(1 + \frac{k}{e}\right) \leq \frac{k}{e}.$$

4. Pour $p < m$, \mathcal{C}_p est au-dessous de \mathcal{C}_m .

121 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 1 - 2 \ln x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3 + \frac{1}{x} - 2 \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

$f'(x) = 2x - 3 - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x}$. f est décroissante sur $]0; 2[$ et croissante sur $]2; +\infty[$.

122 $x^2 - 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 7$.

(E_1) $\Leftrightarrow e^x = -3$ ou $e^x = 7$ donc $S = \{\ln 7\}$.

(E_2) : Condition d'existence : $x \in]3; +\infty[$ et l'équation est équivalente à $\ln((x-1)(x-3)) = \ln(3 \times 2^3)$ soit $x^2 - 4x - 21 = 0$, on en déduit que $S = \{7\}$.

123 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + x - 6) = +\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + x - 6) = 0$ avec $x^2 + x - 6 > 0$ pour $x < -3$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + x - 6) = -\infty.$$

$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-6}$ donc sur $]-\infty; -3[$, $f'(x) < 0$ soit f est strictement décroissante.

124 $f(e^3) = e^6 \times (3 - \ln e^3) = 0$,

$$f'(x) = 2x \times (3 - \ln x) + x^2 \times \frac{-1}{x} = 5x - 2x \ln x \text{ donc}$$

$$f'(e^3) = 5e^3 - 2e^3 \ln e^3 = 5e^3 - 6e^3 = -e^3.$$

Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f en $x = e^3$ est donc :

$$y = -e^3 x + e^6.$$

POUR ALLER PLUS LOIN

125 1. Pour $N = 20$, $I = 100 I_0$ et pour $N = 120$, $I = 10^{12} I_0$.

2. $N = 10 \log(\sqrt{10^{21}}) = 10 \times \frac{\ln(\sqrt{10^{21}})}{\ln 10} = 10 \times \frac{21}{5} = 105 \text{ dB}$.

126 Partie A

1. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$.

2. g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$:

$$g'(x) = 1 - 1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x} = -\ln x.$$

3.

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	0	-
g	0	1	$-\infty$

Partie B

1. a. b. On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.

2. a. $v_n = \ln u_n = \ln \frac{e^n}{n^n} = \ln e^n - \ln n^n = n - n \ln n = g(n).$

Soit $1 < n < n+1$, alors $g(1) > g(n) > g(n+1)$ comme g est décroissante sur $]1; +\infty[$, soit $0 > v_n > v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est décroissante.

b. $u_n = e^{v_n}$, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , on en déduit que (u_n) est décroissante.

3. $u_n = e^{v_n}$ donc $u_n > 0$ soit (u_n) est minorée par 0. Comme (u_n) est décroissante, elle est majorée par son premier terme : $u_1 = e$.

4. (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{g(n)} = 0.$$

127 1. $f'(x) = \frac{1}{x} \times x^2 - (1 + \ln x) \times 2x = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3}.$
 f est croissante sur $]0; \frac{1}{\sqrt{e}}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty[.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln x}{x^2} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} \right) = 0.$

\mathcal{C}_f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

3. Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ est $y = e^3 x - e^2$.

128 1. a. $f'(x) = 2(a(\ln x)^2 + b \ln x + c) + 2x \left(2a \frac{\ln x}{x} + \frac{b}{x} \right)$

ou $f'(x) = 2a(\ln x)^2 + 2(2a + b)\ln x + 2(b + c).$

b. $f'(e) = -\frac{2e-0}{e-\frac{1}{2}} = 4, f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ et $f'(\sqrt{e}) = 0.$

c. $f'(e) = 2a + 2(2a + b) + 2(b + c) = 6a + 4b + 2c = 4.$

$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 2a - 2(2a + b) + 2(b + c) = -2a + 2c = 0.$

$f'(\sqrt{e}) = \frac{a}{2} + (2a + b) + 2(b + c) = \frac{5a}{2} + 3b + 2c = 0.$

Il vient $a = 2, b = -3$ et $c = 2$ donc :

$$f(x) = 2x(2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2).$$

2. a. $f'(x) = 4(\ln x)^2 + 2 \ln x - 2.$

$2(\ln x + 1)(2 \ln x - 1) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 2$ donc

$f'(x) = 2(\ln x + 1)(2 \ln x - 1).$

b. et c. Correctif : à la question c, il faut déterminer les valeurs exactes des extrema locaux de f .

x	0	$\frac{1}{e}$	\sqrt{e}	$+\infty$	
$\ln x + 1$	-	0	+	+	
$2\ln x - 1$	-	-	0	+	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f		$\frac{14}{e}$	$2\sqrt{e}$		

129 1. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0.$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty.$

2. a. $h'(x) = 2x + 2 - \ln x.$

b. $h''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}.$
 h' est décroissante sur $]0; \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[.$

c. Le minimum de h' sur $]0; +\infty[$ est $h'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + \ln 2$; il est strictement positif donc $h'(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[.$

3.

x	0	$+\infty$
h	0	$+\infty$

4. Une équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1 est $y = 4x$.

130 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln x}{x}} = +\infty.$

2. Pour $x = 10^5$: $\frac{x}{\ln x} \approx 8\,686$; pour $x = 10^7$: $\frac{x}{\ln x} \approx 620\,421$;
 pour $x = 10^8$: $\frac{x}{\ln x} \approx 5\,428\,681.$

Le théorème semble valide.

131 1. a. $\varphi'(x) = 2x - 4x \ln x - 2x^2 \times \frac{1}{x} = -4x \ln x.$

φ est décroissante sur $]1; +\infty[.$

b. $\varphi(e) = 1 + e^2 - 2e^2 = 1 - e^2.$

c. Sur $[1; e]$, φ est continue et strictement décroissante et de plus $\varphi(x) \in [1 - e^2; 2]$. Or $0 \in [1 - e^2; 2]$, donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un unique réel α de $[1; e]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

Avec la calculatrice, on obtient : $1,8 < \alpha < 1,9$.

d. φ est décroissante donc pour $x > e$, $\varphi(x) < 1 - e^2$.

On en déduit que sur $[1; +\infty[$, α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$.

x	1	α	$+\infty$
$\varphi(x)$	+	0	-

2. a. $\frac{1}{x} \times (1 + x^2) - \ln x \times 2x = \frac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1 + x^2)^2} = \frac{\varphi(x)}{x(1 + x^2)^2}.$

b. f est croissante sur $[1; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.
c. Pour tout x de $[1; +\infty[$: $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ et $\ln x \geq 0$, donc
 $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}$.

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} \right) = 0$ donc d'après l'encadrement du c. et le théorème dit « des gendarmes » : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

132 1. a. On peut conjecturer que l'origine du repère est un centre de symétrie de \mathcal{C}_f .

b. $f(x) + f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
 $= \ln\left(\frac{1-x}{1+x} \times \frac{1+x}{1-x}\right) = \ln 1 = 0$.

c. Ce résultat démontre que f est impaire et donc \mathcal{C}_f admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\infty$ donc \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale. Par symétrie de \mathcal{C}_f autour de l'origine, on en déduit que \mathcal{C}_f admet aussi la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale.

3. a. $f'(x) = \frac{-2}{(1+x)(1-x)}$.

b.

x	-1	1
f	$+\infty$	$-\infty$

4. Une équation de T est $y = -2x$.

5. a. $g'(x) = f'(x) + 2 = \frac{-2x^2}{(1+x)(1-x)}$.

g est décroissante sur $]-1; 1[$.

b. $g(0) = 0$ donc g est positive sur $]-1; 0]$ et négative sur $[0; 1[$.

c. Sur $]-1; 0[$, \mathcal{C}_f est au-dessus de T ; sur $[0; 1[$, \mathcal{C}_f est au-dessous de T et pour $x = 0$, \mathcal{C}_f et T s'intersectent.

133 1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$.

x	-1	4	$+\infty$
f		$f(4) = 2 - 2\ln 2$	

2. Le minimum de f : $2 - 2\ln 2$ est positif donc pour tout x de $]1; +\infty[$: $f(x) > 0$, soit $\sqrt{x} - \ln x > 0$ donc $\sqrt{x} > \ln x$.

Comme $x > 1$, $\frac{1}{x} > 0$, d'où $\frac{\sqrt{x}}{x} > \frac{\ln x}{x}$ soit $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{\ln x}{x}$;

de plus, pour $x > 1$, $\frac{\ln x}{x} \geq 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, avec l'inégalité du 2. et le théorème dit « des gendarmes », on en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

134 Fichier associé sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 05_TS_exercice134.ggb (GeoGebra).

1. a. Construire un paramètre m et taper dans le champ de saisie :

$f(x) = (x^2 - 1)/x - m \ln(x)$.

b. Dans le cas m compris entre -2 et 2 , les fonctions f_m semblent strictement croissantes et dans les autres cas les fonctions f_m semblent ne pas être croissantes.

c. Toutes les courbes \mathcal{C}_m semblent passer par le point de coordonnées $(1; 0)$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x^2} - m \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$.

3. a. $f'_m(x) = \frac{2x \times x - (x^2 - 1) \times 1}{x^2} - \frac{m}{x} = \frac{x^2 - mx + 1}{x^2}$.

b. $x^2 - mx + 1 = 0$ et $\Delta = m^2 - 4$.

Pour $-2 < m < 2$, $\Delta < 0$ donc $f'_m(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$ et f_m est croissante ; pour $m = 2$ et $m = -2$, $\Delta = 0$ donc $f'_m(x) \geq 0$ sur $]0; +\infty[$ et f_m est croissante.

x	0	$+\infty$
$f'_m(x)$		+
f_m	$-\infty$	$+\infty$

Si $m > 2$ ou $m < -2$, $\Delta > 0$; l'équation $x^2 - mx + 1 = 0$ a deux

solutions : $x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}$ et $x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$.

Donc on a :

x	0	x_1	x_2	$+\infty$
$f'_m(x)$		+	-	+
f_m	$-\infty$			$+\infty$

4. a. $f_m(1) = \frac{1^2 - 1}{1} - m \ln 1 = 0$, donc toutes les courbes \mathcal{C}_m passent par le point de coordonnées $(1; 0)$.

b. $\frac{a^2 - 1}{a} - m \ln a = b \Leftrightarrow m \ln a = \frac{a^2 - 1}{a} - b$ donc :

$m = \frac{1}{\ln a} \left(\frac{a^2 - 1}{a} - b \right)$ ($\ln a \neq 0$ puisque $a \neq 1$).

c. Ainsi pour tout point de coordonnées $(a; b)$ où $a > 0$ et $a \neq 1$, il n'existe qu'une valeur de m telle que \mathcal{C}_m passent par ce point. Ainsi $(1; 0)$ est bien l'unique point commun de toutes les courbes \mathcal{C}_m .

135 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x - kx^2 + 1) = -\infty$.

2. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} = 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \left(\frac{\ln x}{x^2} - k + \frac{1}{x^2} \right) \right) = -\infty$ car $k > 0$.

3. $f'(x) = \frac{1}{x} - 2kx = \frac{1 - 2kx^2}{x}$.

4.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2k}}$	$+\infty$
$f'_k(x)$		+	-
f_k	$-\infty$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)$	$-\infty$

$$f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \frac{1 - \ln(2k)}{2}.$$

$$5. \frac{1 - \ln(2k)}{2} > 0 \Leftrightarrow k < \frac{e}{2}.$$

Si $k > \frac{e}{2}$ alors, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f_k(x) < 0$; donc l'équation $f_k(x) = 0$ n'a pas de solution.

Si $k = \frac{e}{2}$ alors l'équation $f_k(x) = 0$ admet une unique solution :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

si $k < \frac{e}{2}$ alors l'équation $f_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $]0; +\infty[$.

6. \mathcal{C}_k passent par le point A de coordonnées $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, donc $f_k(1) = \frac{1}{2}$ soit $-k + 1 = \frac{1}{2}$ donc $k = \frac{1}{2}$.

136 Partie A

$$1. p'(x) = 6x^2 + 4x = 2x(3x + 2)$$

x	$+\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	$+\infty$
$p'(x)$		+	-	+
p	$+\infty$	$-\frac{19}{27}$	-1	$+\infty$

2. Sur $]-\infty; 0[$, $p(x) < -\frac{19}{27}$ donc l'équation $p(x) = 0$ n'a pas de solution. Sur $]0; +\infty[$, p est continue et strictement croissante, de plus $p(x) \in]-1; +\infty[$ donc, avec le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution α . Comme $p(1) = 3 > 0$, on peut affirmer que $0 \leq \alpha \leq 1$. Finalement sur \mathbb{R} l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution α .

3. α est tel que $p(\alpha) = 0$ soit $2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 1 = 0$ donc :

$$\alpha^2(2\alpha + 2) = 1 \text{ soit } \alpha^2 = \frac{1}{2(\alpha + 1)}.$$

4. Comme $0 \leq \alpha \leq 1$, $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2(\alpha + 1)} \leq \frac{1}{2}$ soit $\frac{1}{4} \leq \alpha^2 \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$5. \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & -\infty & \alpha & +\infty \\ \hline p(x) & - & 0 & + \\ \hline \end{array}$$

Partie B

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$, donc Γ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, donc Γ admet une asymptote verticale

d'équation $x = 0$.

$$2. f'(x) = 2x + \frac{-1}{\frac{1}{x^2}} = 2x - \frac{1}{x^2 + x} = \frac{2x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x} = \frac{p(x)}{x^2 + x}.$$

3. Comme $x^2 + x > 0$ sur $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

4. α est tel que $p(\alpha) = 0$ soit $2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 1 = 0$ donc

$$2\alpha^3 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 1 \text{ et finalement } 1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha^3}.$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^2 + \ln\left(\frac{1}{2\alpha^3}\right) = \alpha^2 - \ln 2 - 3\ln \alpha.$$

5. Sur $]0; +\infty[$, f admet un minimum en α qui vaut $f(\alpha)$ donc pour tout x de $]0; +\infty[$: $f(x) \geq f(\alpha)$.

$$\text{Or } \frac{1}{4} \leq \alpha^2 \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } f(\alpha) = \alpha^2 - \ln 2 - 3\ln \alpha$$

$$\text{donc } \frac{1}{4} - \ln 2 - 3\ln \frac{1}{\sqrt{2}} \leq f(\alpha) \leq \frac{1}{2} - \ln 2 - 3\ln \frac{1}{2}$$

$$\text{soit } \frac{1}{4} - \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 2 \leq f(\alpha) \leq \frac{1}{2} - \ln 2 + 3\ln 2$$

$$\text{ou encore } \frac{1 + 2\ln 2}{4} \leq f(\alpha) \leq \frac{1 + 4\ln 2}{2}.$$

Finalement pour tout x de $]0; +\infty[$: $f(x) \geq \frac{1 + 2\ln 2}{4}$.

6.

x	$-\infty$	-1	0	α	$+\infty$
f_k	$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$
		$-\infty$		$f(\alpha)$	

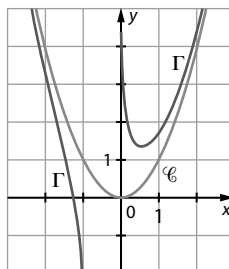
7. Soit la fonction h définie sur I par $h(x) = f(x) - g(x)$, donc :

$$h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Pour $x > 0$, $h(x) > 0$ et Γ est au-dessus de \mathcal{C} .

Pour $x < -1$, $h(x) < 0$ et Γ est au-dessous de \mathcal{C} .

8. (pas à l'échelle demandée)



Prises d'initiatives

137 Étudions pour tout n entier naturel différent de 0, le signe de : $f(n) = \ln(n^{n+1}) - \ln((n+1)^n) = (n+1)\ln n - n\ln(n+1)$.

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.
 g est strictement croissante sur $]0; e]$ et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$.

- Pour n supérieur ou égal à 3, on a donc $g(n) > g(n+1)$, c'est-à-dire $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$. On en déduit que $f(n) > 0$ pour tout entier n supérieur ou égal à 3, c'est-à-dire $n^{n+1} > (n+1)^n$.
- Pour $n = 0$ ou $n = 1$ ou $n = 2$: $n^{n+1} < (n+1)^n$.

138 Il faut montrer que pour tout $0 < a < b$:

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{\ln a + \ln b}{2}.$$

Étudions le signe de :

$$D = \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(a \times b)$$

donc $D = \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - \ln(\sqrt{ab})$ or $a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ donc

$$a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \text{ soit } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0 \text{ ou encore : } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \ln(\sqrt{ab})$ donc $D \geq 0$, ce qui permet de conclure.

139 (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison -2 donc pour tout entier naturel n : $u_n = -2n$.

$$\text{Il vient : } v_n = e^{u_n \times \ln 2} = e^{-2n \times \ln 2} = e^{\ln(2^{-2n})} = 2^{-2n} = \frac{1}{4^n}.$$

140 1. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ donc :

x	0	1	$+\infty$
f		-1	

2. a. Si $x > y > 1$, alors $f(x) \leq f(y)$ comme f est décroissante sur $]1; +\infty[$ soit $\ln x - x \leq \ln y - y$ donc $\ln x - \ln y \leq x - y$.

b. Si $1 > x > y > 0$ alors $f(x) \geq f(y)$ comme f est croissante sur $]0; 1[$ soit $\ln x - x \geq \ln y - y$ donc $\ln x - \ln y \geq x - y$.

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
<p>Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a ; b]$ comme aire sous la courbe.</p> <p>Notation $\int_a^b f(x) dx$.</p> <p>Théorème : si f est une fonction continue et positive sur $[a ; b]$, la fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a ; b]$ et a pour dérivée f.</p>		<p>On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie.</p> <p>On peut mener un calcul approché d'aire (parabole, hyperbole, etc.) pour illustrer cette définition.</p> <p>▣ Il est intéressant de présenter le principe de la démonstration du théorème dans le cas où f est positive et croissante.</p>
<p>Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.</p> <p>Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées. • Connaître et utiliser les primitives de $u'e^u$, $u'u^n$ (n entier relatif, différent de -1) et, pour u strictement positive, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $\frac{u'}{u}$. 	<p>Une primitive F de la fonction continue et positive f étant connue, on a :</p> $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$ <p>▣ Il est intéressant de démontrer ce théorème dans le cas d'un intervalle fermé borné, en admettant que la fonction a un minimum.</p> <p>On admet le cas général.</p> <p>On fait observer que certaines fonctions comme $x \mapsto \exp(-x^2)$ n'ont pas de primitive « explicite ».</p>
<p>Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.</p> <p>Linéarité, positivité, relation de Chasles.</p> <p>Valeur moyenne.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Calculer une intégrale. • Utiliser le calcul intégral pour déterminer une aire. • Encadrer une intégrale. <p>◇ Pour une fonction monotone positive, mettre en œuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.</p>	<p>La formule $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, établie pour une fonction continue et positive, est étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque.</p> <p>L'intégration par parties n'est pas un attendu du programme.</p> <p>La notion de valeur moyenne est illustrée par des exemples issus d'autres disciplines.</p> <p>⇒ [SPC] Mouvement uniformément accéléré.</p> <p>⇒ [SI] Valeur moyenne, valeur efficace dans un transfert énergétique.</p> <p>(AP) Calcul du volume d'un solide.</p>

B Notre point de vue

Conformément au programme, nous avons introduit l'intégrale d'une fonction continue positive comme l'aire « sous la courbe ». Pour illustrer cette définition nous avons, dans l'activité 1, proposé une approche de l'aire sous la parabole par la méthode des rectangles. L'utilisation des fonctionnalités du logiciel GeoGebra est alors très performante pour donner une illustration graphique de l'approche de cette aire par cette méthode.

Dans la première partie du cours figurent la définition de l'intégrale d'une fonction positive et l'algorithme permettant d'encadrer cette intégrale en se basant sur la méthode des rectangles ; dans les savoir-faire correspondants nous avons présenté l'utilisation de la calculatrice pour déterminer une valeur approchée d'une intégrale ainsi que le programme correspondant à l'algorithme.

La deuxième partie du cours est consacrée à la notion de primitive d'une fonction ; conformément au programme nous avons présenté la démonstration du théorème dit « théorème fondamental » dans l'activité 2 en se basant sur des comparaisons d'aires (les élèves ne connaissent pas encore les propriétés de l'intégrale). Après avoir fait cette activité, les élèves devraient comprendre avec plus de facilité le principe de la démonstration du théorème présentée dans le cours. Dans ce paragraphe, nous avons également fait la démonstration du théorème « toute fonction continue admet des primitives » dans le cas d'un intervalle fermé borné, en admettant que la fonction a un minimum.

C'est dans la troisième partie du cours que nous avons proposé la recherche de primitives d'une fonction et les primitives des formes remarquables ; nous avons placé dans les savoir-faire des recherches très classiques de primitives en faisant apparaître toutes les formes remarquables.

Nous pouvons alors aborder, dans la quatrième partie du cours, le calcul des intégrales des fonctions positives puis la généralisation de la notion d'intégrale à des fonctions continues de signe quelconques ; suivent alors le calcul des intégrales et ses propriétés. Il est à noter que la méthode d'intégration par parties n'est plus au programme ; nous l'avons cependant présentée en exercice d'approfondissement 153 pour les meilleurs élèves.

La cinquième partie du cours permet d'appliquer le calcul d'intégral à des calculs d'aire ou de valeur moyenne. Dans les exercices 44 et 45 puis dans le TP2, les élèves ont la possibilité de déterminer une valeur approchée d'une intégrale par différentes méthodes et d'utiliser les TICE.

Les exercices 30, 99 à 102, et le TP1 concernent les suites d'intégrales avec des questions classiques.

Conformément au programme et pour préparer les élèves à certains calculs qu'ils auront à faire dans le chapitre 11 (Lois de probabilité à densité) nous avons proposé un nombre assez important d'exercices où les fonctions sont définies par des intégrales (exercices 30, 49 à 54, 150)

Dans la rubrique Approfondissement de l'accompagnement personnalisé, nous avons présenté l'utilisation des calculs d'intégrales pour déterminer des volumes de solides. Il est à noter que ce calcul n'est plus au programme, et ne concerne donc que les meilleurs élèves conformément au programme.

Dans les pages Cap vers le bac nous avons placé des sujets récents en cherchant à recouvrir tous les types de sujets (Roc, Vrai-Faux, Algo) et toutes les parties de ce chapitre.

Les notions abordées dans le chapitre 6

1. Intégrale d'une fonction positive
2. Primitives d'une fonction continue
3. Recherche des primitives
4. Intégrale d'une fonction continue
5. Des applications du calcul intégral

C Avant de commencer

Le QCM et les exercices proposés dans cette page permettent de faire le point d'une part sur les calculs des dérivées de fonctions de différentes formes et d'autre part sur les connaissances de base concernant les calculs d'aires.

Voir livre page 424 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

D Activités

Activité 1 Des calculs d'aire

L'objectif de cette activité est de présenter la notion d'intégrale d'une fonction continue et positive comme une aire « sous une courbe » ; elle permet également de découvrir la méthode des rectangles et d'obtenir ainsi une valeur approchée de l'aire sous la parabole.

Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

06_TS_activite1.ggb (GeoGebra).

1. $\mathcal{A}_1 = 3$, $\mathcal{A}_2 = 2$ et $\mathcal{A}_3 = 1,5$.

2. a. Une aire est toujours positive et de plus la surface considérée a une aire inférieure ou égale à celle du carré OABC ; l'aire est donc comprise entre 0 et 1.

b. $0 \leq \mathcal{A}_1 \leq 0,5^3$ et $0,5^3 \leq \mathcal{A}_2 \leq 0,5$.

c. $0,5^3 \leq \mathcal{A} \leq 0,5^3 + 0,5$ donc $0,125 \leq \mathcal{A} \leq 0,625$.

3. a. Lorsqu'on augmente le nombre de subdivisions les rectangles augmentent, la somme des aires rouges et la somme des aires vertes sont de plus en plus proches. \mathcal{A} semble être proche de $\frac{1}{3}$.

b. Les suites données convergent toutes les deux vers $\frac{1}{3}$.

Activité 2 Une aire variable

Cette activité permet, sur un exemple, de démontrer que la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f . Les élèves pourront alors comprendre plus facilement le principe de la démonstration du théorème du cours. Correctif : f est une fonction continue sur \mathbb{R} et non pas continue et positive sur \mathbb{R} .

1. a. Pour x strictement positif, la fonction f est positive et $F(x)$ est l'aire, en unités d'aire, de la surface comprise entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite verticale passant par le point de coordonnées $(x; 0)$. Cette aire se calcule avec la formule de l'aire d'un trapèze pour les élèves qui la connaissent ou en ajoutant l'aire d'un rectangle et l'aire d'un triangle ; on trouve $F(x) = 0,5x^2 + 2x$.

b. $F'(x) = x + 2$.

2. a. Pour h strictement positif, $F(x+h) - F(x)$ est l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée en rouge sur le livre élève.

b. Aire (MNPS) = $h \times x^2$ et aire (MNQR) = $h \times (x+h)^2$.

c. $h \times x^2 \leq F(x+h) - F(x) \leq h \times (x+h)^2$ et $x^2 \leq r(h) \leq (x+h)^2$.

d. La limite de $r(h)$ lorsque h tend vers 0 par valeurs supérieures est égale à x^2 .

e. $F'(x) = x^2$.

Activité 3 À la recherche de fonctions

Dans cette activité, l'élève commence par construire un tableau donnant la dérivée de certaines fonctions de référence. Il va ensuite effectuer une lecture inverse de ce tableau lui permettant de découvrir la notion de primitive.

Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

06_TS_activite3.ggb (GeoGebra).

1.

Fonction F définie sur I par	Fonction dérivée F'
$F(x) = x^2$ $I = \mathbb{R}$	$F'(x) = 2x$
$F(x) = x^3$ $I = \mathbb{R}$	$F'(x) = 3x^2$
$F'(x) = e^x$ $I = \mathbb{R}$	$F'(x) = e^x$
$F(x) = \frac{1}{x}$ $I =]0; +\infty[$	$F'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$F(x) = \ln x$ $I =]0; +\infty[$	$F'(x) = \frac{1}{x}$

2. a. $F(x) = x^2$.

b. $G(x) = \frac{1}{2}x^2$.

3. a. $F(x) = x^3$.

b. $G(x) = \frac{1}{3}x^3$.

4. $F(x) = \ln x$.

5. a. Pour $n = 0$, $y = x - 1$.

b. Pour $n = 1$, $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

c. Pour $n = 2$, $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}$.

6. $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ avec k réel.

Activité 4 La tête et les jambes

L'objectif de cette activité est de découvrir la notion de valeur moyenne d'une fonction et son interprétation graphique dans le cas d'une fonction positive.

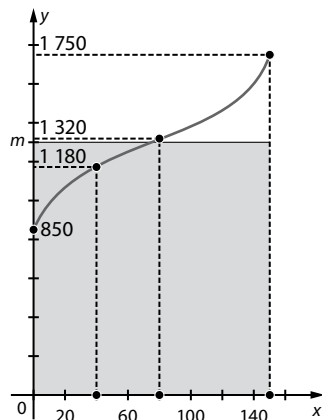
1. La moyenne arithmétique des quatre altitudes est égale à 1 275 mètres.

2. a. C'est la recherche de l'aire « sous la courbe » qui peut lui être utile.

b. Cette aire correspond à l'intégrale de f entre 0 et 150.

c. L'altitude moyenne est alors égale à $\frac{1}{150} \int_0^{150} f(x) dx$.

3. Pour évaluer l'altitude moyenne, on peut chercher m tel que la droite d'équation $y = m$ délimite un rectangle qui a la même aire que l'aire sous la courbe. On trouve m environ égal à 1 288 mètres.



E Exercices

POUR DÉMARRER

1. Par lecture graphique, $I = \int_{-1}^1 f(x) dx = 6$.

2. $f(x) = x$.

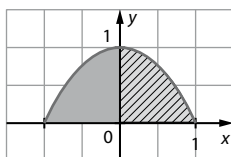
3. Aire = $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 x dx$.

4. Par lecture graphique, $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 x dx = 4,5$.

5. Voir livre page 424.

6. 1. Soit f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1 - x^2$.

La surface dont on a calculé l'aire est la surface comprise entre la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$; il s'agit de la surface hachurée ci-dessous :



2. a. Soit g la fonction définie sur $[-1; 0]$ par $g(x) = 1 - x^2$; par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, la surface située entre la courbe \mathcal{C}_g , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$ a la même aire que la surface précédente.

b. On a donc $\int_{-1}^0 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3}$.

7. $F(x) = \frac{1}{2}x^2$; $G(x) = \frac{1}{3}x^3$ et $H(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

8. $F(x) = 7x$; $G(x) = \frac{1}{4}x^4$ et $H(x) = 7x - 2x^4$.

9. $F(x) = x^3 - 1$.

10. $F(x) = \ln x + 2x$, $G(x) = 3 \ln x$ et $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7 \ln x$.

11. $F(x) = -\frac{1}{x}$, $G(x) = x - \frac{1}{x}$ et $H(x) = \frac{1}{2}x^{-2}$.

12. Voir livre page 424

13. $F(x) = \sin x - \cos x$ et $F(x) = \frac{1}{3} \sin(3x)$.

14. 1. $F(x) = e^{x^2}$ et $G(x) = e^{x^2-x}$.

2. $F(x) = e^{x^2} - 1$ et $G(x) = e^{x^2-x} - 1$.

15. $F(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4$ et $G(x) = \ln(x^2 + 1)$.

16. $F'(x) = e^x + xe^x = f(x)$ donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .

17. $F'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = f(x)$ donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .

18. $F'(x) = \ln x + 1 = f(x)$ donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

19. $I = \int_1^3 2 dx = 6 - 2 = 4$, $J = \int_1^3 2x dx = 9 - 1 = 8$,

$K = \int_1^3 x dx = 4$ et $L = \int_1^3 3x^2 dx = 8 - 1 = 7$.

20. 1. $F(x) = \ln x$.

2. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$.

21. Voir livre page 424.

22. $\int_{-4}^2 f(x) dx = \int_{-4}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 8$.

23. 1. $I = \int_{-1}^2 x dx = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $J = \int_{-1}^2 3x^2 dx = 9$.

2. $K = 5I = 7,5$, $L = 4J = 36$ et $M = K + L = 43,5$.

24. $I = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

25. 1. $I = \int_1^2 e^x dx = e^2 - e$ et $J = \int_1^2 3e^{3x} dx = e^6 - e^3$.

2. $K = 8I = 8(e^2 - e)$ et $L = 5J = 5e^6 - 5e^3$.

26. 1. $F(x) = \ln(x^2 + 1)$.

2. $I = \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln 2$.

27. 1. $x^2 - 1$ est positif sur $[1; 5]$.

2. Donc l'intégrale $\int_1^5 (x^2 - 1) dx$ est positive.

26 1. $\ln x$ est positif sur $[1; 2]$.

2. Donc $\int_1^2 \ln x \, dx$ est positif.

3. La calculatrice donne la valeur approchée 0,386 à 0,001 près par défaut.

27 1. Sur $[-4; 2]$ $f(x)$ est positif donc $\int_{-4}^2 f(x) \, dx$ est positif ; sur $[2; 7]$ $f(x)$ est négatif donc $\int_2^7 f(x) \, dx$ est négatif.

2. Sur $[1; 5]$, $-2 \leq f(x) \leq 3$ donc $-8 \leq \int_1^5 f(x) \, dx \leq 12$.

3. $\int_2^7 f(x) \, dx = \int_2^5 f(x) \, dx + \int_5^7 f(x) \, dx$.

Or pour tout x de $[2; 5]$, $f(x)$ est compris entre -2 et 0 et pour tout x de $[5; 7]$ $f(x)$ est compris entre -2 et -1 ; donc

$$-10 \leq \int_2^7 f(x) \, dx \leq -2.$$

28 1. \ln est croissante sur $[\frac{1}{2}; 1]$.

2. Pour tout t de $[\frac{1}{2}; 1]$, $\ln t$ est supérieur ou égal à $-\ln 2$ donc

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln t \, dt \geq -\frac{\ln 2}{2}.$$

29 Voir livre page 424.

30 1. a. Pour tout x de $[n; n+1]$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

b. Donc, en intégrant membre à membre entre n et $n+1$, on obtient l'encadrement de I_n donné.

2. D'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) converge vers 0.

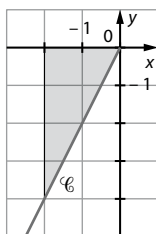
31 1. Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 1$; f est positive sur \mathbb{R} donc $F(2)$ est l'aire de la surface comprise entre la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

2. a. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{4}{3}$.

b. $F'(x) = x^2 + 1$; la fonction F est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3. La dérivée de F est $F'(x) = x^2 + 1$ d'après le cours.

32 1.

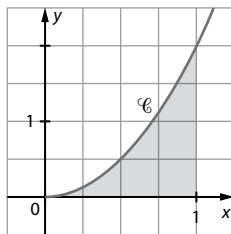


2. a. La fonction f est négative sur $[-2; 0]$ donc l'aire, en unités d'aire, est égale à $-\int_{-2}^0 2x \, dx = 4$.

b. L'aire est celle du triangle coloré, soit 4 carreaux donc 4 unités d'aire.

c. L'aire, en cm^2 , est égale à 4 cm^2 .

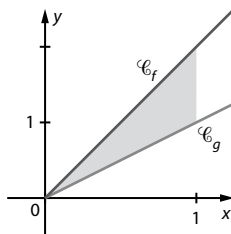
33 1. Correctif : la surface S est comprise entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ (et non pas $x = -1$) et $x = 1$ puisque la fonction est définie sur $[0; 1]$.



2. a. L'aire en unités d'aire est égale à $\int_0^1 2x^2 \, dx = \frac{2}{3}$.

b. L'aire, en cm^2 , est égale à $\frac{4}{3}$.

34 1.



2. a. Sur $[0; 1]$, $f(x)$ est supérieur ou égal à $g(x)$ donc l'aire, en unités d'aire, de la surface donnée est égale à :

$$\int_0^1 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

b. On retrouve ce résultat en déterminant l'aire de deux triangles.

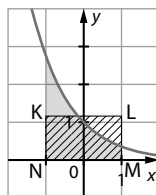
35 Voir livre page 424.

36 1. $V = \frac{1}{4} \int_0^4 (2x) \, dx = 4$.

2. $V = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 x^2 \, dx = 1$.

3. $V = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{2x} \, dx = \frac{1}{4} (e^2 - e^{-2})$.

37 1. f est décroissante sur $[-1; 1]$.



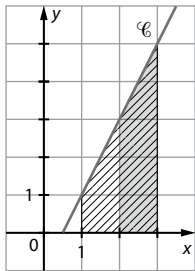
2. Aire $= \int_{-1}^1 e^{-x} \, dx = e - e^{-1}$.

3. a. $V = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x} \, dx = \frac{1}{2} (e - e^{-1})$.

b. La valeur moyenne de f sur $[-1; 1]$ est la hauteur du rectangle MLKN qui a la même aire que l'aire de la surface grise.

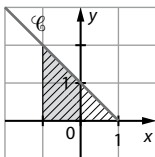
POUR S'ENTRAÎNER

38 1. f est positive sur $[1; 3]$. I est égale à l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée et J est l'aire de la surface grise.



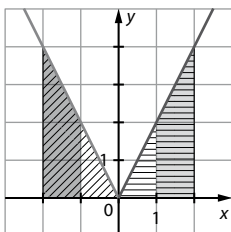
2. Les aires sont respectivement égales à 6 et 4 unités d'aire. Avec la calculatrice, on vérifie que $I = 6$ et $J = 4$.

39 1. La fonction f est positive sur $[-1; 1]$. I est égale à l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée et J est l'aire de la surface grise.



2. $I = 2$ et $J = 1,5$.

40 1. La fonction f est positive sur $[-2; 0]$. I est égale à l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée en oblique et J à l'aire de la surface gris foncé.



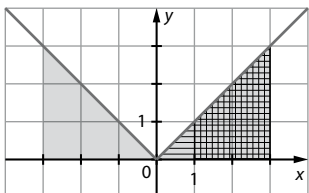
2. $I = 4$ et $J = 3$.

3. a. K est l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée horizontalement : $K = 4$

b. I et K sont égales.

4. $a = 1$ et $b = 2$; la nouvelle intégrale est égale à l'aire, en unités d'aire, de la surface gris clair.

41 1.



2. I est égale à l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée horizontalement, donc $I = 4,5$.

J est égale à l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée verticalement, donc $J = 4$.

K est égale à l'aire, en unités d'aire, de la surface grise, donc $K = 9$.

42 1. L'aire de la surface bleue, est environ égale à 0,35 unités d'aire.

2. Sur $[1; 2]$, l'aire de la surface rouge est comprise entre 0,5 et 1.

Sur $[2; 3]$, l'aire de la surface rouge est comprise entre 0 et 0,5.

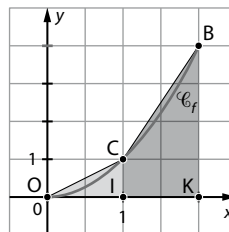
Sur $[3; 4]$, l'aire de la surface rouge est comprise entre 0 et 0,4.

3. Les fonctions f et g sont positives et l'aire colorée est égale à la somme des deux intégrales donc à $\frac{1}{3} + \ln 4$, soit environ 1,72.

43 Voir livre page 424

44 1. a. La valeur affichée est 3

b.



c. Le résultat trouvé est la somme de l'aire du triangle OIC et du trapèze ICBK.

2. a. Cet algorithme donne une valeur approchée de l'aire sous la courbe par la méthode des trapèzes.

b. Programme :

```
Prompt a, b, n
(b-a)/n → h
a → x
0 → u
For (K, 0, n-1)
u+h*(x^2+(x+h)^2)/2 → u
x+h → x
End
Disp u
```

c. Pour que ce programme fonctionne pour toute fonction saisie préalablement dans l'éditeur d'équations, on remplace

x^2 par $Y1(x)$ et $(x+h)^2$ par $Y1(x+h)$.

45 1. Algorithme :

```
Saisir a, b, r
n prend la valeur 1
u prend la valeur (b-a) × f(a)
v prend la valeur (b-a) × f(b)
d prend la valeur v - u
Tant que d > r
n prend la valeur n + 1
h prend la valeur (b-a)/n
x prend la valeur a
u prend la valeur 0
v prend la valeur 0
Pour k variant de 0 à n-1
u prend la valeur u + h × f(x)
x prend la valeur x + h
v prend la valeur v + h × f(x)
Fin Pour
d prend la valeur v - u
Fin Tant que
Afficher u, v
```

2. Programme :

```
Prompt a, b, r
1 → n
(b-a)*√a → u
(b-a)*√b → v
v-u → d
While d > r
n+1 → n
(b-a)/n → h
a → x
0 → u
0 → v
For (K, 0, n-1)
u+h*√x → u
x+h → x
v+h*√x → v
End
v-u → d
End
Disp u, v
```

3. Correctif : la précision demandée doit être de 0,01 et non pas 0,001 sinon la calculatrice met trop longtemps pour afficher le résultat.

Pour $a = 0$, $b = 1$ et $r = 0,01$ on trouve $u \approx 0,66$ et $v \approx 0,67$.

46 FAUX.

47 FAUX.

48 VRAI.

49 **1. a.** $F(2)$ représente l'aire sous la courbe représentative de la fonction inverse entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

b. $F(2) < F(3)$.

2. $F'(x) = \frac{1}{x}$.

3. a. F est croissante sur $[1; +\infty[$.

b. On justifie ainsi que $F(2) < F(3)$.

50 **1.** $F'(x) = e^{-x}$.

2. F est croissante sur \mathbb{R} .

3. $F(0) = 0$ donc F est négative sur $]-\infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$.

51 **1.** La fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(t) = (\ln t)^2$ est continue, donc la fonction F est dérivable sur $[1; +\infty[$.

2. a. $F'(x) = (\ln x)^2$.

b. F est croissante sur $[1; +\infty[$.

52 Voir livre page 424.

53 **1.** $G(x) = F(3x)$ avec $F(x) = \int_0^x \ln(t^2 + 1) dt$.

2. a. $G'(x) = 3F'(3x) = 3\ln(9x^2 + 1)$.

b. G est croissante sur \mathbb{R} .

54 **1.** $F'(x) = \frac{x-4}{x^2+1}$.

2. F est décroissante sur $]-\infty; 4]$ et croissante sur $[4; +\infty[$.

55 **1.** $f'(t) = \frac{e^t(t-1)}{t^2}$; f est croissante sur $]1; +\infty[$.

2. a. $\mathcal{A}(1,5) < \mathcal{A}(2)$.

b. $\mathcal{A}(1) = 0$.

3. a. Par des considérations d'aires ou en utilisant les propriétés sur les intégrales, on prouve l'encadrement donné lorsque $h > 0$.

b. Lorsque $h < 0$, on obtient :

$$f(x_0 + h) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0).$$

c. $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$.

56 **1.** $F'(x) = \ln x + 1 - 1 = f(x)$ donc F est une primitive de f .

2. F_1 telle que $F_1(x) = x \ln x - x + 1$ est la primitive de f qui s'annule en $x = 1$.

57 **1.** $F'(x) = \ln(x+1) + 1 - 1 = f(x)$ donc F est une primitive de f .

2. F telle que $F(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$ est la primitive de f qui s'annule en $x = 0$.

58 **1.** $F'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = f(x)$ donc F est une primitive de f .

2. F_1 telle que $F_1(x) = \sin x - x \cos x - \pi$ est la primitive de f qui s'annule en $x = \pi$.

59 **1.** $F'(x) = 3\cos x - 3\cos x \sin^2 x = 3\cos x(1 - \sin^2 x) = f(x)$ donc F est une primitive de f .

2. F_1 telle que $F_1(x) = 3\sin x - \sin^3 x - 2$ est la primitive de f qui s'annule en $x = \frac{\pi}{2}$.

60 **1.** $F'(x) = f(x)$.

2. $G(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2$.

61 **1.** $F'(x) = -e^{-3x} + (-3)\left(-x - \frac{1}{3}\right)e^{-3x} = 3xe^{-3x}$.

Donc F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

2. $G(x) = \frac{1}{3}\left(-x - \frac{1}{3}\right)e^{-3x} + \frac{4}{9}e^{-3x} + 2$.

63 $F(x) = (x-1)e^{x+4}$.

64 $F(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^2$, $G(x) = x^4 - 3e^x$ et

$H(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{18}x^3 - 7x$.

65 $F(x) = 2x^3 + 11\ln x$, $G(x) = \frac{11}{2}x^2 - 3x^{-1}$

et $H(x) = -\frac{7}{3}x^3 - 2x^{-2}$.

66 $F(x) = 6e^{x^2-3}$, $G(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ et $H(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x$.

67 $F(x) = 3\ln(x^2+x+1)$, $G(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+1}$

et $H(x) = -\frac{1}{4}(x^2+4)^{-2}$.

68 $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$, $G(x) = \ln(e^x + 1)$

et $H(x) = 4\sqrt{2x^2+1}$.

69 $F(x) = \frac{1}{12}(x^2+2x)^6$, $G(x) = \frac{3}{10}(x^2-5)^5$

et $H(x) = -\frac{1}{6}(x^2+1)^{-3}$.

70 Voir page 424.

71 **1.** $F'(x) = 2x \ln x + x - x = f(x)$.

2. $G(x) = x^2 \ln x - x^2$.

3. $G_1(x) = x^2 \ln x - x^2 + 1$.

72 **1.** $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$.

2. $F(x) = \sin x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + k$.

3. $F(x) = \sin x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{2}x$.

73 1. En réduisant au même dénominateur, on trouve :

$$x^2 - x + 3 + \frac{x}{x^2 + 1} = f(x).$$

2. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$.

3. $F(0) = 0$ donc la primitive de f dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0; -1)$ est G définie par :

$$G(x) = F(x) - 1.$$

74 1. f est continue sur \mathbb{R} donc f admet des primitives sur \mathbb{R} .

2. Les primitives F de f sont telles que $F' = f$; or f est négative sur \mathbb{R} donc les primitives de f sont décroissantes sur \mathbb{R} .

75 La fonction f doit être positive sur $[-3; -1]$, négative sur $[-1; 3]$ et positive sur $[3; 5]$ puisque $F' = f$, donc la fonction f est représentée par la courbe ①.

76 1. L'énoncé est juste puisque $F' = f$.

2. L'énoncé réciproque est « Si la fonction F est croissante sur \mathbb{R} , alors la fonction f est positive sur \mathbb{R} » ; cet énoncé est vrai puisque $F' = f$.

77 FAUX car F est la dérivée de f .

78 VRAI car $F' = f$.

79 $I = 18; J = 9; K = 2 \ln 3$.

80 $I = -3; J = 0,5; K = e - e^{-1}$.

81 $I = \frac{3}{8}; J = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3; K = \frac{1}{2}(e^4 - e^1)$.

82 $I = \ln 4 - \ln(e^{-1} + 3)$.

Une primitive de f telle que $f(x) = \sin^2 x \cos x$ est F telle que $F(x) = \frac{1}{3} \sin^3 x$ donc $J = \frac{1}{3}$.

Une primitive de f telle que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$ est F telle que $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1}$ donc $K = \frac{2}{3}$.

83 Voir livre page 425.

84 1. Algorithme :

Saisir A, B
Calculer l'intégrale de f entre A et B
Afficher cette intégrale

2. Programme :

```
Prompt A, B
intégrFonct(Y1,X,A,B)→I
Disp I
```

85 1. $2x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(2x-1)(x+1)+1}{x+1} = f(x)$.

2. $F(x) = x^2 - x + \ln(x+1)$.

3. $\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = \ln 2$.

87 FAUX.

88 VRAI.

89 VRAI : une primitive sur $[2; 3]$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \text{ est la fonction } F \text{ définie par } F(x) = \ln(\ln x); \text{ donc :}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2) = \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right).$$

90 1. $I = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$ et $J = \frac{-1}{2}(e^{-2} - 1)$.

2. Par linéarité $K = I + 5J = 2 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{2}e^{-2}$.

91 1. $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b)$

d'où $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x) dx$.

2. $\int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} + 2 = 2,5$.

92 1. $I = \frac{1}{2} \ln(1 + e^2) - \frac{1}{2} \ln 2$ et $I + J = 1$.

2. $J = 1 - \frac{1}{2} \ln(1 + e^2) + \frac{1}{2} \ln 2$.

93 1. La fonction F définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2 \sin x)$

est une primitive de la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} \text{ car } 1 + 2 \sin x > 0 \text{ sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Donc } I = \frac{1}{2} \ln 3.$$

2. $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$.

3. $J = 1 - \frac{1}{2} \ln 3$.

94 1. a. Pour tout x de $[0; 1]$, $x^2 \leq x$ donc $e^{-x^2} \geq e^{-x}$.

b. $0 \leq x e^{-x} \leq x e^{-x^2}$.

2. $0 \leq \int_0^1 x e^{-x} dx \leq \int_0^1 x e^{-x^2} dx$; or $\int_0^1 x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$
donc $0 \leq \int_0^1 x e^{-x} dx \leq \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

95 1. Pour tout x de $[1; 2]$, $0 \leq \ln x \leq \ln 2$.

2. $0 \leq \int_1^2 x^2 \ln x dx \leq \frac{7}{3} \ln 2$.

96 1. Pour tout x de \mathbb{R} , $1 \leq \sqrt{1 + \cos^2 x} \leq \sqrt{2}$.

2. $\pi \leq \int_0^\pi u(x) dx \leq \sqrt{2}\pi$.

97 1. L'énoncé est vrai puisque $\int_a^b 0 dx = 0$.

2. L'énoncé de la réciproque est « Si f est telle que $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors la fonction f est nulle sur $[a; b]$ ».

Cet énoncé est faux, la fonction f telle que $f(x) = x$ sur $[-1; 1]$ est un contre-exemple.

98 1. Pour tout réel t supérieur ou égal à 1, $t^2 \leq t^2 + 1 \leq 2t^2$
d'où l'encadrement proposé puisque la fonction racine carré est croissante sur $[0; +\infty[$ et que $\sqrt{t^2} = t$ pour t réel positif.

2. Lorsque x est strictement positif, x est inférieur à $2x$ et
 $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{2}t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$ d'où l'encadrement proposé.

100 Voir livre page 425.

101 1. La fonction f_n est continue sur \mathbb{R} donc la suite (I_n) est définie.

2. Pour tout t de $[0; 1]$, $t^n \geq t^{n+1}$ donc $I_n \geq I_{n+1}$, donc la suite (I_n) est décroissante.

3. Pour tout t de $[0; 1]$: $1 \leq 1 + t + t^2 \leq 3$, d'où l'encadrement demandé.

4. La suite (I_n) converge vers 0.

102 1. a. $f'(x) = -x e^{-x}$ donc f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.

b. Le maximum de f sur \mathbb{R} est égal à 0 donc f est négative sur \mathbb{R} .

2. a. $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ donc $g'(x) < 0$ donc g est décroissante sur $]0; +\infty[$.

b. g est positive sur $]0; +\infty[$ car $e^{-x} < 1$ pour tout réel x strictement positif.

3. a. Pour tout x de $[n; n+1]$, $g(n) \geq g(x) \geq g(n+1)$.

b. $g(n) \geq J_n \geq g(n+1)$.

c. Pour tout entier naturel n , $g(n) \geq J_n \geq g(n+1) \geq J_{n+1}$ donc la suite (J_n) est décroissante.

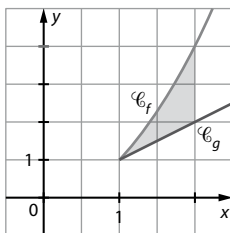
d. g tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (J_n) converge vers 0.

103 VRAI car f est positive sur $[-1; 1]$.

104 FAUX.

105 VRAI.

106 1.



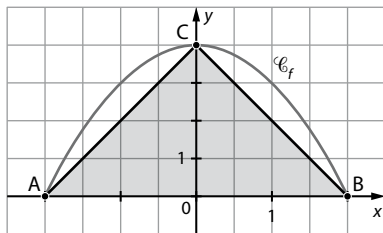
2. a. f est supérieur à g sur $[1; 2]$ donc $\mathcal{A} = \int_1^2 (x^2 - x) dx = \frac{5}{6}$.

b. L'unité d'aire est égale à 3 cm^2 , donc l'aire est égale à $2,5 \text{ cm}^2$.

107 1. Si $x > 1$, alors $x^2 > 1 > \frac{1}{x}$.

2. $\mathcal{A} = \frac{e^3 - 4}{3}$

108 1.



2. $\mathcal{A}_1 = 8$.

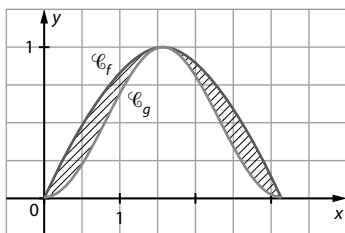
3. $\mathcal{A} = \frac{32}{3}$.

4. $\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} = \frac{4}{3}$.

109 1. a. Les fonctions f et g sont croissantes sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissantes sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

b. g est inférieure à f sur $[0; \pi]$.

c.



2. $\int_0^\pi \left(\sin x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx = 2 - \frac{\pi}{2}$ donc l'aire en cm^2 est égale à $4 - \pi \text{ cm}^2$.

110 Voir livre page 425.

111 VRAI.

112 FAUX.

113 1. $V = \frac{1}{9} (e^{12} - e^3)$.

2. La population augmente en moyenne chaque année de 18 082 personnes.

114 1. $F'(x) = -e^{2-x} + (-x-1) \times (-1)e^{2-x} = f(x)$.

2. $V = \frac{1}{4} (e^2 - 5e^{-2})$.

115 $V = b + a + 3 = \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

116 1. $D = \int_0^{20} v(t) dt = \frac{17\,800}{3}$.

2. a. Val moy = $\frac{1}{20} \int_0^{20} v(t) dt = \frac{890}{3} \approx 297$.

b. La vitesse moyenne du mobile entre les instants $t=0$ et $t=20$ est environ égale à $297 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

117 Voir livre page 425.

118 1. On obtient l'encadrement en intégrant membre à membre l'encadrement de $f(x)$ pour x entre a et b .

2. Pour tout x de $[0; 3]$, $\frac{1}{10} \leq f(x) \leq 1$ donc $\frac{1}{10} \leq V \leq 1$.

3. $1 \leq V \leq \sqrt{10}$.

119 FAUX : elle est égale à $\frac{4}{3}$.

120 FAUX : elle est égale à $\frac{2\ln 2}{3}$.

121 FAUX : elle est égale à $e - 1$.

122 $I = 1,5 + 3 \ln 2$, $J = 0,5$ et $K = \frac{1}{4} (e^4 - 1)$.

123 1. $F'(x) = \ln x + 1$.

2. $I = 2 \ln 2$.

124 $V = \frac{13}{3}$.

125 1. $\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+x^2}{x(x^2+1)} = f(x)$.

2. $I = 1 + \frac{1}{2} \ln(e^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln 2$.

126 1. La courbe représentative de f est au-dessus de la courbe représentative de g sur $]-\infty; 0]$ et en dessous sur $[0; +\infty[$.

2. $\mathcal{A} = \frac{1}{2} e^2 - e + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (e - 1)^2 \approx 1,48$.

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 425 et le site www.bordas-index.fr pour les corrigés détaillés.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

137 $J = 264$; $K = 304,5$; $L = 2(e^3 - 1)$; $M = 4(\ln 5 - \ln 2)$.

138 $\mathcal{A} = \frac{4}{3}$.

139 Correctif : il faut déterminer l'aire entre les deux courbes et les droites d'équation $x = 0$ (et non pas $x = -1$) et $x = 1$; sinon on trouve $\mathcal{A} = 1 - e - e^{-1} + \frac{1}{2}(e^{-2} + e^2)$ qui est un résultat trop compliqué pour une page d'accompagnement personnalisé.
On obtient $\mathcal{A} = \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}$.

► Calculs de volumes

► $S(z) = \pi r^2$ et $z^2 + r^2 = R^2$ donc $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$.

► $V = \int_0^R \pi r^2 dz = \int_0^R \pi(R^2 - z^2) dz = \frac{2}{3}\pi R^3$.

► On retrouve la formule du volume d'une sphère de rayon R : $\frac{4}{3}\pi R^3$.

140 1. La section est un cercle de rayon R ; son aire est égale à πR^2 .

2. $V = \pi R^2 h$.

141 1. $r = R\left(1 - \frac{z}{h}\right)$.

2. Aire $= \pi r^2 = \pi R^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 = \pi R^2 \left(1 - \frac{2}{h}z + \frac{1}{h^2}z^2\right)$.

3. $V = \int_0^h \pi R^2 \left(1 - \frac{2}{h}z + \frac{1}{h^2}z^2\right) dz = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

142 1. a. Aire $= \pi(f(x))^2$.

b. $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$.

2. $V = \frac{\pi^2}{2}$.

3. $V = \frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})$.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Étude d'une suite d'intégrales

Dans ce TP, les élèves vont démontrer à l'aide d'intégrales que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ converge vers e .

Ce TP pourra être fait en deux parties : l'une en classe et l'autre en travail de rédaction à la maison.

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 06_TS_TP1.ggb (GeoGebra), 06_TS_TP1.xlsx (Excel 2007), 06_TS_TP1.xls (Excel 2003) et 06_TS_TP1.ods (OpenOffice).

A. Premiers calculs et conjectures

On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers e .

B. Construction et conjectures

1. a. Construire un curseur k puis saisir l'expression de la fonction f_k dans le champ de saisie.

b. On peut conjecturer que la courbe représentative de la fonction f_{k+1} est en dessous de la courbe représentative de la fonction f_k .

2. Correctif : on affiche une valeur approchée des cinq premiers termes de la suite.

La suite (l_k) semble décroissante et converger vers 0.

3. a_k semble être égal à $\frac{1}{k!}$.

C. Propriétés des fonctions f_k

1. f_0 est décroissante sur $[0; 1]$ et f_1 est croissante sur $[0; 1]$.

2. $f_k(0) = 0$ et $f_k(1) = \frac{1}{k!}$ pour tout k non nul.

3. $f_k(x) - f_{k-1}(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{x}{k} - 1\right) e^{1-x}$. Puisque x est inférieur à k , on obtient l'inégalité donnée.

4. $f_k'(x) = \frac{kx^{k-1}}{k!} e^{1-x} - \frac{x^k}{k!} e^{1-x} = f_{k-1}(x) - f_k(x)$.

5. $f_k'(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{1-x} \left(1 - \frac{x}{k}\right)$ donc les fonctions f_k sont croissantes sur $[0; 1]$ pour tout k non nul.

D. Étude de la suite (l_k)

1. $l_0 = e - 1$.

2. D'après la question C. 3. et en intégrant membre à membre l'égalité pour x entre 0 et 1, on prouve que la suite (l_k) est décroissante.

3. a. Les fonctions f_k sont positives sur $[0; 1]$ donc $l_k \geq 0$; de plus pour tout x de $[0; 1]$ et tout entier k non nul $f_k(x) \leq \frac{1}{k!} f_0(x)$ et on obtient alors l'inégalité donnée.

b. La suite (l_k) converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

E. Détermination de la limite de la suite (u_n)

1. $\int_0^1 f_k'(x) dx = f_k(1) - f_k(0) = f_k(1)$ et

$\int_0^1 (f_{k-1}(x) - f_k(x)) dx = l_{k-1} - l_k$; on obtient alors l'égalité donnée.

2. D'après la question 1. $l_{n+1} = l_n - \frac{1}{(n+1)!}$ et on démontre alors par récurrence que $u_n = e - l_n$ pour tout entier naturel n .

3. La suite (u_n) converge vers e .

4. Dès u_{12} , on trouve la même valeur approchée que celle de la calculatrice : 2,718281828.

TP 2 Valeurs approchées d'une intégrale

L'objectif de ce TP est de présenter deux nouvelles méthodes pour déterminer une valeur approchée d'une intégrale. On pourra comparer ces méthodes à l'aide du logiciel GeoGebra car il permet de construire les trapèzes mais aussi de calculer une valeur approchée de sommes.

Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 06_TS_TP2.ggb (GeoGebra).

A. Méthode des trapèzes

1. L'intégrale de f entre 0 et 1 est égale à l'aire, en unités d'aire, de la surface comprise entre la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2. Aire(OAIH) = 1,8 et Aire(HIBK) = 1,3 donc une valeur approchée de l'intégrale de f entre 0 et 1 est égale à 3,1.

3. a. b. Après avoir construit un curseur n , il faut entrer

SommeTrapèzes[f,0,1,n] dans le champ de saisie pour faire afficher les trapèzes et la somme des aires de ces trapèzes.

c. À partir de $n = 4$ trapèzes, l'aire de la somme des trapèzes est environ égale à 3,13. Il faut attendre $n = 9$ pour que la valeur approchée affichée soit environ égale à 3,14.

d. **Correctif** : Il faut déterminer le nombre **minimal** de rectangles inférieurs.

Il faut entrer **SommeInférieure[f,0,1,n]** dans le champ de saisie pour faire afficher les rectangles inférieurs et la somme des aires de ces rectangles inférieurs. À partir de $n = 83$ rectangles, l'aire de la somme des rectangles est environ égale à 3,13. Il faut attendre $n = 478$ pour que la valeur approchée affichée soit égale à 3,14.

4. a. Le trapèze construit sur la base $[x_k; x_{k+1}]$ a pour hauteur $\frac{1}{n}$, sa petite base a pour longueur $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ et sa grande base a pour longueur $f\left(\frac{k}{n}\right)$ d'où la formule donnée en sommant l'aire des n trapèzes.

b. Dans la somme précédente, seuls les termes $f(0)$ et $f(n)$ se retrouvent une seule fois d'où la deuxième formule donnée.

c. Pour calculer $\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, il faut entrer

Somme[Séquence(f(k/n),1,n-1)] dans le champ de saisie ; dans le fichier GeoGebra on a renommé ce nombre en l'appelant **interm** (pour intermédiaire).

De même, il faut entrer **(f(0)+f(1))/2** dans le champ de saisie (on l'a renommé **semi** pour demi-somme dans le fichier), puis il reste à entrer **(semi+interm)/n** dans le champ de saisie pour faire afficher T .

On obtient : $T \approx 3,142$ pour $n = 100$.

B. Méthode de Simpson

1. En utilisant l'affichage donné par le logiciel de calcul formel, on obtient la formule :

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right).$$

2. a. $\int_0^1 f(x) dx \approx \int_0^1 g(x) dx$ et

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{6} \left(g(0) + 4g\left(\frac{1}{2}\right) + g(1) \right) = \frac{4 + 12,8 + 2}{6}$$

donc $\int_0^1 f(x) dx \approx 3,13$.

b. On remarque qu'il fallait au moins 83 rectangles pour obtenir cette valeur approchée, qu'on obtient ici avec un simple partage de l'intervalle $[0; 1]$ en deux intervalles.

3. a. Sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ l'aire sous la courbe \mathcal{C}_f peut être approchée par l'aire sous la parabole passant par les trois points donnés dans l'énoncé. Or cette aire est égale à :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{6} \left(g(x_k) + 4g\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + g(x_{k+1}) \right)$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) dx = \frac{1}{6n} \left(f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right).$$

On obtient alors la formule donnée en utilisant la relation de Chasles et les n égalités précédentes.

b. On entre dans le champ de saisie :

$$\text{Somme[Séquence[f(k/n)+4f(k/(2n)+(k+1)/(2n))+f((k+1)/n),k,0,n-1]]/(6n)}.$$

On place le curseur sur 10 afin d'obtenir une valeur approchée de S pour $n = 10$.

On obtient : $S \approx 3,142$ alors que $T \approx 3,14$ et $R \approx 3,04$.

On pourra expliquer aux élèves que des techniques mathématiques qu'ils apprendront plus tard permettent de démontrer que cette intégrale est exactement égale à π .

CAP VERS LE BAC

Sujet A

Partie A

Voir cours page 172.

Partie B

1. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$.

b. f_1 est croissante sur $[0; +\infty[$.

c. $f_1(0) = 0$ donc f_1 est positive.

2. a. On vérifie que $F'(x) = f_1(x)$.

b. $I_1 = 2 \ln 2 - 1$.

3. a. Sur $[0; 1]$, $0 \leq x^n \leq 1$ donc $0 \leq \ln(1 + x^n) \leq \ln 2$.

En intégrant membre à membre entre 0 et 1, on obtient :

$$0 \leq I_n \leq \ln 2.$$

b. La suite (I_n) est décroissante.

c. De plus, la suite (I_n) est minorée par 0 donc elle est convergente.

4. a. $g'(x) = \frac{-x}{1+x} \leq 0$ donc g est décroissante sur $[0; +\infty[$.

b. $g(0) = 0$ donc g est négative sur $[0; +\infty[$.

c. Pour tout x positif, $\ln(1 + x) \leq x$ d'après la question précédente donc $\ln(1 + x^n) \leq x^n$ pour tout x positif.

d. $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ donc la suite (I_n) converge vers 0.

Sujet B

1. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}xe^x\right) = 0$ avec $X = -\frac{x}{2}$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .

b. $f'(x) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2}x\right) e^{-\frac{x}{2}}$; f est croissante sur $[0; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$.

2. a. f est positive donc F est croissante sur \mathbb{R} .

b. Par définition F est la primitive de f qui s'annule en 0 ; or $G'(x) = f(x)$ et $G(0) = 0$ donc $G = F$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$.

d. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $F(x) = 0,5$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$. Par la méthode du balayage, la valeur approchée par excès à 10^{-2} près de α est 3,35.

3. Puisque f est positive sur $[0; +\infty[$:

$$\mathcal{A}_n = \int_0^n f(x) dx = G(n) - G(0) = 1 - e^{-\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} e^{-\frac{n}{2}}.$$

Algorithme :

```
n prend la valeur 0
A prend la valeur 0
Tant que A < 0,99
  n prend la valeur n + 1
  A prend la valeur 1 - e^{-n/2} - \frac{n}{2} e^{-n/2}
Fin Tant que
Afficher n
```

Sujet C

1. VRAI.
2. FAUX : l'intégrale donnée est égale à $-\ln(\ln 2)$.
3. VRAI car $F'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} > 0$.

Sujet D

1. a. $F_1(x) = 4 \ln(e^x + 7)$.
- b. La valeur moyenne m est égale à $\frac{4}{\ln 7}(\ln 14 - \ln 8)$.
2. $f_n(0) = 0,5$ pour tout n , donc le point A appartient à toutes les courbes.
3. a. L'abscisse de l'unique point d'intersection de la courbe \mathcal{C}_n et de la droite d'équation $y = 2$ est $x = \frac{\ln 7}{n}$.
- b. Cette intégrale représente l'aire, en unités d'aire, de la surface située entre la courbe \mathcal{C}_n , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\ln 7}{n}$.
4. $u_n = \frac{4}{\ln 7}(\ln 14 - \ln 8) = m$.

Sujet E

1. a. $f'(x) = \frac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2}$.
- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- c. $f'(x) < 0$ car $x + 3 > e$ pour tout x positif ; f est donc décroissante sur $[0; +\infty[$.
2. a. Puisque f est décroissante, pour tout x de $[n; n+1]$:
$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n).$$
- b. En intégrant membre à membre les inégalités précédentes pour x entre n et $n+1$, on trouve :
$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$
- c. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
3. a. $F'(x) = 2f(x)$.
- b. $I_n = \frac{1}{2}[(\ln(n+3))^2 - (\ln 3)^2]$.
4. a. D'après la relation de Chasles : $S_n = I_n$.
- b. La suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

143 $m = \frac{28}{3}$.

144 Sur $[1; e]$, $\ln x$ est inférieur à 1 donc $(\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n$; en intégrant on trouve $I_{n+1} \leq I_n$.

145 f est positive sur $[0; 1]$, donc l'aire, en unités d'aire de la surface considérée est égale à $\int_0^1 \frac{4x}{x^2 + 1} dx = 2 \ln 2$.

146 $F'(x) = 3x^2 \ln x$ et $\int_1^e f(x) dx = \frac{2}{3}e^3 + \frac{1}{3}$.

147 1. $I = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{2}\right)$ et $I + J = \int_1^2 x dx = \frac{3}{2}$.

2. $J = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

POUR ALLER PLUS LOIN

148 1. $f'(x) = -e^{-x}$: $f'(0) = -1$ et $f(0) = 1$, d'où une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est $y = -x + 1$; cette tangente est la droite Δ .

2. a. $h(x) = e^{-x} + x - 1$ donc $h'(x) = -e^{-x} + 1$.

b. h est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

3. h est positive sur \mathbb{R} donc la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de Δ .

4. a. $\int_0^1 h(x) dx = \frac{1}{2} - e^{-1}$.

b. $A = \int_0^a f(x) dx - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-a}$.

149 Partie A

1. $\frac{1}{t} + t - 2 = \frac{t^2 - 2t + 1}{t} \geq 0$ sur $[1; +\infty[$.

2. $\int_1^x (2-t) dt = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$.

3. $\int_1^x (2-t) dt \leq \int_1^x \frac{1}{t} dt$ d'où $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leq \ln x$.

Partie B

1. $\int_1^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}\right) dx = 0$.

2. On a l'égalité de deux aires.

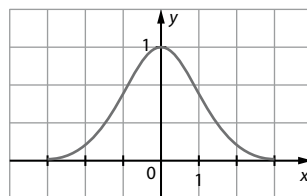
3. a. $f'(x) = \ln x$.

b. $\mathcal{A} = 8 \ln 2 - 3$.

150 1. a. f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.

b. Le maximum de f est 1.

c.



2. a. $F(x)$ est une aire.

b. F est croissante sur \mathbb{R} .

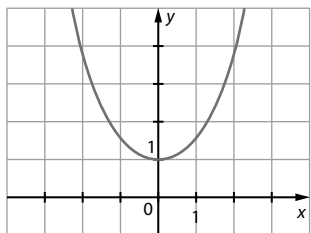
c. Dans l'éditeur de fonctions on saisit l'expression **intégrFonct(e^{-(x^2/2)}, x, 0, x)** et on obtient la table de valeurs :

X	Y1
0	0
0.5	0.499
1	0.865
1.5	1.084
2	1.192
2.5	1.225
3	1.237
3.5	1.239
4	1.240
4.5	1.241
5	1.242
5.5	1.242
6	1.242
6.5	1.242
7	1.242
7.5	1.242
8	1.242
8.5	1.242
9	1.242
9.5	1.242
10	1.242

d. Les valeurs approchées précédentes sont proches de $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

151 1. a. f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

b.



2. $S(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$.

3. En factorisant ou en développant, on obtient l'égalité donnée.

4. $L = \int_0^2 \sqrt{f(x)}^2 dx = S(2) = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$.

152 1. $\int_n^{n+1} \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{n+1} - \frac{-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} = u_n$.

2. a. $S_n = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2} dx$ d'après la relation de Chasles.

b. $S_n = \frac{-1}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1}$.

c. S_n converge vers 1.

153 Partie A

$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

Partie B

1. a. La fonction uv est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

b. $uv' = (uv)' - u'v$ (1).

2. a. Les fonctions données sont continues sur I comme somme ou produit de fonctions continues sur \mathbb{R} .

b. En intégrant les deux membres de l'égalité (1), on obtient l'égalité donnée.

3. a. $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

b. L'intégrale $\int_0^1 e^x dx$ apparaît.

c. $\int_0^1 x e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = 1$.

Partie C

1. $I = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$, $J = -2$ et $K = 1$.

2. $L = e - 2$, $M = \pi^2 - 4$ et $N = \frac{(-1) - e^\pi}{2}$.

154 1. $\mathcal{A}_0 = \ln 2 = \mathcal{A}_1$.

2. a. C'est l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0,5$ et $x = 1$.

b. Cette intégrale est égale à $\ln 2$.

3. a. Les trois intégrales valent $\ln 2$.

b. On peut faire la conjecture que, pour tout entier n , $I_n = \ln 2$.

c. $I_n = \ln(2^{n+1}) - \ln(2^n) = \ln 2$.

155 1. $u_1 = \ln 2$.

2. a. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1}$.

b. $u_{n+2} - u_n = -\frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1}$.

c. $u_3 - u_1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = -\frac{3}{8}$ d'où $u_3 = u_1 - \frac{3}{8} = \ln 2 - \frac{3}{8}$.

3. a. $\frac{\sin^{n+1} x}{\cos x} - \frac{\sin^n x}{\cos x} = \frac{\sin^n x}{\cos x} (\sin x - 1) < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

b. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

4. a. Pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, $0 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; or $\frac{\sqrt{3}}{2} \in]0; 1[$ donc $K = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. On obtient l'encadrement donné en utilisant les propriétés de l'intégrale, le réel K et le fait que sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$.

c. La suite (u_n) converge vers 0.

156 1. Graphiquement $I = J = 0$, ce qui se vérifie par le calcul des deux intégrales.

2. a. $G(x) = F(x) - F(-x)$.

b. $G'(x) = f(x) + f(-x) = 0$.

c. G est une fonction constante et $G(0) = 0$ donc $G(x) = 0$ pour tout réel x .

157 1. a. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

b. $I = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = 1$.

2. a. $g'(x) = \frac{\cos^4 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

b. En intégrant cette égalité entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, on obtient :

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) - g(0) = 3J - 2I$ d'où $2 = 3J - 2I$.

c. $J = \frac{4}{3}$.

158 1. $h(t)$ est égal au polynôme :

$t^2 \int_a^b (g(x))^2 dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b (f(x))^2 dx$.

De plus, $h(t)$ est positif pour tout réel t .

2. En écrivant que le discriminant du polynôme précédent est négatif ou nul, on obtient l'inégalité proposée.

159 1. $u_2 = -\frac{1}{2} \ln 2$ et $u_3 = -\frac{2}{3} \ln 3 + \frac{1}{3} \ln 2$.

2. a. Pour x compris entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$, on a $\ln x$ compris entre $\ln\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$. On obtient alors l'encadrement donné en intégrant membre à membre entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$.

b. *Correctif : Il faut sommer membre à membre les $n-1$ encadrements (et non pas n).*

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$ donc

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x dx \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ donc

$u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x dx \leq u_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. a. $F'(x) = \ln x$.

b. $-1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}$.

4. La suite (u_n) converge vers -1 .

160 1. Soit g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}.$$

g est dérivable et $g'(t) = \frac{t}{(1+t)^2}$. Donc g est croissante sur $[0; +\infty[$ et puisque $g(0) = 0$, on en déduit que g est positive sur $[0; +\infty[$. Donc on obtient l'inégalité donnée pour tout $t > 0$.

2. a. $f'(x) = -e^{-x} \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} = -e^{-x} g(e^x).$

b. f est décroissante sur \mathbb{R} .

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = 0.$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$

La courbe \mathcal{C}_f admet deux asymptotes d'équation $y = 0$ et $y = 1$.

3. a. $f'(x) = -f(x) + \frac{1}{1+e^x}$ donc $f(x) = \frac{1}{1+e^x} - f'(x)$, d'où l'égalité demandée.

b. $F(x) = x - f(x) - \ln(1+e^x).$

4. $I = F(1) - F(0) = 1 + 2 \ln 2 - (1 + e^{-1}) \ln(1+e).$

Prises d'initiatives

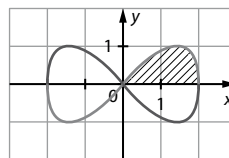
161 En dérivant les deux membres, on obtient $f(x) = \frac{2}{x}$.

En remplaçant x par a dans l'égalité donnée, on obtient $2 \ln a = 0$ donc $a = 1$.

162 L'élève ayant appris dans l'exercice **153** à intégrer par parties, il pourra trouver $I_n = \frac{(1-\pi)}{n} \cos(n\pi) - \frac{1}{n}$.

Or $\frac{1-\pi}{n} \leq \frac{(1-\pi)}{n} \cos(n\pi) \leq \frac{\pi-1}{n}$, donc la suite (I_n) converge vers 0.

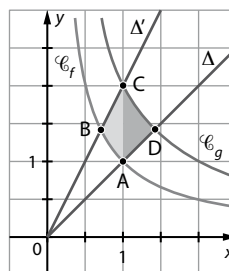
163 La surface cherchée est comprise entre les deux courbes dessinées ci-après ; son aire est égale par symétrie à 4 fois celle hachurée.



$$\text{Aire} = 4 \times \int_0^2 \frac{1}{2} x \times \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^2 2x \times \sqrt{4-x^2} dx$$

$$\text{donc Aire} = \left[-\frac{2}{3} (4-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

164 On découpe le quadrilatère curviligne en deux triangles curvilignes ABC et ACD avec $A(1; 1)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$, $C(1; 2)$ et $D(\sqrt{2}; \sqrt{2})$.



$$\text{Aire (ABC)} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left(2x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$\text{Aire (ACD)} = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{x} - x \right) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}, \text{ donc l'aire du quadrilatère curviligne est égale à } \frac{1}{2} \ln 2.$$

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Forme algébrique, conjugué. Somme, produit, quotient. Équation du second degré à coefficients réels. Représentation géométrique. Affixe d'un point, d'un vecteur. Forme trigonométrique : – module et argument, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct ; – notation exponentielle.	<ul style="list-style-type: none"> • Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes. • Résoudre dans \mathbb{C} une équation du second degré à coefficients réels. • Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur. • Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur. • Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. • Connaître et utiliser la relation $z \bar{z} = z ^2$. • Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes. 	<p>On introduit dans ce chapitre des éléments lui donnant une dimension historique.</p> <p>Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.</p> <p>La notation exponentielle est introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$ vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle.</p> <p>Les nombres complexes permettent de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en Première.</p> <p>⇒ [SI] Analyse fréquentielle d'un système.</p>

B Notre point de vue

Conformément à l'esprit du programme, les nombres complexes sont vus comme constituant un nouvel ensemble de nombres (activité 1) avec ses opérations propres. Le point de vue historique est abordé dans les activités 1 et 3 ainsi que dans l'approfondissement de la partie Accompagnement personnalisé. L'activité 4 permet d'introduire une autre façon de repérer un point et d'aborder ainsi les notions de module et d'argument. Une partie de ce chapitre aborde également l'exploitation géométrique des nombres complexes.

Les notions abordées dans le chapitre 7

1. Forme algébrique d'un nombre complexe
2. Conjugué et équations du second degré
3. Affixe, module et argument
4. Forme trigonométrique et propriétés sur module et argument
5. Notation exponentielle et applications

C Avant de commencer

Voir livre page 425 et le site www.bordas-index.fr pour les corrections détaillées.

D Activités

Activité 1 Extensions des ensembles de nombres

L'objectif de cette activité est, à travers la résolution d'équations successives, d'introduire un nouvel ensemble tout en rappelant les ensembles déjà connus par les élèves.

1. a. Pas de solution dans \mathbb{N} ; dans \mathbb{Z} : $S = \{-5\}$.

b. Dans \mathbb{N} : $S = \{3\}$; dans \mathbb{Z} : $S = \{3, -3\}$.

2. a. Pas de solution dans \mathbb{Z} ; dans \mathbb{Q} : $S = \{\frac{1}{2}\}$.

b. Dans \mathbb{Z} : $S = \emptyset$; dans \mathbb{Q} : $S = \{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\}$.

3. a. Pas de solution dans \mathbb{Q} ; dans \mathbb{R} : $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

b. $\Delta = (1 + 3\sqrt{3})^2 - 4 \times 3\sqrt{3} = 1 - 6\sqrt{3} + 27 = (1 - 3\sqrt{3})^2$.

$x_1 = \sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{1}{3}$.

Dans \mathbb{Q} : $S = \{\frac{1}{3}\}$; dans \mathbb{R} : $S = \{\frac{1}{3}, \sqrt{3}\}$.

4. a. Pas de solution dans \mathbb{R} .

b. $x^4 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0$.

Dans \mathbb{R} , $x^4 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$ donc $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

c. Correctif : il se peut que dans certains manuels il soit indiqué l'équation $x^2 - 4 = 0$, il faut lire $x^4 - 4 = 0$.

$x^2 = -1$: $S = \{-i, i\}$.

$x^2 = -2$: $S = \{-2i, 2i\}$.

$x^4 - 4 = 0$: $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -i\sqrt{2}, i\sqrt{2}\}$.

$(x - 2)^2 = -1$: $S = \{2 - i, 2 + i\}$.

Activité 2 Inverse d'un nombre complexe non nul

Dans cette activité très courte, l'élève aura la possibilité de découvrir par lui-même la méthode pour écrire sous forme algébrique l'inverse d'un nombre complexe non nul.

1. a. $(3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$: le nombre obtenu est un réel.

b. $z = \frac{1}{3 - 2i} = \frac{3 + 2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$.

2. a. $(-4 + 5i)(-4 - 5i) = 16 + 25 = 41$.

b. $z = \frac{1}{-4 + 5i} = \frac{-4 - 5i}{41} = -\frac{4}{41} - \frac{5}{41}i$.

3. a. $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

b. $\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Activité 3 Un problème de Cardan

Cette activité, outre son aspect historique, permet de résoudre dans \mathbb{C} certaines équations du second degré et de découvrir la notion de conjugué.

1. a. Soit u et v deux nombres qui ont pour somme 2 et pour

produit 5. Alors : $\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 - u \\ u(2 - u) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 - u \\ u^2 - 2u + 5 = 0 \end{cases}$$

b. $(z^2 - 1) + 4 = z^2 - 2z + 1 + 4 = z^2 - 2z + 5$.

c. $z^2 - 2z + 5 = (z - 1)^2 + 4 = (z - 1)^2 - (2i)^2$
 $= (z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)$.

$z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 1 + 2i$ ou $z = 1 - 2i$.

On remarque que les solutions sont complexes conjuguées.

2. a. Soit u et v deux nombres qui ont pour somme 8 et pour

produit 41. Alors : $\begin{cases} u + v = 8 \\ uv = 41 \end{cases}$

$$\begin{cases} u + v = 8 \\ uv = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 8 - u \\ u(8 - u) = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 8 - u \\ u^2 - 8u + 41 = 0 \end{cases}$$

b. $z^2 - 8z + 41 = (z - 4)^2 + 25$.

c. $z^2 - 8z + 41 = (z - 4 + 5i)(z - 4 - 5i)$.

d. $S = \{4 - 5i, 4 + 5i\}$.

3. a. Soit u et v deux nombres qui ont pour somme 4 et pour

produit 5. Alors : $\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 5 \end{cases}$

b. $z^2 - 4z + 5 = 0$.

c. $z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z - 2)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z - 2 - i)(z - 2 + i) = 0$.

$S = \{2 - i, 2 + i\}$.

d. $2 - i + 2 + i = 4$ et $(2 - i)(2 + i) = 4 - i^2 = 5$.

Activité 4 Vers un autre repérage

Dans cette activité, l'élève va découvrir qu'un point peut être repéré dans un repère orthonormé direct par la connaissance de sa distance par rapport à l'origine O et par une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{OA})$. Elle peut permettre d'introduire la notion de module et d'argument d'un complexe.

Fichier associé sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 07_TS_activite 4.ggb (GeoGebra).

1. a. $z_A = 1 + i$; $z_B = -1 + i$ et $z_C = -i$.

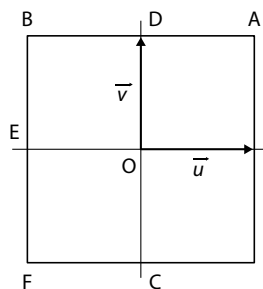
b. $A(1; 1)$, $B(-1; 1)$ et $C(0; -1)$.

c. $OA = \sqrt{2}$, $OB = \sqrt{2}$ et $OC = 1$.

d. $(\vec{u}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{4}$; $(\vec{u}; \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4}$ et $(\vec{u}; \vec{OC}) = -\frac{\pi}{2}$.

e. Un seul point P vérifiant les conditions : c'est le point A .

2. a.



b. $z_D = i$, $z_E = -1$ et $z_F = -1 - i$.

Activité 5 Vers la forme trigonométrique

Cette activité très courte permet d'introduire la notion de forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

1. a. $|z| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$.

b. $\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

2. $\arg z = \theta$.

POUR DÉMARRER

1 $\operatorname{Re}(-4) = -4$ et $\operatorname{Im}(-4) = 0$.

$\operatorname{Re}(3+2i) = 3$ et $\operatorname{Im}(3+2i) = 2$.

$\operatorname{Re}(-1+i) = -1$ et $\operatorname{Im}(-1+i) = 1$.

$\operatorname{Re}(7i) = 0$ et $\operatorname{Im}(7i) = 7$.

2 Les nombres complexes écrits sous forme algébrique sont 5 et $-3+4i$.

3 $z_1 = 7-2i$; $z_2 = 3+i$; $z_3 = -4-8i$.

4 $z_1 = -2+3i$; $z_2 = 10-4i$; $z_3 = 12-4i$.

5 Voir livre page 425.

6 $z_1 = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$; $z_2 = \frac{5}{50} + \frac{2}{25}i$; $z_3 = \frac{8}{25} + \frac{6}{25}i$.

7 $\bar{z}_1 = -5$; $\bar{z}_2 = -3i$; $\bar{z}_3 = 3-5i$;

$\bar{z}_4 = -2i-8$; $\bar{z}_5 = \frac{3+2i}{2}$.

8 $\bar{z}_1 = -i(9-2i)$; $\bar{z}_2 = 1-3i(1+i)$;

$\bar{z}_3 = (1+i)(-3-11i)$; $\bar{z}_4 = \frac{-5i}{4+i}$;

$\bar{z}_5 = \frac{1+i}{3-2i}$; $\bar{z}_6 = \frac{-2-3i}{5+i}$.

9 **1.** $z = -2-2i$.

2. $z = 1+i$.

3. $z = 1$.

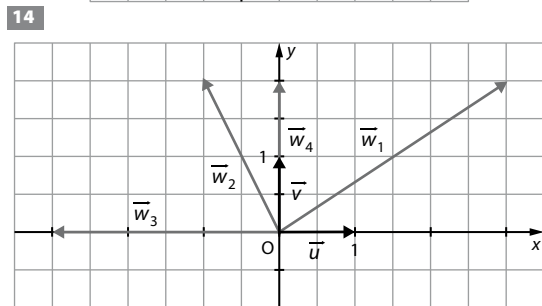
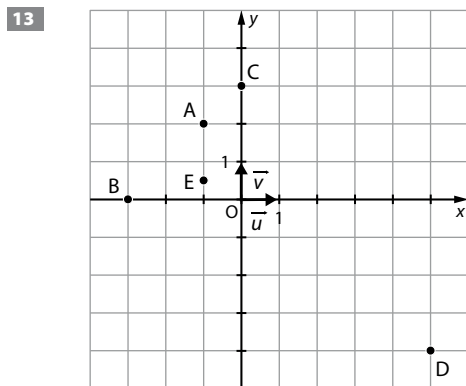
10 **1.** $z = 2-3i$ ou $z = \frac{1}{2}i$.

2. $z = 3$ ou $z = i$.

11 Voir livre page 425.

12 $z_A = z_{OA} = 2+i$; $z_B = 1+3i$; $z_C = -2i$; $z_D = -2+2i$; $z_E = 3$;

$z_{AB} = -1+2i$; $z_{CE} = 3+2i$; $z_{AE} = 1-i$.



15 Voir livre page 425.

16 $|z_A| = 2 = |z_E|$; $|z_B| = 2,5$; $|z_C| = 3 = |z_F|$; $|z_D| = 1 = |z_G|$.

17 $|z_1| = \sqrt{13}$; $|z_2| = 5\sqrt{2}$; $|z_3| = 3$; $|z_4| = 4$.

18 $z\bar{z} = |z|^2 = 9$.

19 $z\bar{z} = |z|^2 = 25$.

20 $OA = \sqrt{13}$; $OB = 5$.

21 $AB = |6-2i| = 2\sqrt{10}$; $AC = |3-4i| = 5$;

$BC = |-3-2i| = \sqrt{13}$.

22

A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N
$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	0	π	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$

23

A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N
0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$

24 **1.** $\frac{17\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 4\pi$: oui.

2. $-\frac{55\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -18\pi - \frac{2\pi}{3}$: non.

3. $\frac{155\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 26\pi$: oui.

25 Les formes trigonométriques sont celles de z_1 et z_4 .

26 Voir livre page 425.

27 **1.** $z = 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

2. $z = 3-3\sqrt{2}i$.

28 **1.** $|z_1| = 1$; $|z_2| = 2$; $|z_3| = \sqrt{2}$.

2. $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$; $\arg(z_2) = \pi$; $\arg(z_3) = \frac{\pi}{4}$.

3. $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

$z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

29 $|z_1 z_2| = 8$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{1}{2}$; $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 2$; $|z_1^5| = 32$;

$|z_2^2| = 16$; $|\bar{z}_1| = 2$; $|-z_2| = 4$.

30 Voir livre page 425.

31 $|z_1 z_2| = 3\sqrt{3}$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{3}$; $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$|z_1^5| = 243$; $|z_2^2| = 3$; $|\bar{z}_1| = 3$; $|-z_2| = \sqrt{3}$.

$\arg(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{4}$; $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{\pi}{4}$; $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\pi}{4}$;

$\arg(z_1^5) = -\frac{3\pi}{4}$; $\arg(z_2^2) = \pi$; $\arg(\bar{z}_1) = -\frac{\pi}{4}$

$\arg(-z_2) = -\frac{\pi}{2}$.

32 **a.** -1 .

b. $-i$.

c. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d. $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

33 a. $e^{\frac{i\pi}{3}}$.

b. $e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

c. $e^{\frac{i3\pi}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}}$.

34 a. $e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

b. $e^{\frac{i2\pi}{3}}$.

c. $e^{i\pi}$.

35 a. $|e^{\frac{i\pi}{3}}| = 1$ et $\arg(e^{\frac{i\pi}{3}}) = \frac{\pi}{3}$.

b. $|e^{-\frac{i2\pi}{5}}| = 1$ et $\arg(e^{-\frac{i2\pi}{5}}) = -\frac{2\pi}{5}$.

POUR S'ENTRAÎNER

36 $z_1 = -13 - 25i$; $z_2 = -11 + 3i$; $z_3 = 10 - 12i$; $z_4 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i$.

37 $z_1 = -5 + 12i$; $z_2 = 15 - 8i$; $z_3 = 34$; $z_4 = 2 - 2i\sqrt{3}$.

38 $z_1 = \frac{7}{2} - \frac{9}{2}i$; $z_2 = -40 + 20i$; $z_3 = 5 - 10i$;

$z_4 = \sqrt{5}(-2\sqrt{2} - 3) + 3 + i(3\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

39 $z_1 = -\frac{1}{3}i$; $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$; $z_4 = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$.

40 $z_1 = -1 - 3i$; $z_2 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$; $z_3 = \frac{11}{29} - \frac{13}{29}i$; $z_4 = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$.

41 $z_1 = -\frac{1}{17} + \frac{4}{17}i$; $z_2 = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$;

$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} + i(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{3})$; $z_4 = -\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}i$.

42 $z_1 = \frac{15}{17} - \frac{42}{17}i$; $z_2 = \frac{21\sqrt{3}}{50} + \frac{1}{50} + i(\frac{3\sqrt{3}}{50} - \frac{7}{50})$.

43 1. $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$.

2. $i^{4n} = 1$.

3. $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$.

44 $z_1^2 + z_2^2 = 1 - 12i$; $z_1^2 - z_2^2 = 9 - 12i$.

45 $\frac{1}{z_1} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$; $\frac{z_1}{z_2} = -1 - \frac{3}{2}i$; $\frac{2-z_1}{1-z_2} = -1$.

46 $Z = 2x + i(5 + 5x)$.

47 $iz = -y + ix$.

48 Voir livre page 425.

49 $Z = \frac{2x}{x^2 + y^2} - i\frac{2y}{x^2 + y^2}$.

50 $Z = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} - i\frac{y}{(x-1)^2 + y^2}$.

51 $Z = \frac{x^2 + y(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} + i\frac{x}{x^2 + (y-1)^2}$.

52 $Z = \frac{x^2 + 5x + y^2 - y + 6}{(x+2)^2 + (y-1)^2} + i\frac{x-y+3}{(x+2)^2 + (y-1)^2}$.

53 $Z = \frac{x^2 - x + (y-2)(y+1)}{x^2 + (y-2)^2} + i\frac{3x+y-2}{x^2 + (y-2)^2}$.

54 $\begin{cases} 3x = 3 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

55 $\begin{cases} 2x + 2y = y \\ -x - 3y = 2x + y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \end{cases}$

56 1. $z = (2x + 2) + i(-3x + 2)$.

2. a. z réel $\Leftrightarrow -3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

b. z imaginaire pur $\Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

57 1. a. $Z = \frac{(x-1) + i(y+1)}{(x-3) + i(y+2)}$.

b. $Z = \frac{x^2 - 4x + y^2 + 3y + 5}{(x-3)^2 + (y+2)^2} + i\frac{-x - 2y - 1}{(x-3)^2 + (y+2)^2}$.

2. Z réel $\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y - 1 = 0 \\ (x; y) \neq (3; -2) \end{cases}$. C'est une droite d'équation $x + 2y + 1 = 0$ privée du point de coordonnées $(3; -2)$.

58 1. $Z = \frac{x^2 - 2x + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2} + i\frac{x + 2y - 2}{x^2 + (y-1)^2}$.

2. a. Z réel $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases}$

C'est une droite d'équation $x + 2y - 2 = 0$ privée du point de coordonnées $(0; 1)$.

b. Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - y = 0 \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases}$

Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases}$

C'est un cercle de centre le point de coordonnées $(1; \frac{1}{2})$, de rayon $\sqrt{\frac{5}{4}}$ et privé du point de coordonnées $(0; 1)$.

59 1. $Z = \frac{x^2 + 2x + y^2 + 10y + 18}{(x-1)^2 + (y+3)^2} + i\frac{4(x-y-4)}{(x-1)^2 + (y+3)^2}$.

2. a. Droite d'équation $x - y - 4 = 0$ privée du point $(1; -3)$.

b. $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 8$: cercle de centre le point de coordonnées $(-1; -5)$, de rayon $2\sqrt{2}$, privé du point de coordonnées $(1; -3)$.

61 Soit a et b deux réels :

$a = ib \Leftrightarrow a - ib = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.

62 VRAI.

63 VRAI : l'inverse de $\frac{1+i}{3-i}$ est $\frac{3-i}{1+i}$ soit $1 - 2i$.

64 VRAI : $i^{2004} = (i^4)^{501} = 1$.

65 $z_1 = (2 - 4i)(-4 + 5i)$; $z_2 = (5 + 2i)^{10}$;

$z_3 = (1 + i)^5(1 - 6i)^9$; $z_4 = 1 + i(2 - 5i)^3$.

66 $z_1 = \frac{3-i}{1+i}$; $z_2 = \frac{-i(1-4i)^2}{2+i}$; $z_3 = \frac{1-2i}{3-2i} + \frac{1}{1-i}$.

68 a. $\bar{Z} = (1 - i\bar{z})(1 + 2\bar{z})$.

b. $\bar{Z} = \bar{z}^3 - 2i\bar{z}^2 + 1 + 3i$.

69 On remarque que $z_2 = \bar{z}_1$.

$z_1 + z_2 = z_1 + \bar{z}_1 = 2 \operatorname{Re}(z_1)$

et $z_1 - z_2 = z_1 - \bar{z}_1 = 2i \operatorname{Im}(z_1)$.

70 Voir livre page 425.

71 1. $Z + \bar{Z} = 2 \operatorname{Re}(Z)$.

$Z + \bar{Z} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z$ imaginaire pur.

2. Posons $z = x + iy$ avec x et y réels :

$Z + \bar{Z} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Donc $z = -1 + iy$.

72 1. $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

2. $z = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$.

3. $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ou $z = -1 + 2i$.

4. $z = -i$.

73 1. $z = \frac{2}{3}i$.

2. $z = 2 - i$.

3. $z = \frac{3}{17} - \frac{4}{17}i$.

74 $1. z = -\frac{1}{7}i$

2. $z = \frac{51}{106} + \frac{7}{106}i$

75 VRAI car $z \bar{z} = |z|^2$.

76 VRAI car z imaginaire pur équivaut à $\text{Re}(z) = 0$ qui équivaut à $z + \bar{z} = 0$ soit $z = -\bar{z}$.

77 VRAI car z réel équivaut à $\text{Im}(z) = 0$ qui équivaut à $z - \bar{z} = 0$ soit $z = \bar{z}$.

78 $1. z = \frac{12}{11}$

2. $z = 1 - 2i$

3. $z = -\frac{86}{73} - \frac{14}{73}i$

79 $1. z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ ou $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

2. $z = 1 + 2i$ ou $z = 1 - 2i$

3. $z = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

4. $z = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i$ ou $z = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i$

80 $1. z = 14$ ou $z = 4$

2. $z = -1$ ou $z = -9$

3. $z = 3$ ou $z = \frac{1}{3}$

81 Faire un changement de variable en posant $Z = z^2$.

1. $z = \sqrt{5}$ ou $z = -\sqrt{5}$ ou $z = 1$ ou $z = -1$

2. $z = -2i$ ou $z = 2i$ ou $z = -i$ ou $z = i$

3. $z = -2$ ou $z = 2$ ou $z = -i$ ou $z = i$

82

Saisir a, b, c .

delta prend la valeur $b^2 - 4ac$

Si $\text{delta} \geq 0$ alors

racine1 prend la valeur $\frac{-b - \sqrt{\text{delta}}}{2a}$

racine2 prend la valeur $\frac{-b + \sqrt{\text{delta}}}{2a}$

sinon

racine1 prend la valeur $\frac{-b - i\sqrt{\text{delta}}}{2a}$

racine2 prend la valeur $\frac{-b + i\sqrt{\text{delta}}}{2a}$

Fin si

Afficher racine1, racine2

84 1. On développe.

2. $z = 1$ ou $z = -1 - i\sqrt{3}$ ou $z = -1 + i\sqrt{3}$

85 1. On développe.

2. $z = i$ ou $z = -i$ ou $z = 4 - 3i$ ou $z = 4 + 3i$

86 Voir livre page 425.

87 FAUX : $z = 1 - i$ ou $z = 1 + i$

88 VRAI : le discriminant est négatif donc les solutions sont des nombres complexes conjugués et $3\sqrt{3} + 3i$ est bien une racine de l'équation.

89 FAUX : les racines sont $1 + i$ et $2 - i$.

90 $2. z_{AB} = -5 + 5i$; $z_{BC} = -1 - i$; $z_{AC} = -6 + 4i$

91

Saisir z_A, z_B

z prend la valeur $z_B - z_A$

Afficher « l'abscisse du vecteur AB est : »

Afficher z

92 2. a. $z_{AB} = 2 - 3i = z_{DC}$

b. ABCD est un parallélogramme.

3. CEBD parallélogramme équivaut à $z_{CE} = z_{DB}$, soit $z_E = 1 - 5i$.

4. $z_B = \frac{z_A + z_E}{2}$ donc B est le milieu de [AE].

93 1. $z_{AB} = 2 - 2i$; $z_{BC} = -3 - i$; $z_{CD} = -2 + 2i$; $z_{DA} = 3 + i$

2. $z_{AB} = -z_{CD}$, donc ABCD est un parallélogramme.

94 1. $z_{AB} = 3 + i$; $z_{AC} = -6 - 2i$

2. $z_{AC} = -2z_{AB}$

95 Voir livre page 425.

96 1. $z_N = z_{KL} + z_M = -1 + 7i$

2. a. $z_I = \frac{z_L + z_M}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$

b. $z_G = \frac{2}{3}z_{KI} + z_K = \frac{5}{3} + i$

97 ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow b - a = c - d$

98 FAUX : $z_{AB} = -3 + 8i$

99 VRAI : $z_{AC} = 1,5 - 4i$ donc $z_{AB} = -2z_{AC}$

100 a. $\sqrt{3}$

b. $\sqrt{3}$

c. $\sqrt{5}$

d. $\frac{5}{2}$

e. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

101

Saisir a et b

Module prend la valeur $\sqrt{a^2 + b^2}$

Afficher module

102 1. Cercle de centre O(0) et de rayon 3.

2. Cercle de centre le point $\Omega(i)$ et de rayon 5.

3. C'est la médiatrice du segment [AB] avec A(2i) et B(-2 + 3i).

103 1. Cercle de centre $\Omega(-1 + 2i)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

2. Cercle de centre le point $\Omega'(i)$ et de rayon 1.

3. C'est la médiatrice du segment [AB] avec A(1 - i) et B(-5 + 3i).

105 OA = 2 ; OB = $2\sqrt{2}$; AB = $|\sqrt{3} + i| = 2$.

OA = AB et OA² + AB² = OB².

106 Voir livre page 425.

107 AB = $|-1 + 2i| = \sqrt{5}$; AC = $|\sqrt{3} - \frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)| = \sqrt{5}$;

BC = $|\sqrt{3} + \frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)| = \sqrt{5}$.

108 JA = $|-3 - 2i| = \sqrt{13}$; JB = $|-2 + 3i| = \sqrt{13}$; JC = $|3 - 2i| = \sqrt{13}$.

109 1. OM₁ = 2 = OM₂ = OM₃.

2. $z_3 = z_2 - z_1$ donc OM₁M₂M₃ est un parallélogramme.

De plus OM₁ = OM₃, donc OM₁M₂M₃ est un losange.

110 1. $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$.

2. $\Delta = -(1 + \sqrt{3})^2$.

$z_A = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ ou $z_B = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$

3. $z_B = \bar{z}_A$ donc OB = OA soit $\frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{2}$.

AB = $|i(-1 - \sqrt{3})| = 1 + \sqrt{3}$.

OAB est un triangle isocèle en O (non équilatéral).

111 VRAI car $z_{AB} = 4 + 2i = z_{DC}$.

112 VRAI car CD = $2\sqrt{5} = DE$ et CE = $2\sqrt{10}$.

113 VRAI car CD = $2\sqrt{5} = DF$ et CF = $2\sqrt{10}$.

114 1. $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

2. $z = \frac{4}{3}(\cos \pi + i \sin \pi)$

3. $z = 5(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}))$

4. $z = 2(\cos 0 + i \sin 0)$.

115 1. $z = 5\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

2. $z = 6 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right)$.

3. $z = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$.

4. $z = 6 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

5. $z = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

6. $z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$.

116 Voir livre page 425.

117 $z = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 1 - i$.

118 $\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}; -2; -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}i; -1 - i$.

119 $-4i; -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}; -1 + i\sqrt{3}; \frac{\sqrt{2}}{5} - i\frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$.

120 FAUX car $\arg(-3i) = \frac{\pi}{2}$.

121 FAUX car $-5 < 0$.

122 FAUX à cause du signe « - » devant le sinus.

123 1. $|z_1 z_2| = \sqrt{2}; \arg(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{4}$.

2. $z_1 z_2 = -1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

124 $|z_1 z_2| = 2; \arg(z_1 z_2) = -\frac{\pi}{3}$.

126 1. $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$.

Donc $(1 + i)^5 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -4 - 4i$.

2. $(1 + i\sqrt{3})^7 = 128 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 64 + i64\sqrt{3}$.

3. $(2 - 2i\sqrt{3})^6 = 4096 (\cos 0 + i \sin 0) = 4096$.

127 1. $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

2. $\frac{1}{4}(\cos 0 + i \sin 0) = \frac{1}{4}$.

3. $\frac{1}{4} \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right) = -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$.

128 1. $Z = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$.

2. $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

129 1. $Z = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$.

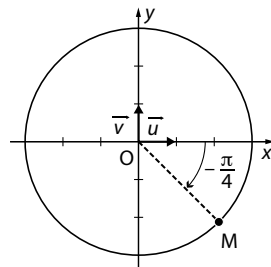
2. $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

130 1. $Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$.

2. $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

131 Voir livre page 425.

132



133 $OM' = 1 \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow |z - 1 + i| = |z - 2i|$: c'est la médiatrice de [AB].

134 VRAI car $\arg((1 + i)^4) = \pi$.

135 FAUX car $\arg(\sqrt{3} + i)^{2011} = -\frac{\pi}{6}$.

136 FAUX car $\arg(4(1 + i)) = \frac{\pi}{4}$.

137 FAUX car $|(3 + 3i)(2 - 2i)| = 12$.

138 $\arg(z^{1967}) = \frac{1967\pi}{7} = 281\pi = \pi + 140 \times 2\pi$, donc z^{1967} est un réel négatif.

139 $\arg(z^{210}) = \frac{210\pi}{3} = 70\pi = 0 + 35 \times 2\pi$, donc z^{210} est un réel positif.

140 $\sin^3 x = \frac{1}{4}(-\sin(3x) + \sin x)$.

141 a. $\cos^6 x = \frac{1}{32}(10 + 15 \cos(2x) + 6 \cos(4x) + \cos(6x))$.

b. $\sin^3 x \cos^3 x = \frac{1}{32}(3 \sin(2x) - \sin(6x))$.

143 $e^{i(\frac{\pi}{2}-x)} = ie^{-ix} = \sin x + i \cos x$

et $e^{i(\frac{\pi}{2}-x)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

144 $e^{i(\pi+x)} = -e^{-ix} = -\cos x - i \sin x$

et $e^{i(\pi+x)} = \cos(\pi+x) + i \sin(\pi+x)$.

$e^{i(\pi-x)} = -e^{-ix} = -\cos x + i \sin x$

et $e^{i(\pi-x)} = \cos(\pi-x) + i \sin(\pi-x)$.

145 FAUX : $(e^{i\theta})^2 = e^{i2\theta}$.

146 FAUX : $\frac{e^{ia}}{e^{ib}} = e^{i(a-b)}$.

147 VRAI.

148 VRAI.

149 1. a. $\frac{b-a}{c-a} = -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

b. $\left| \frac{b-a}{c-a} \right| = \frac{AB}{AC} = 1$ et $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = (\vec{AC}; \vec{AB}) = -\frac{\pi}{2}$.

2. ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

150 1. a. $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

b. $\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \frac{CB}{CA} = 1$ et $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\vec{CA}; \vec{CB}) = \frac{\pi}{3}$.

2. ABC est un triangle équilatéral.

151 1. $|z_A| = 2$ et $\arg(z_A) = \frac{\pi}{3}$; $|z_B| = 2$ et $\arg(z_B) = \frac{5\pi}{6}$.

2. $\vec{z_{OA}} = z_A$ et $\vec{z_{OB}} = z_B$.

3. a. $(\vec{u}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\vec{u}; \vec{OB}) = \frac{5\pi}{6}$.

b. $(\vec{OA}; \vec{OB}) = (\vec{u}; \vec{OB}) - (\vec{u}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{2}$.

4. OAB est un triangle rectangle isocèle en O.

153 Voir livre page 425.

154 1. a. $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = -i$.

b. $\left| \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} \right| = \frac{AC}{BD} = 1$ et $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) = (\vec{BD}; \vec{AC}) = -\frac{\pi}{2}$.

c. [AC] et [BD] sont perpendiculaires et de même longueur.
 2. $z_{\overrightarrow{AB}} = 3 + i = z_{\overrightarrow{DC}}$. D'où ABCD est un parallélogramme. De plus, ses diagonales sont perpendiculaires et de même longueur. D'où ABCD est un carré.

3. Aire ABCD = $AB^2 = |3 + i|^2 = 10$.

155 1. $z_{\overrightarrow{CD}} = -2 - 2i = z_{\overrightarrow{HG}}$.

2. a. $\frac{h-c}{d-c} = \frac{3}{2}i = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

b. $\left|\frac{h-c}{d-c}\right| = \frac{CH}{CD} = \frac{3}{2}$ et $\arg\left(\frac{h-c}{d-c}\right) = (\overrightarrow{CH}; \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$.

c. CDHG est un rectangle (non carré).

156 1. $c = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $d = -4\sqrt{3} - 4i$.

2. $|a| = 8 = |b| = |c| = |d|$. Donc A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon 8.

3. a. $z_1 = -4 - 4i\sqrt{3}$ et $z_2 = -4\sqrt{3} - 12i = \sqrt{3}z_1$.

b. $|z_3| = |-8 + 8i| = \sqrt{128}$.

$|z_4| = |4 + 4\sqrt{3} + i(-4\sqrt{3} + 4)| = \sqrt{128}$.

c. (AC) est parallèle à (BD) et $AB = DC$.

157 1. $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$
 $= \arg(z_{\overrightarrow{AC}}) - \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$
 $= \arg\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi$.

2. Les points A, B et C sont alignés.

158 Partie A

1. a. $z_{\overrightarrow{AB}} = -2 + 4i$ et $z_{\overrightarrow{AD}} = -4 + 8i$.

b. $z_{\overrightarrow{AD}} = 2z_{\overrightarrow{AB}}$ donc A, B et D sont alignés.

2. a. $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$.

b. ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

Partie B

1. $z_E = -i$.

2. $z' = 2i \Leftrightarrow z = -2 + 5i$.

3. $OM' = |z'| = |i| \times \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = \frac{AM}{BM}$.

4. $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \arg(z') = \arg(i) + \arg\frac{z - z_A}{z - z_B}$,

donc $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) \pm 2\pi$ près.

5. $AM = BM \Rightarrow OM' = 1$.

159 FAUX : $\overrightarrow{EF}(4 + 4i)$ et $\overrightarrow{GH}(-1 - i)$ donc [EF] et [GH] sont parallèles mais ne sont pas de même longueur.

160 FAUX : $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$ et $\overrightarrow{AC}(1 + i\sqrt{3})$ donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

161 1. $z_A = -1 + \frac{5}{2}i$ ou $z_B = -1 - \frac{5}{2}i$.

3. $AB = 5$, $AC = |3 - 4i| = 5$ et $BC = |3 + i| = \sqrt{10}$.

162 $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^8 = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8 = 2^8 \times e^{i2\pi} = 2^8$.

163 $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\frac{5+i}{7,5+1,5i}\right) = 0$, donc les points A, B et C sont alignés.

164 On pose $z = x + iy$.

$Z = \frac{x^2 + x + (y-1)^2}{(x+1)^2 + (y-1)^2} + i\frac{y-1}{(x+1)^2 + (y-1)^2}$.

Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + (y-1)^2 = 0 \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases}$

Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4} \\ (x; y) \neq (-1; 1) \end{cases}$

C'est un cercle de centre le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, de rayon $\frac{1}{2}$ et privé du point de coordonnées $(-1; 1)$.

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 425 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

176 $z_1 = -\frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$; $z_2 = 1 + 2i$; $z_3 = \frac{8}{25} - \frac{19}{25}i$;

$z_4 = 21 + 13i$; $z_5 = 7 - 24i$; $z_6 = -21 + 20i$;

$z_7 = 34$; $z_8 = -23 + 2i$.

177 $z_1 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

$z_2 = \sqrt{5}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

$z_3 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

$z_4 = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

$z_5 = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

$z_6 = 3\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

$z_7 = \frac{5\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

► Résolution d'équations du troisième degré

► $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{-27} = -3$ et $\sqrt[3]{125} = 5$.

► $\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3v^3 = \frac{p^3}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = q - v^3 \\ u^3v^3 = \frac{p^3}{27} \end{cases}$

► $\begin{cases} u^3 = q - v^3 \\ (q - v^3)v^3 = \frac{p^3}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = q - v^3 \\ (v^3)^2 - qv^3 + \frac{p^3}{27} = 0 \end{cases}$

► $\begin{cases} u^3 = q - v^3 \\ (q - v^3)v^3 = \frac{p^3}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = q - v^3 \\ (v^3)^2 - qv^3 + \frac{p^3}{27} = 0 \end{cases}$

► $\Delta = q^2 - \frac{4p^3}{27}$. On suppose $\Delta \geq 0$.

$X = \frac{q - \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$ ou $X = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$.

► $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$.

► $q^2 - \frac{4p^3}{27} = 16 - \frac{4 \times 15^3}{27} = 16 - 4 \times 125 = -484 = i^2 \times 484 = (22i)^2$.

► $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ et $(2 - i)^3 = 2 - 11i$.

► $\alpha = \sqrt[3]{2 - 11i} + \sqrt[3]{2 + 11i} = 2 - i + 2 + i$ soit $\alpha = 4$.

► $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$.

► $S = \{4; -2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}\}$.

178 1. $(4 + i)^3 = 52 + 47i$ et $(4 - i)^3 = 52 - 47i$

2. $\alpha = 8$.

3. $x^3 - 51x + 104 = (x - 8)(x^2 + 8x + 13)$.

4. $S = \{8; -4 - \sqrt{3}; -4 + \sqrt{3}\}$.

179 1. $\alpha = 1$.

$$2. x^3 + 6x - 7 = (x - 1)(x^2 + x + 7).$$

$$3. S = \{1\}.$$

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Configuration géométrique

L'objectif de ce TP est d'utiliser les complexes pour démontrer que des droites sont perpendiculaires et que des segments ont la même longueur.

Fichier associé sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 07_TS_TP1.ggb (GeoGebra).

A. Construction

1. À l'aide de la commande **Nouveau point** (outils **Points**), placer trois points A, B et C. Pour obtenir le triangle ABC, utiliser la commande **Polygone** (outil **Polygones**).

Pour construire le point D, tracer la perpendiculaire à (AB) passant par A à l'aide la commande **Perpendiculaire** (outil **Constructions**) puis le cercle de centre A et de rayon B à l'aide de la commande **Cercle(centre-point)** (outil **Cercles**); on obtient D avec la commande **Intersection entre deux objets** (outil **Points**): on conserve l'unique point tel que ADB soit direct. Tracer le triangle ADB avec la même méthode que pour le triangle ABC.

La construction du point E suit le même procédé que pour D.

2. Le point M milieu de [BC] s'obtient avec la commande **Milieu ou centre** (outils **Points**).

3. Le tracé des droites se fait à l'aide de la commande **Droite passant par deux points** (outil **Lignes**).

4. Pour obtenir les distances AM et ED, utiliser la commande **Distance ou longueur** (outil **Mesures**) et pour l'angle $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{ED})$, utiliser la commande **Angle** (outil **Mesures**).

B. Émettre des conjectures

1. *Correctif: il se peut que dans certains manuels l'aide logiciel en bas de la page soit erronée, pour enregistrer dans le tableur les distances AM et ED, cliquer droit sur l'objet pour faire apparaître Enregistrer dans le tableur.*

Dans la cellule **C2**, entrer la formule **=A2/B2** puis la recopier.

2. a. Les droites (AM) et (ED) semblent être perpendiculaires.

b. Conjecture : $AM = \frac{1}{2} ED$.

C. Utilisation d'un repère

1. $a = 0$.

$$2. a. (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{AE}{AC} = 1.$$

$$b. \frac{e-a}{c-a} = i.$$

$$c. e = ic.$$

$$3. a. (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{AB}{AD} = 1.$$

$$b. \frac{b-a}{d-a} = i.$$

$$c. b = id \text{ soit } d = -ib.$$

$$4. m = \frac{b+c}{2}.$$

D. Démonstration des conjectures

$$1. z_{\overrightarrow{ED}} = -i(b+c) \text{ et } z_{\overrightarrow{AM}} = \frac{b+c}{2}.$$

$$\text{Donc } z_{\overrightarrow{EB}} = -2iz_{\overrightarrow{AM}} \text{ (1).}$$

2. $ED = 2AM$ en passant aux modules dans (1).

3. En passant aux arguments dans (1), on obtient :

$$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{ED}) = -\frac{\pi}{2}.$$

4. On peut en déduire que les droites (AM) et (ED) sont perpendiculaires.

E. D'autres propriétés

2. a. (BE) et (CD) semblent être perpendiculaires.

b. Les distances BE et CD semblent être égales.

$$3. a. \left(\frac{d-c}{e-b} \right) = \frac{-ib-c}{ic-b} = \frac{i(ic-b)}{ic-b} = i.$$

$$b. \arg\left(\frac{d-c}{e-b}\right) = (\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{CD}) \text{ et } \left| \frac{d-c}{e-b} \right| = \frac{CD}{BE}.$$

$$c. (\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{CD}{BE} = 1.$$

Les conjectures de la question 2. sont donc validées.

TP 2 Recherche de lieux de points

Dans ce TP, les élèves vont découvrir une nouvelle transformation géométrique et son effet sur les droites et les cercles.

Fichiers associés sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 07_TS_TP2A.ggb, 07_TS_TP2B.ggb et 07_TS_TP2C.ggb (GeoGebra).

A. Recherche des points invariants

1. a. Pour créer le point libre M d'affixe z , utiliser la commande **Nombre complexe** (outils **Points**) et renommer M, le point créé.

b. Pour créer M' d'affixe $z' = z^2$, saisir **M'=M²** dans le champ de saisie.

2. Faire bouger M à l'aide de la commande **Déplacer** (outil **Pointeur**) afin de le faire coïncider avec M'.

3. Deux points invariants par F : les points d'affixes 0 et 1.

B. Image d'un cercle

1. a. Tracer le cercle de centre O et de rayon 1 en utilisant la commande **Cercle(centre-rayon)** (outil **Cercles**).

Pour redéfinir le point M comme point du cercle de centre O et de rayon 1, cliquer droit sur le point, aller dans **Propriétés** puis dans **Valeur** et modifier la définition du point; ici entrer **point[c]** si le cercle s'appelle c.

b. Pour créer le lieu du point M', cliquer droit sur le point et choisir **Trace activée**, puis faire bouger le point M.

c. L'image du cercle de centre O et de rayon 1 par F est lui-même.

2. a. Pour créer un curseur, utiliser la commande **Curseur** (outil **Propriétés**).

b. Tracer le cercle de centre O et de rayon r puis redéfinir M comme point de ce cercle comme expliqué au B.1.

e. L'image d'un cercle de centre O et de rayon $r > 0$ par F est le cercle de centre O et de rayon r^2 .

3. Non.

C. Image d'une droite

1. a. Saisir **y=x+1** dans le champ de saisie.

d. L'image de la droite (d) par F est une parabole ayant pour axe de symétrie l'axe des ordonnées et pour sommet le point de coordonnées $(0; -\frac{1}{2})$.

2. *Correctif : il se peut que dans certains manuels, il soit indiqué à la question 2.d. « Créer le lieu de M' lorsque M décrit la droite (d) » ; il faut lire « Créer le lieu de M' lorsque M décrit la droite Δ ».*

a. b. Après avoir créé le curseur nommé b , saisir $y=x+b$ dans le champ de saisie.

f. L'image de la droite Δ par F est une parabole ayant pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.

D. Étude mathématique

1. a. $f(z) = z \Leftrightarrow z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(z-1) = 0$ soit $z = 0$ ou $z = 1$.

b. Les points invariants par F sont donc O et le point I d'affixe 1.

2. a. $|z|^2 = (|z|)^2$.

b. $OM = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow |z^2| = 1 \Rightarrow OM' = 1$:

L'ensemble des points M' du plan lorsque M décrit \mathcal{C} est \mathcal{C} .

3. $z' = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

4. a. $X = x^2 - (x+b)^2 = -2xb - b^2$

et $Y = 2x(x+b)$.

b. $x = \frac{-X - b^2}{2b}$.

c. $Y = \frac{1}{2b^2}X^2 - \frac{b^2}{2}$. Lorsque M décrit la droite Δ , M' décrit la parabole d'équation $y = \frac{1}{2b^2}x^2 - \frac{b^2}{2}$.

CAP VERS LE BAC

Sujet A

1. $z_1 = 1 + i$; $z_2 = i$; $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

$z_4 = -\frac{1}{2}$ donc z_4 est bien réel.

2. $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2} \right| |z_n| = \frac{1}{\sqrt{2}} u_n$ et $u_0 = 2$, d'où $u_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$.

3. $OA_n \leq 0,1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 20}{\ln \sqrt{2}} \Leftrightarrow n \geq 9$.

4. $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{-1+i}{1+i}$.

$\frac{A_n A_{n+1}}{OA_{n+1}} = \left| \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} \right| = 1$.

$(\overrightarrow{OA_{n+1}}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \arg \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} \right) = \frac{\pi}{2}$.

Donc le triangle $OA_n A_{n+1}$ est un triangle rectangle isocèle en A_{n+1} .

Sujet B

1. VRAI car $AM = BM$.

2. FAUX : $\arg(z^{2009}) = \frac{2009\pi}{7} = 287\pi = \pi + 143 \times 2\pi$,

donc z^{2009} est un réel mais négatif.

3. FAUX : l'ensemble (E) est la médiatrice de [OC] avec C le point d'affixe 1. Donc (E) est parallèle à l'axe des imaginaires.

4. VRAI : $\Delta = -4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1.$$

$$|z_1| = |z_2| = 1.$$

Sujet C

1. a. $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$.

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{2} \text{ et } \arg(z_1) = -\frac{\pi}{4}, \arg(z_2) = \frac{\pi}{4}.$$

b. Posons $Z = -iz + 3i + 3$.

L'équation du b. revient à celle du a.

Donc $-iz + 3i + 3 = 1 - i$ ou $-iz + 3i + 3 = 1 + i$,

soit $z = 4 - 2i$ ou $z = 2 - 2i$.

2. a. $z_B = 1 - i$ et $z_C = 2 - 2i$.

c. $IA = |-2 + i| = \sqrt{5}$.

De même $IB = \sqrt{5} = IC$.

$$d. \frac{z_C - 3}{z_A - 3} = \frac{-1 - 2i}{-2 + i} = i.$$

$\frac{IC}{IA} = 1$ et $(\vec{IA}; \vec{IC}) = \frac{\pi}{2}$, donc le triangle IAC est rectangle isocèle en I.

e. $z_E = 2(z_C - z_1) = -2 - 4i$.

f. $z_D = (-2 - 4i)i = 4 - 2i$.

g. $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{2}{-2i} = i$, donc $(\vec{AB}; \vec{CD}) = \frac{\pi}{2}$.

Sujet D

$$1. Z = \frac{x^2 - 2x + y^2 + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2} + i \frac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y+2)^2}.$$

2. a. (E) est la droite d'équation $-x + 2y + 4 = 0$ privée du point de coordonnées $(0; -2)$.

b. (F) est le cercle de centre $\Omega\left(1; -\frac{3}{2}\right)$, de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ et privé du point de coordonnées $(0; -2)$.

3. a. $M \in (E) \Leftrightarrow Z = 0$ ou $\arg(Z) = 0$ à π près.

$$M \in (E) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } \begin{cases} (\vec{BM}; \vec{AM}) = 0 \text{ à } \pi \text{ près} \\ M \neq A \text{ et } M \neq B \end{cases}$$

(E) est la droite (AB) privée du point B.

b. $M \in (F) \Leftrightarrow Z = 0$ ou $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$ à π près.

$$M \in (F) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } \begin{cases} (\vec{BM}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{2} \text{ à } \pi \text{ près} \\ M \neq A \text{ et } M \neq B \end{cases}$$

(F) est le cercle de diamètre [AB] privé de B.

c. $|Z| = 1 \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = 1$: (G) est la médiatrice de [AB].

4. $f(z) - 1 = \frac{-2-i}{z+2i}$, donc $(f(z) - 1)(z+2i) = -2 - i$.

D'où $|f(z) - 1| \times |z+2i| = \sqrt{5}$.

$$BM = \sqrt{5} \Rightarrow |z+2i| = \sqrt{5} \Rightarrow |f(z) - 1| = 1.$$

Donc M' appartient au cercle de rayon 1 et de centre le point d'affixe 1.

Sujet E

1. $z_C = \frac{-2+i}{2+i} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ et $|z_C| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$, donc C' appartient à \mathcal{C} .

$$2. a. OM' = |z'| = \left| \frac{z - z_B}{z - z_A} \right| = \frac{BM}{AM} = \frac{MB}{MA}.$$

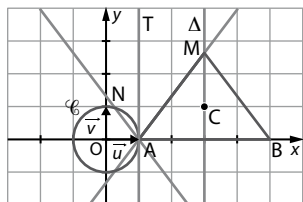
$$b. (\vec{u}; \vec{OM'}) = \arg(z') = \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right),$$

donc $(\vec{u}; \vec{OM'}) = (\vec{AM}; \vec{BM}) = \alpha$ à 2π près.

Or $\vec{u} = \vec{OA}$, donc $(\vec{OA}; \vec{OM}') = (\vec{AM}; \vec{BM})$ à 2π près et ainsi $(\vec{OA}; \vec{OM}') = (\vec{MA}; \vec{MB})$ à 2π près.

3. $MA = MB \Rightarrow OM' = 1$.

4. **Correctif :** M est un point quelconque de Δ .



a. A et N appartiennent au même cercle de centre O, donc AON est isocèle en O.

M appartient à la médiatrice de [AB], donc AMB est isocèle en M.

b. L'angle \widehat{OAN} est l'image de l'angle \widehat{BAM} par la symétrie d'axe T, donc les deux angles géométriques ont la même mesure :

$$(\vec{AO}; \vec{AN}) = -(\vec{AB}; \vec{AM}) + k2\pi.$$

c. $\widehat{AON} = \pi - 2\widehat{OAN}$ et $\widehat{AMB} = \pi - 2\widehat{BAM}$, d'où $\widehat{AON} = \widehat{AMB}$ et ainsi $(\vec{OA}; \vec{ON}) = (\vec{MA}; \vec{MB}) + k2\pi$.

d. $(\vec{OA}; \vec{ON}) = (\vec{OA}; \vec{OM}') + k2\pi$. De plus M' et N appartiennent au même cercle \mathcal{C} , donc M' et N sont confondus.

180 $z_1 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

et $z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

181 $AB = |b - a| = |-12 + 4i| = \sqrt{160}$.

$BC = \sqrt{80} = AC$ et $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

182 $z = 1 + i\sqrt{3}$.

$-z = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

$\bar{z} = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

$\frac{1}{z} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

POUR ALLER PLUS LOIN

183 1. Posons $z = x$ avec x réel :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ -3x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow z = 3.$$

Posons $z = iy$ avec y réel :

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + 3y + 4 = 0 \\ -y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 4 \Leftrightarrow z = 4i.$$

2. En développant chacun des produits, on obtient respectivement les membres de gauche des équations (1) et (2).

3. $S = \{3; -2 + 3i; 4i; 1 - i\}$.

4. $z_0 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

5. $(z_0)^n$ a pour argument $\frac{n\pi}{4} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

M_n appartient à la droite d'équation $y = x$ équivaut à

$\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $\frac{n\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ soit $n = 1 + 8k$ ou $n = -3 + 8k$.

184 1. $0^4 - 5 \times 0^3 + 6 \times 0^2 - 5 \times 0 + 1 = 1 \neq 0$.

2. $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 4 = 0$ redonne (E) avec $z \neq 0$.

3. $u_1 = 1$ et $u_2 = 4$.

4. On résout $z^2 - z + 1 = 0$ et $z^2 - 4z + 1 = 0$.

$$S = \left\{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}; \frac{1-\sqrt{3}i}{2}; 2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right\}.$$

185 1. a. Car $\vec{u}^n = \vec{u}^0$.

b. $P(u) = 0 \Rightarrow \vec{P}(\vec{u}) = 0 \Rightarrow P(\vec{u}) = 0$.

2. a. $P(1+i) = 0$.

b. Une autre solution de (E) est $1-i$.

c. $P(z) = (z-1-i)(z-1+i)(z^2-4z+13)$.

$S = \{1-i; 1+i; 2-3i; 2+3i\}$.

186 1. a. $j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b. $j^3 = e^{i2\pi} = 1$.

c. $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$.

d. $-j^2 = 1 + j = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. a. MNP équilatéral direct donc $MN = PN$ et $(\vec{NP}; \vec{NM}) = \frac{\pi}{3}$ d'où

$$\frac{m-n}{n-p} = e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2.$$

b. Si MNP est un triangle équilatéral direct, alors :

$$m - n = -j^2(p - n) \text{ soit } m + (-1 - j^2)n + j^2p = 0.$$

Or $-1 - j^2 = j$, d'où $m + jn + j^2p = 0$.

Réciproquement, $m + jn + j^2p = 0$.

$$\frac{m-n}{n-p} = \frac{-j^2p - jn - n}{p-n} = \frac{-j^2p + jn}{p-n} = -j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

D'où MNP est un triangle équilatéral direct.

187 1. $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

et $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

2. b. $OA = |2| = OB$.

c. $(\vec{u}; \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4}$ donc $(\vec{u}; \vec{O}) = \frac{3\pi}{8}$.

d. $z_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et ainsi $|z_1| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

3. En écrivant z_1 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique, on obtient :

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

188 1. $(1-z)z' = z^5$.

2. a. $z' = 0$.

b. $\text{Re}(z') = 0$ soit :

$$1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0.$$

3. a. $\frac{8\pi}{5} = 2\pi + \frac{2\pi}{5}$.

De plus $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, d'où :

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = 4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2.$$

b. $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ et $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$.

De plus $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\cos(\pi + x) = -\cos x$, d'où :

$$\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} = -2\cos\frac{\pi}{5}.$$

4. a. D'après 2. b. et 3., on a : $4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0$.

b. $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Or $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{5} > 0$. D'où $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

189 $|z'| = \frac{AM}{BM}$ et $\arg(z') = (\vec{BM}; \vec{AM})$.

a. $OM' = 1 \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow AM = BM$.

L'ensemble des points M est la médiatrice de [AB].

b. $z' = 0$ ou $\arg(z') = 0$ équivaut à :

$$M = A \text{ ou } \begin{cases} (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = 0 \text{ à } \pi \text{ près} \\ M \neq A \text{ et } M \neq B \end{cases}$$

L'ensemble des points M est la droite (AB) privée du point B.

c. $z' = 0$ ou $\arg(z') = \frac{\pi}{2}$ équivaut à :

$$M = A \text{ ou } \begin{cases} (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} \text{ à } \pi \text{ près} \\ M \neq A \text{ et } M \neq B \end{cases}$$

L'ensemble des points M est le cercle de diamètre [AB] privé de B.

190 1. Forme exponentielle avec $OA = OB = OC$.

2. a. $Z = \frac{a+b}{b-a} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{1-\cos(\beta-\alpha)} i$.

b. Les droites (AB) et (CH) sont perpendiculaires.

c. H est l'orthocentre du triangle ABC.

3. $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$.

4. $g = \frac{1}{3}h$ donc les points O, G et H sont alignés.

191 1. a. $z_1 = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$; $z_2 = \frac{3}{8} + i\frac{3\sqrt{3}}{8}$;

$z_3 = i\frac{3\sqrt{3}}{8}$; $z_4 = -\frac{9}{32} + i\frac{9\sqrt{3}}{32}$; $z_5 = -\frac{27}{64} + i\frac{9\sqrt{3}}{64}$; $z_6 = -\frac{27}{64}$.

2. a. $z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n + \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_{n-1}$.

b. $\left|\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$d_n = \frac{\sqrt{3}}{2} d_{n-1}$ et $d_0 = \frac{1}{2}$.

(d_n) est une suite géométrique, d'où $d_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

c. $d_n = A_n A_{n+1}$.

d. $L_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{2 - \sqrt{3}}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.

3. a. $a_n = \arg\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + a_{n-1} = \frac{\pi}{6} + a_{n-1}$: (a_n) est une suite arithmétique.

b. $a_0 = \arg(1) = 0$ et $a_n = \frac{n\pi}{6}$.

c. $(\overrightarrow{OA_0}; \overrightarrow{OA_n}) = k\pi \Leftrightarrow a_n = k\pi \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi$

$(\overrightarrow{OA_0}; \overrightarrow{OA_n}) = k\pi \Leftrightarrow n = 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

192 1. a. $P'(-1-i)$.

b. $\overrightarrow{AP}(-1+i)$ et $\overrightarrow{BP}(1-i)$ donc $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{BP}$.

c. $\frac{p-a}{p'-p} = \frac{-1+i}{-2-2i} = -\frac{1}{2}i$, donc $(\overrightarrow{PP'}; \overrightarrow{AP}) = -\frac{\pi}{2}$.

2. $z' = z \Leftrightarrow \bar{z}(z-2) = z(\bar{z}-2) \Leftrightarrow z = \bar{z}$: l'ensemble des points invariants est l'axe des réels privé du point A.

3. a. $(z-2)(\bar{z}-2) = |z-2|^2$ donc réel.

b. $\frac{z'+2}{z-2} = \frac{|z|^2-4}{|z-2|^2}$ donc réel.

c. $(\overrightarrow{AM'}; \overrightarrow{BM'}) = \arg\left(\frac{z'+2}{z-2}\right) = 0$ à π près.

4. $z_{\overrightarrow{MM'}} = \frac{2(z-\bar{z})}{z-2}$ et $z_{\overrightarrow{AM}} = z-2$.

$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{MM'}) = \arg\left(\frac{2i\operatorname{Im}(z)}{|z-2|^2}\right) = \frac{\pi}{2}$ à π près.

5. a. M' est le point d'intersection de la parallèle à (AM) passant à B et de la perpendiculaire à (AM) passant par M.

193 2. $z_{A'} = -4 - 2i = z_B$.

3. $z' = -5 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = 0$, donc $z = 2 - i$ ou $z = 2 + i$.

4. a. $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$.

b. $|z' + 4| = |z-2|^2$ et $\arg(z' + 4) = 2 \arg(z-2)$.

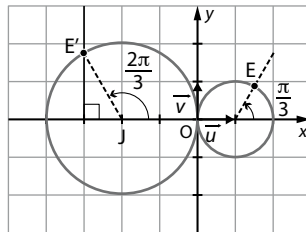
c. $M \in C \Rightarrow |z-2| = 2 \Rightarrow |z' + 4| = 4$, donc M' appartient au cercle de centre J(-4) et de rayon 4.

5. a. $z_{\overrightarrow{IE}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $IE = 2$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{IE}) = \frac{\pi}{3}$.

b. $z_E = -6 + 2i\sqrt{3}$.

$z_{\overrightarrow{JE}} = -2 + 2i\sqrt{3}$ donc $JE' = 4$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{JE'}) = \frac{2\pi}{3}$.

c.



194 Partie A

1. a. $|z'| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg(z') = \pi - \arg(z)$.

b. $\overrightarrow{OM}(z)$ et $\overrightarrow{OM'}\left(-\frac{1}{z}\right)$ soit $\overrightarrow{OM'}\left(-\frac{z}{|z|^2}\right)$ donc $\overrightarrow{OM'} = -\frac{1}{|z|^2} \overrightarrow{OM}$.

2. $z' + 1 = \frac{-1+\bar{z}}{z} = \frac{1}{z}(\bar{z}-1)$.

Partie B

1. (C) est le cercle de centre A et de rayon 1.

2. a. $|z' + 1| = \frac{1}{|z|} |\bar{z} - 1| = \frac{1}{|z|} |\overline{z-1}| = \frac{1}{|z|} |z-1|$.

Or $|z-1| = 1$ et $|z'| = \frac{1}{|z|}$, donc $|z' + 1| = |z'|$.

$|z' + 1| = |z'| \Leftrightarrow BM' = OM' \Leftrightarrow M'$ appartient à la médiatrice de [OB].

b. $|z' + 1| = |z'| \Rightarrow \frac{1}{|z|} |z-1| = |z'| \Rightarrow |z-1| = 1$
(car $|z'| = \frac{1}{|z|}$).

3. M' est le point d'intersection de la droite (OM) et de la médiatrice de [OB].

195 Partie A

1. a. Posons $z = x$ avec x réel.

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 \\ -x^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Donc $z_1 = 1$.

b. La factorisation est : $(z-1)(z-2-2i)(z-1+i)$.

2. $S = \{1; 2+2i; 1-i\}$.

Partie B

2. $\frac{2+2i}{1-i} = 2i$ donc $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$ et $OB \neq OC$.

Donc le triangle OBC est rectangle en O.

3. C'est la bissectrice de l'angle \widehat{BOC} .

4. a. $d = 1 - i$.

b. $z_{\overrightarrow{OB}} = 2 + 2i$ et $z_{\overrightarrow{CB}} = 1 + i$ donc $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{CB}$.

De plus $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$, donc OCDB est un trapèze rectangle.

196 1. a. $P(-1) = 0$.

b. $P(z) = (z+1)(z^2-4z+7)$.

c. $S = \{-1 ; 2 - i\sqrt{3} ; 2 + i\sqrt{3}\}$.

2. b. $AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$: le triangle ABC est équilatéral.

c. $(\overrightarrow{CG} ; \overrightarrow{CA}) = \arg\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right) = \arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

d. GAC est un triangle rectangle en C (non isocèle).

3. A(-1 ; 0), C(2 ; $-\sqrt{3}$) et G(-3 ; 0).

4. a. $\overrightarrow{GA}(-4 ; 0)$ et $\overrightarrow{CG}(1 ; \sqrt{3})$: $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \times 1 + 0 = -4$, donc A appartient à (D).

b. $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$.

c. (D) est la perpendiculaire à (CG) passant par A.

Prises d'initiatives

197 Par exemple : $(z^2 + 1)(z^2 + 2) = 0$.

198 $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $\arg(z^n) = -n\frac{\pi}{6}$.

z^n réel équivaut à $-n\frac{\pi}{6} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k < 0$ soit $n = 6k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$.

199 MNP rectangle en P équivaut à $(\overrightarrow{PM} ; \overrightarrow{PN}) = \frac{\pi}{2}$ à π près équivaut à $\frac{z^2 - z^3}{z - z^3}$ imaginaire pur, soit $\frac{z}{1+z}$ imaginaire pur c'est-à-dire $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{1+z}\right) = 0$.

Posons $z = x + iy$.

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{1+z}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + y^2 = 0 \\ (x ; y) \neq (-1 ; 0) \end{cases}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{1+z}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \frac{1}{4} \\ (x ; y) \neq (-1 ; 0) \end{cases}$$

200 Soit A le point d'affixe -i.

On obtient $\arg\left(\frac{z+i}{z}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, soit $(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

L'ensemble est le demi-cercle de diamètre [OA] privé de O et A.

201 Soit le repère orthonormé direct (O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{CD}).

$$\begin{aligned} a + b + c &= \arg\left(\frac{8+i}{3} \times \frac{5+i}{3} \times \frac{2+i}{2}\right) \\ &= \arg\left(\frac{65}{18} + \frac{65i}{18}\right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

A Le programme

Dans cette partie, il s'agit, d'une part de renforcer la vision dans l'espace entretenue en classe de Première, d'autre part de faire percevoir toute l'importance de la notion de direction de droite ou de plan.

La décomposition d'un vecteur d'un plan suivant deux vecteurs non colinéaires de ce plan, puis celle d'un vecteur de l'espace suivant trois vecteurs non coplanaires, sensibilisent aux concepts de liberté et de dépendance en algèbre linéaire. Le repérage permet à la fois de placer des objets dans l'espace et de se donner un moyen de traiter des problèmes d'intersection d'un point de vue algébrique.

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier des problèmes d'intersection de droites et de plans, en choisissant un cadre adapté, vectoriel ou non, repéré ou non.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Droites et plans Positions relatives de droites et de plans : intersection et parallélisme. Orthogonalité : – de deux droites ; – d'une droite et d'un plan.	<ul style="list-style-type: none"> • Étudier les positions relatives de droites et de plans. • Établir l'orthogonalité d'une droite et d'un plan. 	Le cube est une figure de référence pour la représentation des positions relatives de droites et de plans. On étudie quelques exemples de sections planes du cube. Ce travail est facilité par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.
Géométrie vectorielle Caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires. Vecteurs coplanaires. Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires. Repérage. Représentation paramétrique d'une droite.	<ul style="list-style-type: none"> • Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes d'alignement ou de coplanarité. • Utiliser les coordonnées pour : – traduire la colinéarité ; – caractériser l'alignement ; – déterminer une décomposition de vecteurs. 	On étend à l'espace la notion de vecteur et les opérations associées. On fait observer que des plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles. ☐ Il est intéressant de présenter la démonstration du théorème dit « du toit ». On fait percevoir les notions de liberté et de dépendance. On ne se limite pas à des repères orthogonaux. La caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires conduit à une représentation paramétrique de ce plan. ↔ [SI] Cinématique et statique d'un système en mécanique.

B Notre point de vue

Ce chapitre a été divisé en cinq parties. Les deux premières parties traitent de la géométrie non vectorielle, les notions de positions relatives de droites et de plans de l'espace et notamment celle du parallélisme sont abordées dans la première partie, tandis que l'orthogonalité fait l'objet de la seconde partie. La notion d'orthogonalité dans l'espace est une notion nouvelle pour les élèves de Terminale, nous lui consacrons une activité préparatoire, dans laquelle nous démontrons le théorème fondamental de l'orthogonalité d'une droite et d'un plan, la première partie du TP1 et un thème de l'accompagnement personnalisé pour les élèves qui rencontreraient des difficultés à mettre en œuvre les raisonnements mis en évidence dans les savoir-faire. Dans une troisième partie, il s'agit d'étendre à l'espace la notion de vecteur, de définir et d'utiliser celle de vecteurs coplanaires, pour aborder dans les parties quatre et cinq la géométrie analytique de l'espace, avec notamment la mise en place de systèmes d'équations paramétriques pour les droites et pour les plans.

Les notions abordées dans le chapitre 8

1. Positions relatives de droites et de plans
2. Orthogonalité dans l'espace
3. Les vecteurs de l'espace
4. Repérage dans l'espace
5. Systèmes d'équations paramétriques

C Avant de commencer

Voir livre page 426 et le site www.bordas-index.fr pour les corrections détaillées.

D Activités

Activité 1 Observations dans un prisme

L'objectif de cette activité est de revoir les positions relatives de droites et de plans dans l'espace. Pour cela, nous utilisons comme support un solide que les élèves ont rencontré dans les classes antérieures. Il s'agit notamment de revoir la notion de droites non coplanaires, et de bien faire comprendre la différence avec la notion de droites parallèles.

On aborde également l'intersection de deux plans, et cette activité se termine par une question portant sur le positionnement de points pour obtenir deux plans parallèles. Pour cette question, le professeur pourra s'appuyer sur un fichier Geospace avec pour objectif d'amener les élèves à énoncer une condition de parallélisme de deux plans.

Fichier associé sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 08_TS_activite1.g3w (Geospace).

1. Les droites (AD) et (EH) sont parallèles car le quadrilatère ADHE est un rectangle.
2. Les droites (AD) et (CG) n'ont aucun point commun, elles ne sont pas pour autant parallèles : ces droites sont non-coplanaires.
3. Les plans (ABD) et (BDH) sont sécants selon la droite (BD).
4. **a.** La droite (AB) est incluse dans le plan (ABE), donc I appartient au plan (ABE).
La droite (CD) est incluse dans le plan (CDH), donc I appartient au plan (CDH).
- b.** On construit par exemple l'intersection J des droites (HG) et (EF), J appartient aux deux plans (ABE) et (CDH) donc (IJ) est la droite d'intersection de ces deux plans.
5. Les plans (BDG) et (ADH) sont parallèles.
6. M doit être tel que (LM) soit parallèle à (AD) et N tel que (LN) soit parallèle à (AE).

Activité 2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

L'objectif de cette activité est de proposer une démonstration d'un théorème du cours. Le principal résultat utilisé est la formule d'Al-Kashi qu'on utilise dans plusieurs plans de l'espace pour démontrer finalement qu'une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un même plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

1. **a.** Les droites (d_1) et Δ sont perpendiculaires en A.
- b.** A est le milieu du segment $[EE']$.
- c.** Dans le plan (EBE') , (d_1) est la médiatrice de $[EE']$.
- d.** $BE = BE'$.
- 2.** $EC = E'C$.
3. **a.** $\cos \widehat{EBC} = \frac{EC^2 - BC^2 - BE^2}{2BC \times BE}$.
- b.** $\cos \widehat{E'BC} = \frac{E'C^2 - BC^2 - BE'^2}{2BC \times BE'}$.
- c.** L'égalité $\cos \widehat{EBC} = \cos \widehat{E'BC}$ est une conséquence des égalités $EC = E'C$ et $BE' = BE$.
4. **a.** $\widehat{EBC} = \widehat{EBM}$.
- b.** $EM^2 = BE^2 + BM^2 + 2BE \times BM \times \cos \widehat{EBM}$.
- c.** $E'M^2 = BE'^2 + BM^2 + 2BE' \times BM \times \cos \widehat{E'BM}$.
- d.** L'égalité $EM = E'M$ est une conséquence des égalités précédentes et de $\widehat{EBM} = \widehat{E'BC}$, $\widehat{E'BM} = \widehat{E'BC}$, $\cos \widehat{EBC} = \cos \widehat{E'BC}$ et $BE = BE'$.
5. **a.** Γ' est la médiatrice de $[EE']$.
- b.** On déduit que Γ' est perpendiculaire à Δ donc que Δ est orthogonale à Γ' .

Activité 3 Coplanarité de trois vecteurs

L'objectif de cette activité est d'introduire la notion de vecteurs coplanaires à partir de configurations simples permettant d'établir des égalités vectorielles.

1. $\vec{AC} = \vec{DC} = \vec{EF} = \vec{HG}$.
2. $\vec{CG} = \vec{BF} = \vec{AE} = \vec{DH}$ et $\vec{u} = \vec{AF} = \vec{DG}$.
3. a. Le vecteur \vec{DG} .
- b. $\vec{JN} = \frac{1}{2} \vec{AB}$ et $\vec{JN} = \vec{DI}$.
- c. $\vec{KM} = \vec{CL}$.

Activité 4 Les randonneurs dans le brouillard

L'objectif de cette activité est de découvrir la notion de représentation paramétrique de droite. Pour cela, on utilise les

Correctifs : Dans le corollaire en bas de la page 234, il faut lire : « Si deux droites **sécantes** d'un plan \mathcal{P} sont respectivement **parallèles** à deux droites d'un plan \mathcal{Q} , alors les plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont parallèles ».

À la page 236, dans la deuxième propriété il faut lire « $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ » et non pas « $\vec{AB} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ».

E Exercices

POUR DÉMARRER

- 1 L'intersection des plans (ABC) et (BDC) est la droite (BC).
- 2 L'intersection des plans (EMN) et (ABC) est la droite (MN).
- 3 1. Si A, B et C étaient alignés, les points A, B, C et D seraient coplanaires.
2. L'intersection de (ABC) et (BCD) est la droite (BC).
- 4 $A \in (d)$ et $(d) \subset \mathcal{P}$ donc $A \in \mathcal{P}$; $A' \in (d')$ et $(d') \subset \mathcal{P}'$ donc $A' \in \mathcal{P}'$.
 $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ donc $A \in \Delta$.
- 5 Voir livre page 426.
- 6 Par l'absurde : supposons qu'il existe un plan \mathcal{P} contenant les points A, B, A' et B'. La droite (d), c'est-à-dire (AB), est incluse dans le plan \mathcal{P} . De même, (d') est incluse dans le plan \mathcal{P} . On arrive donc à une contradiction puisque (d) et (d') sont supposées non coplanaires.
- 7 Les droites (EF), (FG), (EG), (HF), (EH) et (HG).
- 8 Δ et Δ' sont parallèles.
- 9 La droite (AB) est incluse dans le plan (ABC) et (AB) est parallèle à la droite Δ , donc Δ est parallèle au plan (ABC).
- 10 1. La droite (AB) est incluse dans le plan \mathcal{P} et E n'appartient pas à \mathcal{P} , donc E n'appartient pas à (AB).
2. La droite (DC) est parallèle à (AB) et (AB) est incluse dans le plan (ABE), donc (DC) est parallèle au plan (ABE).
- 11 1. La droite (BC) est parallèle à la droite (AD) qui est incluse dans le plan (ADE), donc (BC) est parallèle à (ADE). La droite (BC) est incluse dans le plan (BEC) donc parallèle à ce plan.
2. L'intersection des plans (BEC) et (AED) est la parallèle à (BC) passant par E.
- 12 1. Les plans (ABC) et (EFG).
2. Les droites (AD), (BC), (AC), (BD), (DC), (AD), (EF), (FG), (HG), (EH), (EG) et (HF).
3. Les droites (AB), (BC), (BD), (EF), (FG) et (FH).
- 13 ABC est un triangle rectangle en A.
- 14 1. Sinon A, B, C et D seraient coplanaires.
2. La droite (AD) est orthogonale à la droite (AC) et (AD) est orthogonale à (AB).

notions de trajectoires et de vitesses, le paramètre est alors le temps exprimé en seconde.

1.
$$\begin{cases} x(t) = 5\,000 + 0,6t \\ y(t) = -3\,200 + 0,9t \\ z(t) = 1\,800 + 0,1t \end{cases}$$
2. Au bout d'une heure, le groupe se trouve au point de coordonnées (7 160 ; 40 ; 2 160).
3. À 10 h 10.
4. a. Les deux groupes se rencontrent au point de coordonnées (7 520 ; 580 ; 2 220).
- b. À 7 h 30.

Les droites (AC) et (AB) sont deux droites sécantes du plan (ABC) d'où le résultat.

3. Les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.

15 Voir livre page 426.

16 1. Sinon D appartiendrait au plan (ABC).

2. $BA = CA$, $BD = CD$ et $IB = IC$ donc les points A, I et D appartiennent au plan médiateur de [BC] et comme ces points ne sont pas alignés, le plan (AID) est ce plan médiateur.

17 1. a. Les vecteurs \vec{KJ} , \vec{JK} , \vec{BG} , \vec{GB} , \vec{AH} et \vec{HA} .

b. Les vecteurs \vec{JK} , \vec{HA} et \vec{GB} .

2. $\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{AE}$.

18 $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG}$, or $\vec{BC} = \vec{AD}$ et $\vec{CG} = \vec{DH} = \vec{AE}$ donc :
 $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$.

19 Le point M est le centre de la face ABCD, le point L est confondu avec C et le point N est le centre de la face EFGH.

20 1. $\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{BN} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

2. $\vec{AM} = \vec{AN} + \vec{AD}$.

3. A, N, M et D sont coplanaires.

21 Les vecteurs $\frac{1}{2} \vec{BC}$ et $3\vec{BD}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) et ils sont respectivement égaux à deux vecteurs du plan (AEF).

22 A (0 ; 0 ; 0), B (1 ; 0 ; 0), C (1 ; 1 ; 0), D (0 ; 1 ; 0), E (0 ; 0 ; 1), F (1 ; 0 ; 1), G (1 ; 1 ; 1) et H (0 ; 1 ; 1).

23 $\vec{OA} (4 ; -1 ; 5)$.

24 $\vec{AB} (12 ; -2 ; -6)$.

25 Voir livre page 426.

26 1. $\vec{AB} (1 ; 2 ; 3)$ et $\vec{AC} (3 ; 6 ; 9)$.

2. $\vec{AC} = 3\vec{AB}$ donc \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires et A, B et C sont alignés.

27 I (4 ; -2 ; 2).

28 $AB = \sqrt{3}$.

29 1. $2\vec{u} + \vec{v} (0 ; 8 ; 5)$.

2. $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$ donc \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

30 1. $\overrightarrow{AD}(3; -8; -4)$ et $\overrightarrow{AB}(1; 2; 8)$ donc $-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(3; -8; -4)$ comme le vecteur \overrightarrow{AD} .

2. On déduit que les points A, B, C et D sont coplanaires.

31
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 4t \\ z = 2 - 7t \end{cases} \text{ avec } t \text{ réel quelconque.}$$

32 Voir livre page 426.

33 1. $\vec{u}(2; 4; -1)$.

2. A $(-3; 2; 1)$.

3. B $(-1; 6; 0)$.

34 1. $\vec{u}(2; 3; -1)$.

2. A $(5; 8; 2)$.

3. $t = 3$ et B $(7; 11; 1)$.

35
$$\begin{cases} x = 5 + t - t' \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t + 3t' \end{cases} \text{ avec } t \text{ et } t' \text{ réels quelconques.}$$

36 1. A $(2; 5; 3)$.

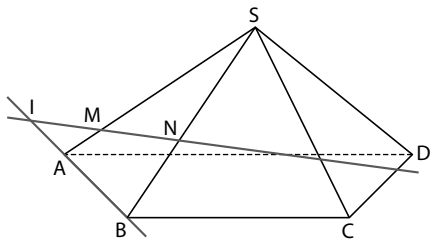
2. $y_B = 0$.

POUR S'ENTRAÎNER

37 1. B n'appartient pas au plan (EFG) donc (BI) n'est pas incluse dans ce plan. Les droites (BI) et (EF) sont sécantes dans le plan (ABF) en un point J qui est commun à la droite (BI) et au plan (EFG).

2. La droite (FG) est parallèle au plan (ABC) donc (d) est parallèle au plan (ABC).

38



1. Les droites (MN) et (AB) sont sécantes dans le plan (ABS). Soit I le point d'intersection de ces deux droites, I est le point d'intersection de la droite (MN) avec le plan (ABC).

2. Comme (AD) et (BC) sont parallèles, (d) est parallèle à (BC). Or (BC) est incluse dans le plan (SBC), donc la droite (d) est parallèle au plan (SBC).

39 Notons \mathcal{R} le plan défini par les droites sécantes \mathcal{D} et \mathcal{D}' . La droite (AA') est l'intersection de \mathcal{R} et \mathcal{P} . La droite (MM') est l'intersection de \mathcal{R} et \mathcal{Q} . Comme \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont deux plans parallèles, on déduit que les droites (AA') et (MM') sont parallèles.

La droite (BB') est symétrique de la droite (AA') par rapport à (MM') , donc (BB') est parallèle à (AA') donc à \mathcal{P} .

40 1. La droite (AB) est parallèle à la droite (EF) et (EF) est incluse dans le plan (EFG), donc (AB) est parallèle au plan (EFG).

2. Il s'agit de la parallèle à (AB) passant par I, donc de la droite (IL).

3. Les plans (ADE) et (BFC) sont parallèles, la droite (AI) intersection de (AIB) et (ADE) est donc parallèle à la droite (BL), intersection de (AIB) et (BFC).

4. Les droites (IJ) et (KL) sont parallèles car toutes deux parallèles à la droite (HF), donc (IJ) est parallèle au plan (KLB). La droite (AI) étant parallèle à la droite (BL), cette droite est parallèle au plan (KLB).

Comme (AI) et (IJ) sont deux droites sécantes du plan (AIJ), on déduit que les plans (AIJ) et (KLB) sont parallèles.

41 1. Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles donc (IJ) est parallèle aux plans (OIJ) et (OBC).

L'intersection de ces deux plans est donc la parallèle à (IJ) passant par O.

2. La droite (IK) est parallèle à la droite (OB) donc au plan (OBC). (IJ) et (IK) sont deux droites sécantes du plan (IJK) donc ce plan est parallèle au plan (OBC).

43 Vraie, sinon les droites (d) et (d') seraient sécantes en un point appartenant à la fois à (d) et \mathcal{P} ce qui est absurde.

45 Si Δ est parallèle à (AB), les points A' et B' d'une part et C' et D' d'autre part sont confondus, A'B'C'D' est alors un parallélogramme aplati. C'est également le cas si Δ est parallèle à (AD).

Supposons que Δ n'est parallèle ni à (AB), ni à (AD).

(AA') est parallèle à (DD') donc au plan (DCD').

(AB) est parallèle à (DC) donc au plan (DCD').

(AA') et (AB) sont deux droites sécantes du plan (ABA'), donc (ABA') est parallèle au plan (DCD').

Le plan (ABA') coupe \mathcal{P} selon la droite (A'B') et le plan (DCD') coupe le plan \mathcal{P} selon la droite (DD'), par conséquent (A'B') et (DD') sont parallèles.

On démontre de la même façon que les droites (A'D') et (B'C') sont parallèles donc le quadrilatère A'B'C'D' est un parallélogramme.

46 \mathcal{D}' est parallèle à \mathcal{D} qui est incluse dans chacun des plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} , donc \mathcal{D}' est parallèle aux plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

Comme de plus la droite \mathcal{D}' est incluse dans le plan \mathcal{R} , la droite d'intersection de \mathcal{R} et \mathcal{P} est parallèle à \mathcal{D}' .

De même, la droite d'intersection de \mathcal{R} et \mathcal{Q} est parallèle à \mathcal{D}' .

47 FAUX. Contre-exemple : soit ABCDEFGH un cube, la droite (HG) est strictement parallèle au plan (ABC) et I le milieu de [AE] n'appartient ni à (HG) ni au plan (ABC), alors que les plans (HGI) et (ABC) sont sécants.

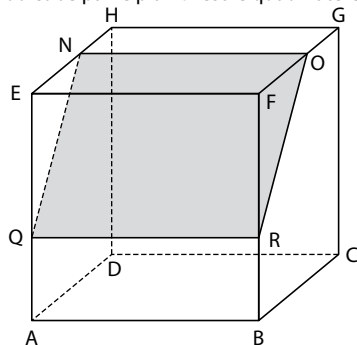
48 VRAI. (ABC) coupe (ACD) selon la droite (AC). Si \mathcal{P} est un plan parallèle à (ABC), \mathcal{P} coupe (ACD) selon une droite parallèle à (AC) donc le plan parallèle à (ABC) passant par I coupe (ACD) selon la parallèle à (AC) passant par I et en appliquant le théorème des milieux au triangle ACD, on déduit que cette droite coupe [CD] en son milieu. On procède de la même façon pour le segment [DB].

49 La parallèle à (HG) passant par N coupe (FG) en O.

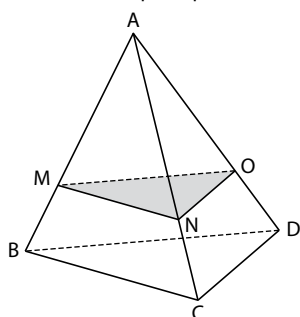
La parallèle à (BG) passant par O coupe (FB) en R.

La parallèle à (AB) passant par R coupe (AE) en Q.

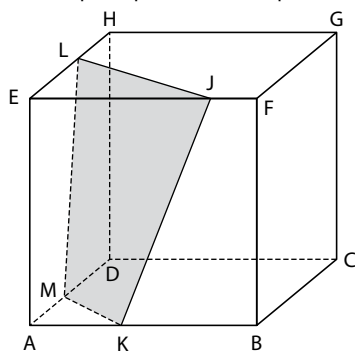
La section du cube par le plan \mathcal{P} est le quadrilatère NORQ.



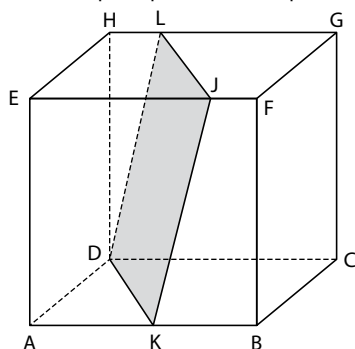
- 50** La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.
La parallèle à (BD) passant par M coupe (AD) en O.
La section du tétraèdre ABCD par le plan \mathcal{P} est le triangle MON.



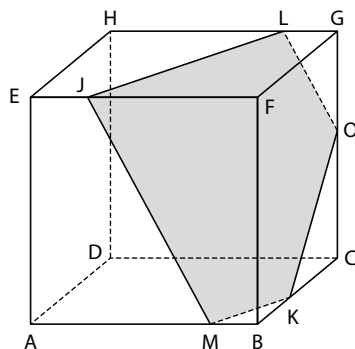
- 51** La parallèle à (LJ) passant par K coupe (AD) en M.
La section du cube par le plan (IJK) est le quadrilatère LJKM.



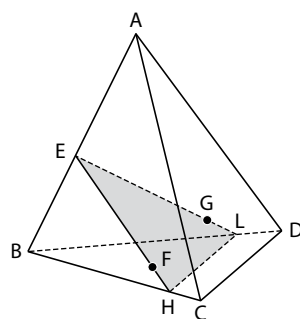
- 52** La parallèle à (LJ) passant par K passe également par le point D. La section du cube par le plan (IJK) est le quadrilatère LJKD.



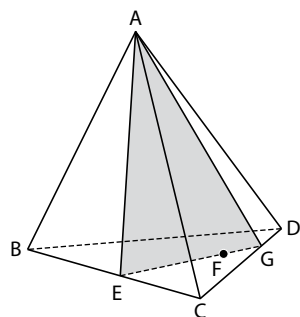
- 53** La parallèle à (LJ) passant par K coupe [AB] en M.
La parallèle à (JM) passant par L coupe [GC] en O.
La section du cube par le plan (IJK) est le pentagone LJO KM.



- 54** La droite (EF) coupe [BC] en H. La droite (EG) coupe [BD] en L. La section du tétraèdre par le plan (EFG) est le triangle ELH.



- 55** La droite (EF) coupe [CD] en G. La section du tétraèdre par le plan (AEF) est le triangle AEG.



- 56** Voir livre page 426.
57 FAUX : l'intersection peut être vide.
58 VRAI : par exemple la section du cube ABCDEFGH par le plan (ABC) est le carré ABCD.
59 FAUX : le cube ne comportant que six faces, la section du cube par un plan ne peut pas être un polygone à huit côtés.
60 FAUX : la section du cube ABCDEFGH par le plan (EGB) est le triangle EGB qui est équilatéral donc non rectangle.
61 ABC est équilatéral donc (AI) est perpendiculaire à (BC). BCD est équilatéral donc (DI) est perpendiculaire à (BC). La droite (BC) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (AID) donc (BC) est perpendiculaire à ce plan.
62 1. ABFE est un carré donc (BF) est perpendiculaire à (AB). BCGF est un carré donc (BF) est perpendiculaire à (BC). La droite (BF) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC), elle est donc perpendiculaire à ce plan.

2. a. [AC] et [BD] sont les diagonales du carré ABCD donc (AC) est perpendiculaire à (BD).

b. La droite (AC) est incluse dans le plan (ABC) et (BF) est perpendiculaire à (ABC), donc (AC) est orthogonale à (BF). La droite (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDH), donc (AC) est perpendiculaire à (BDH).

3. On démontre comme précédemment que (HG) est perpendiculaire au plan (BCG) donc orthogonale à (CF). De plus (CF) est perpendiculaire à (BG). On déduit alors que (CF) est perpendiculaire au plan (BHG) puisque (CF) est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

4. La droite (BH) est incluse dans le plan (BDH) donc (AC) est orthogonale à (BH). La droite (BH) est incluse dans le plan (BGH) donc (CF) est orthogonale à (BH).

(AC) et (CF) sont deux droites sécantes du plan (AFC) donc (BH) est perpendiculaire à (AFC).

63 1. Faux : par exemple dans le cube ABCDEFGH, les droites (EB) et (BC) sont perpendiculaires mais (EB) n'est pas perpendiculaire à (ABC).

2. Vrai : si (d') est perpendiculaire en A au plan \mathcal{P} , toute droite incluse dans le plan \mathcal{P} et passant par A est perpendiculaire à (d').

64 \mathcal{D} est incluse dans le plan \mathcal{P} donc elle est orthogonale à Δ . \mathcal{D} est perpendiculaire à (EF). (EF) et (EM) sont deux droites sécantes du plan (EFM) donc \mathcal{D} est perpendiculaire au plan (EFM) donc orthogonale à la droite (MF).

Comme (MF) et \mathcal{D} sont de plus sécantes, on déduit que ces droites sont perpendiculaires.

65 1. [DB] et [AC] sont les diagonales du carré ABCD.

2. (DB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AEC) donc elle est perpendiculaire à ce plan et (EC) est incluse dans le plan (AEC).

67 Voir livre page 426.

68 1. Vrai : conséquence de la définition.

2. Faux : par exemple dans le cube ABCDEFGH, (AB) et (EH) sont orthogonales sans être perpendiculaires.

69 1. Vrai : SAB est isocèle en S donc SA = SB.

CAB est isocèle en C donc CA = CB.

2. (SC) est incluse dans le plan médiateur de [AB], donc (SC) est orthogonale à (AB).

70 1. Soit a le côté du cube. En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles ADI et BFI on obtient $DI = FI = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, donc I est équidistant de D et F. On procède de la même façon pour les autres points.

2. Les six points appartiennent au plan médiateur de [DF].

71 (OD) est la médiatrice de [BC] dans le plan (BCD) et (AB) est orthogonale à (BCD) donc à (BC). (AOD) est donc perpendiculaire à (BC) et O appartenant à (AOD), on en déduit que (AOD) est le plan médiateur de [BC].

On démontre de la même façon que (OAC) est le plan médiateur de [BD] et que (OAB) est le plan médiateur de [CD].

La droite (OA) est l'intersection des trois plans (OAC), (AOD) et (OAB).

72 AE = BE = AF = BF = R, donc E et F appartiennent au plan médiateur de [AB].

AG = BG = AH = BH = R', donc G et H appartiennent au plan médiateur de [AB].

73 FAUX : [AG] et [BH] sont les diagonales du parallélogramme ABGH et ABGH n'est pas un losange.

74 VRAI : il s'agit du carré IJKL où I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AB], [EF], [HG] et [DC].

75 FAUX : les droites (AE) et (FG) ne sont pas sécantes, elles sont seulement orthogonales.

76 VRAI : (EB) est parallèle à (HC) et (HC) est perpendiculaire à (DG).

77 1. $\vec{AP} = 2\vec{AK}$ donc K est le milieu de [AP]. [AP] et [BC] ont le même milieu, donc ABPC est un parallélogramme.

$\vec{AM} = 2\vec{AI}$ donc I est le milieu de [AM]. [AM] et [CD] ont le même milieu, donc ACMD est un parallélogramme.

$\vec{AN} = 2\vec{AJ}$ donc J est le milieu de [AN]. [AN] et [BD] ont le même milieu, donc ABND est un parallélogramme.

2. ABPC et ABND sont des parallélogrammes donc $\vec{AB} = \vec{CP} = \vec{DN}$ et CPND est un parallélogramme, ses diagonales [BM] et [DP] ont le même milieu.

ABPC et ACMD sont des parallélogrammes donc $\vec{AC} = \vec{BP} = \vec{DM}$ donc BPMD est un parallélogramme et ses diagonales [BM] et [DP] ont le même milieu.

$$\begin{aligned} \text{78 1. } 3\vec{AK} &= 3\vec{AB} + 3\vec{BK} = 3\vec{AB} + 2\vec{BD} + \vec{DE} \\ &= 3\vec{AB} + 2\vec{BA} + 2\vec{AD} + \vec{DA} + \vec{AE} \\ &= \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}. \end{aligned}$$

$$\text{2. } \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG} = \vec{AG}.$$

3. $3\vec{AK} = \vec{AG}$, donc A, K et G sont alignés.

$$\begin{aligned} \text{79 1. } \vec{KE} &= \vec{KA} + \vec{AB} + \vec{BE} = \frac{1}{4}\vec{BA} + \vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{BC} + \frac{3}{4}\vec{CD} \\ &= \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{BA} + \frac{3}{2}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{CD} \\ &= -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{CD}. \end{aligned}$$

$$\text{2. } \vec{KL} = -\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{CD}.$$

3. $\vec{KE} = 3\vec{KL}$, donc K, L et E sont alignés.

80 Voir livre page 426.

81 1. Faux si C n'appartient pas à (AB).

2. Vrai : soit \vec{AB} est nul, soit \vec{AB} est un vecteur directeur de la droite (AB) et dans ce cas il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{CD} = t\vec{AB}$.

82 1. $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ et $\vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{SB}$. C n'appartenant pas à (SAB), \vec{SC} , \vec{AB} et \vec{SB} ne sont pas coplanaires, donc \vec{SC} , \vec{IJ} et \vec{KL} non plus.

2. Les points B, J, K et S sont des points du plan (SBC).

$$\text{83 1. } \vec{BA} + \vec{BD} = 2\vec{BK}.$$

$$\begin{aligned} \text{2. } \vec{BF} - 2\vec{BK} &= \vec{BF} - \vec{BA} - \vec{BD} = \vec{AF} + \vec{DB} \\ &= \vec{BE} + \vec{DB} = \vec{DE} = \frac{3}{2}\vec{DC} = 3\vec{KJ}. \end{aligned}$$

3. $\vec{BF} + \vec{BK} = 3\vec{BJ}$, donc \vec{BK} , \vec{BJ} et \vec{BF} sont coplanaires.

4. B, F, K et J sont coplanaires.

$$\begin{aligned} \text{84 1. } \vec{MN} &= \frac{3}{4}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}; \vec{MP} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{9}{2}\vec{AC} - \vec{AD}; \\ \vec{MQ} &= \frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB}. \end{aligned}$$

2. $6\vec{MN} - 3\vec{MQ} = \vec{MP}$.

3. \vec{MP} s'écrit en fonction de \vec{MN} et \vec{MQ} donc ces trois vecteurs sont coplanaires.

4. M, N, P et Q sont coplanaires.

86 1. Comme \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires, \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, donc si \vec{t} est coplanaire avec \vec{u} et \vec{v} alors il existe des réels a et b tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

2. a. On a dans ce cas $a\vec{u} + b\vec{v} = a'\vec{u} + b'\vec{w}$ soit :

$$(a - a')\vec{u} + b\vec{v} - b'\vec{w} = \vec{0}.$$

Or les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont non coplanaires, donc l'égalité précédente implique $a = a'$, $b = 0$ et $b' = 0$.

b. \vec{t} et \vec{u} sont alors colinéaires.

3. La droite d'intersection de \mathcal{P} et \mathcal{P}' est dirigée par le vecteur \vec{u} .

87 Non, sauf si \vec{u} et \vec{v} sont supposés non colinéaires.

88 1. $\vec{IJ} = \vec{IS} + \vec{SJ} = \frac{1}{3}\vec{SB} - \frac{1}{3}\vec{SA} = \frac{1}{3}\vec{AB}$.

2. De même $\vec{JK} = \frac{1}{3}\vec{BC}$. \vec{AB} et \vec{BC} dirigent le plan (ABC) donc $\frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\frac{1}{3}\vec{BC}$ dirigent le plan (ABC). Or \vec{IJ} et \vec{JK} dirigent le plan (IJK), (ABC) et (IJK) sont donc parallèles.

89 1. $\vec{IJ} = \vec{IH} + \vec{HG} + \vec{GJ} = \frac{3}{4}\vec{EH} + \vec{HG} + \frac{3}{4}\vec{GF} = \vec{HG}$.

2. $\vec{AI} = \vec{AK} + \vec{KH} + \vec{HI} = \frac{3}{4}\vec{AD} + \vec{KH} + \frac{3}{4}\vec{HE} = \vec{KH}$.

Les vecteurs \vec{AI} et \vec{IJ} dirigent le plan (AIJ) et les vecteurs \vec{HG} et \vec{KH} dirigent le plan (GHK), donc ces plans sont parallèles.

90 1. $\vec{HI} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \vec{AE}$; $\vec{EG} = \vec{AB} + \vec{AD}$; $\vec{GJ} = -\frac{1}{3}\vec{AD} - \vec{AE}$.

2. $\vec{HI} = \frac{1}{3}\vec{EG} + \vec{GJ}$ donc $x = \frac{1}{3}$ et $y = 1$.

3. (HI) est parallèle au plan (EGJ).

91 VRAI : les points A, I, J et K appartiennent au plan (ABG).

92 FAUX : sinon comme $\vec{AB} = \vec{HI} - \vec{AH}$ on aurait \vec{AB} colinéaire à \vec{AH} donc B appartiendrait à (AH).

93 Voir livre page 426.

94 $\vec{AB}(3; 4; -1)$ et $\vec{AC}(15; 20; -5)$ donc $\vec{AC} = 5\vec{AB}$.

95 1.

2.

Saisir R
Saisir S
Saisir T
Saisir U
Saisir V
Saisir W
X prend la valeur $U - R$
Y prend la valeur $V - S$
Z prend la valeur $W - T$
Afficher X
Afficher Y
Afficher Z

CASIO	TEXAS
? → R	Prompt R
? → S	Prompt S
? → T	Prompt T
? → U	Prompt U
? → V	Prompt V
? → W	Prompt W
U-R → X	U-R → X
V-S → Y	V-S → Y
W-T → Z	W-T → Z
X▲	Disp X
Y▲	Disp Y
Z▲	Disp Z

96 1. $M(-7; -12; 9)$.

2. $\vec{AB}(3; 4; -2)$ et $\vec{AM}(-6; -8; 4)$, donc :
 $\vec{AM} = -2\vec{AB}$.

97 1. $L(3; 3; -2)$ et $K(4; 5; -5)$.

2. $\vec{GK}(3; 6; -9)$ et $\vec{GL}(2; 4; -6)$, donc $\vec{GK} = 1,5\vec{GL}$.

98 1. $E(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; \frac{9}{2})$ et $F(\frac{11}{2}; \frac{23}{2}; -\frac{21}{2})$.

2. $\frac{x_E + x_F}{2} = \frac{7}{2} = \frac{x_C + x_D}{2}$; $\frac{y_E + y_F}{2} = 4 = \frac{y_C + y_D}{2}$ et $\frac{z_E + z_F}{2} = -3 = \frac{z_C + z_D}{2}$.

99 1. $G(0; \frac{13}{4}; \frac{3}{4})$.

2. $I(0; 0; 2)$ et $K(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

3. $\frac{x_D + x_K}{2} = 0$; $\frac{y_D + y_K}{2} = \frac{13}{4}$; $\frac{z_D + z_K}{2} = \frac{3}{4}$.

100 1.

Saisir R
Saisir S
Saisir T
Saisir U
Saisir V
Saisir W
X prend la valeur $\frac{U + R}{2}$
Y prend la valeur $\frac{V + S}{2}$
Z prend la valeur $\frac{W + T}{2}$
Afficher X
Afficher Y
Afficher Z

2.

CASIO	TEXAS
? → R	Prompt R
? → S	Prompt S
? → T	Prompt T
? → U	Prompt U
? → V	Prompt V
? → W	Prompt W
(U+R)/2 → X	(U+R)/2 → X
(V+S)/2 → Y	(V+S)/2 → Y
(W+T)/2 → Z	(W+T)/2 → Z
X▲	Disp X
Y▲	Disp Y
Z▲	Disp Z

101 $\vec{AB}(2; 0; 3)$, $\vec{AC}(0; 2; -1)$ et $\vec{AD}(-2; 2; -4)$.

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$, donc A, B, C et D sont coplanaires.

102 $\vec{AB}(3; 0; -3)$, $\vec{AC}(2; 7; 5)$ et $\vec{AD}(8; 7; -1)$.

$\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$, donc A, B, C et D sont coplanaires.

103 1. $\vec{AB}(2; -1; -1)$ et $\vec{AC}(1; 4; 1)$: \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires.

2. $x = 3$.

104 1. $\vec{AB} = \sqrt{26}$ et $\vec{AC} = \sqrt{26}$.

2. ABC est isocèle en A.

106 $\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \vec{DA} = \sqrt{69}$, ce qui prouve que ABCD est un losange.

107 1.

Saisir R
Saisir S
Saisir T
Saisir U
Saisir V
Saisir W
L prend la valeur $\sqrt{(U - R)^2 + (V - S)^2 + (W - T)^2}$
Afficher L

2.

CASIO	TEXAS
? → R	Prompt R
? → S	Prompt S
? → T	Prompt T
? → U	Prompt U
? → V	Prompt V
? → W	Prompt W
$\sqrt{(U-R)^2 + (V-S)^2 + (W-T)^2} \rightarrow L$	$\sqrt{(U-R)^2 + (V-S)^2 + (W-T)^2} \rightarrow L$
L▲	Disp L

108 1. \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires donc \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels

$$\text{que } \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}, \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} 2 = a \\ 3 = a + b \\ 4 = b \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, donc les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires.

2. $\vec{t} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$.

109 1. \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires donc \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels

$$\text{que } \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} 1 = -2a + b \\ 2 = 3a \\ -1 = a + 3b \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, donc les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires.

2. $\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$.

110 FAUX : $\overrightarrow{AB}(1; 1; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(2; 3; 4)$ ne sont pas colinéaires.

111 VRAI : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

112 FAUX : $AM = \sqrt{70}$ et $BM = \sqrt{97}$.

113 1. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 7 + 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$

2. $B(0; 3; 3)$.

114 a. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$

b. $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$

c. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + 13t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$

d. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$

115 1. $A \notin (d)$ car $x = -2 \Leftrightarrow t = -2$ et dans ce cas $z = 11$.

2. $\vec{u}(3; 1; -5)$ est un vecteur directeur de (d) et $\overrightarrow{BC}(-12; -4; 20)$ soit $\overrightarrow{BC} = -4\vec{u}$, donc (BC) et (d) sont parallèles.

3. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 + t \\ z = 2 - 5t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$

116 1. $A \notin (d)$ car $x = 3 \Leftrightarrow t = -1$ et $y = 5 \Leftrightarrow t = 1$.

2. $\vec{u}(-2; 5; 0)$ est un vecteur directeur de (d) et $\overrightarrow{BC}(8; -20; 0)$ soit $\overrightarrow{BC} = -4\vec{u}$, donc (BC) et (d) sont parallèles.

3. $\begin{cases} x = 2 + 8t \\ y = 3 - 20t \\ z = 5 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$

117 $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + 4t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$

118 Voir livre page 426.

119 $\vec{u}(4; 1; -1)$ est un vecteur directeur de (d).

$\vec{v}(2; 1; 3)$ est un vecteur directeur de (d').

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires donc (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Le système $\begin{cases} 1 + 4k = 2t \\ -1 + k = 3 + t \\ 2 - k = -2 + 3t \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 1 + 4k = 2t \\ -1 + k = 3 + t \\ 1 = 1 + 4t \end{cases}$ soit :

$$\begin{cases} k = -\frac{1}{4} \\ k = 4 \\ t = 0 \end{cases}$$

Les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

120 1. $\overrightarrow{AB}(1; 2; 3)$ et $\overrightarrow{AC}(3; 4; 5)$ ne sont pas colinéaires.

2. $\begin{cases} x = 1 + t + 3t' \\ y = 1 + 2t + 4t' \\ z = 1 + 3t + 5t' \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}.$

122 1. $A(1; -5; -5)$ et le système $\begin{cases} 3 + t = 1 \\ -1 + 2t' = -5 \\ t + t' = -5 \end{cases}$ équivaut à

$$\begin{cases} t = -2 \\ t' = -2 \\ t + t' = -5 \end{cases} \text{ donc ce système n'a pas de solution : } A \notin \mathcal{P}.$$

2. $\vec{u}(2; 1; 3)$ est un vecteur directeur de (d) et \mathcal{P} est dirigé par le couple constitué des vecteurs $\vec{v}(1; 0; 1)$ et $\vec{w}(0; 2; 1)$.

L'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ équivaut à $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + 2c = 0 \\ 3a + b + c = 0 \end{cases}$ soit à

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = -\frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a = 0 \end{cases} \text{ et à } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires donc la droite (d) et le plan \mathcal{P} sont sécants. (On peut déterminer que le point d'intersection est $\Omega(5; -3; 1)$.)

123 1. $A(2; 0; 3)$ et le système $\begin{cases} t - t' = 2 \\ 1 + t' = 0 \\ 4 - t = 3 \end{cases}$ équivaut à :

$$\begin{cases} t - t' = 2 \\ t' = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

La première équation est vérifiée, donc $A \in \mathcal{P}$.

2. $\vec{u}(-1; 3; 2)$ est un vecteur directeur de (d) et \mathcal{P} est dirigé par le couple constitué des vecteurs $\vec{v}(1; 0; -1)$ et $\vec{w}(-1; 1; 0)$.

L'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ équivaut à $\begin{cases} -a + b - c = 0 \\ 3a + c = 0 \\ 2a - b = 0 \end{cases}$ soit à

$$\begin{cases} 4a = 0 \\ c = -3a \\ b = 2a \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires donc la droite (d) et le plan \mathcal{P} sont sécants (en A).

124 La droite (AB) et le plan sont sécants en $\Omega\left(\frac{1}{2}; 2; 0\right)$.

125 FAUX : $x = 2 \Leftrightarrow k = -2$ et $y = 4 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$.

126 VRAI car $\vec{v}(2; 4; -6)$ est un vecteur directeur de (d) et :

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}.$$

127 VRAI. Soit A de paramètres $t = 0$ et $t' = 0$, B de paramètres $t = 1$ et $t' = 0$, C de paramètres $t = 0$ et $t' = 1$: $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

128 FAUX : $B \notin \mathcal{P}$ car le système $\begin{cases} 2+t+t' = 4 \\ 1+t-t' = 1 \\ 3+t = 1 \end{cases}$ qui équivaut à

$$\begin{cases} t+t' = 2 \\ t' = -2 \\ t = -2 \end{cases} \text{ n'a pas de solution.}$$

129 D et C appartiennent au plan médiateur de [AB].

130 $\overrightarrow{AB}(2; -3; -4)$ et $\overrightarrow{AC}(6; -9; -12)$, donc $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$.

131 $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 7-7t \\ z = -2+6t \end{cases}$ et $C(-1; -7; 10)$.

132 1. $\overrightarrow{AB}(-1; 2; 3)$ et $\overrightarrow{AC}(3; 5; 6)$. \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires donc A, B et C définissent un plan.

$$\begin{cases} x = 1-t+3t' \\ y = 2t+5t' \\ z = 3t+6t' \end{cases}$$

2. $m = 12$.

133 1. $AB = \sqrt{26}$ et $AC = \sqrt{26}$.

2. ABC est isocèle en A.

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 426 et le site www.bordas-index.fr pour les corrections détaillées.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

144 (BD) est perpendiculaire à (AC). (BD) est incluse dans le plan \mathcal{P} et (SI) est perpendiculaire au plan \mathcal{P} donc (BC) est orthogonale à (SI). (AC) et (SI) sont deux droites sécantes du plan (SAC) donc (BD) est perpendiculaire au plan (SAC).

145 (BC) est perpendiculaire à (AI). (BC) est incluse dans le plan \mathcal{P} et (DA) est perpendiculaire à \mathcal{P} donc (BC) est orthogonale à (DA). (AI) et (DA) sont deux droites sécantes du plan (ADI) donc (BC) est perpendiculaire au plan (ADI).

146 $\begin{cases} x = -1+8t \\ y = 2-3t \\ z = -3+7t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. $C(15; -4; 11)$.

147 $\begin{cases} x = 5-4t \\ y = 1 \\ z = 2+3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. $C(13; -2; -4)$.

► Déterminer une équation cartésienne d'une sphère

► La sphère de centre A et de rayon 3 est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $AM = 3$.

► $AM^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2$.

► M appartient à \mathcal{S} si et seulement si :

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

► $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 9$

équivalent à $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 6z + 9 = 9$

ce qui équivaut à $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y - 6z + 26 = 0$.

► La droite (d) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2+5t \\ y = 1+2t \\ z = 1+t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

► Le point M de (d) de paramètre t appartient à \mathcal{S} si, et seulement si, t est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} (-2+5t)^2 + (1+2t)^2 + (1+t)^2 - 2(-2+5t) - 10(1+2t) - 6(1+t) + 26 &= 0 \\ 30t^2 - 50t + 20 &= 0 \text{ soit à :} \\ 3t^2 - 5t + 2 &= 0. \end{aligned}$$

► L'équation $3t^2 - 5t + 2 = 0$ a deux solutions : $t_1 = \frac{2}{3}$ et $t_2 = 1$.

Par conséquent la droite (d) coupe \mathcal{S} en deux points : le point M_1 de paramètre $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire $M_1\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right)$, et le point M_2 de paramètre 1, c'est-à-dire $M_2(3; 3; 2)$.

$$\begin{aligned} \text{► } AM_1^2 &= \left(\frac{4}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{7}{3}-5\right)^2 + \left(\frac{5}{3}-3\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{64}{9} + \frac{16}{9} = \frac{81}{9} = 9 \end{aligned}$$

donc $AM_1 = 3$.

$$\begin{aligned} AM_2^2 &= (3-1)^2 + (3-5)^2 + (2-3)^2 \\ &= 2^2 + (-2)^2 + (-1)^2 = 4 + 4 + 1 = 9 \end{aligned}$$

donc $AM_2 = 3$.

148 1. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$.

2. L'intersection de S et de (BC) est constituée de deux points :

$$M_1(0; -1; -1) \text{ et } M_2\left(\frac{14}{3}; \frac{11}{3}; \frac{11}{3}\right).$$

149 1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+at \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

3. a. (d_3) et \mathcal{S} sont sécants en deux points, l'un de paramètre $t = \frac{-5-\sqrt{3}}{11}$ et l'autre de paramètre $t' = \frac{-5+\sqrt{3}}{11}$.

b. (d_4) est tangente à \mathcal{S} en le point de paramètre $-\frac{1}{3}$, c'est-à-dire en $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{4. a. } (1+t)^2 + (1+t)^2 + (1+at)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 1+2t+t^2+1+2t+t^2+1+2at+a^2t^2 &= 1 \end{aligned}$$

ce qui équivaut à $(a^2+2)t^2 + (2a+4)t + 2 = 0$.

b. $\Delta_a = 4a(4-a)$.

c. Si $a \in]0; 4[$: deux points d'intersection.

Si $a \in]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$: aucun point d'intersection.

Si $a \in \{0; 4\}$: un unique point d'intersection.

150 1. $MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2$ ce qui équivaut à : $(-1-x)^2 + (1-y)^2 + (5-z)^2 = 4[(5-x)^2 + (7-y)^2 + (-1-z)^2]$

et en développant, on obtient :

$$-3x^2 + 42x - 3y^2 + 54y - 3z^2 - 18z - 273 = 0,$$

soit en divisant les membres de cette égalité par -3 :

$$x^2 - 14x + y^2 - 18y + z^2 + 6z + 91 = 0.$$

$$2. x^2 - 14x = (x - 7)^2 - 49; y^2 - 18y = (y - 9)^2 - 81;$$

$$z^2 + 6z = (z + 3)^2 - 9.$$

$$x^2 - 14x + y^2 - 18y + z^2 + 6z + 91 = 0$$

$$\text{équivalant à } (x - 7)^2 + (y - 9)^2 + (z + 3)^2 = 48.$$

\mathcal{S} est la sphère de centre $\Omega(7; 9; -3)$ et de rayon $\sqrt{48}$.

3. $x = y = 0$ conduit à $(z + 3)^2 = -82$, donc pas de point d'intersection avec l'axe des cotes.

$x = z = 0$ conduit à $(y - 9)^2 = -10$, donc pas de point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

$y = z = 0$ conduit à $(x - 7)^2 = -42$, donc pas de point d'intersection avec l'axe des abscisses.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Optimisation d'une distance

L'objectif de ce TP est de déterminer la position d'un point M de l'espace sur un segment rendant minimale une longueur.

La première partie est consacrée à la construction de la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace et à des conjectures.

Dans une seconde partie, on démontre ces conjectures par des considérations géométriques et en étudiant les variations d'une fonction.

Fichier associé sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 08_TS_TP1.g3w (Geospace).

A. Construction et conjecture à l'aide d'un logiciel de géométrie

1. a. Pour créer un point, choisir le menu **Créer** **Point** **Point repéré** **Dans l'espace** puis renseigner la fenêtre et cliquer sur **OK**. Pour créer les autres points, on fait apparaître directement la fenêtre en cliquant sur l'icône **bis**.

Correctif : il se peut qu'il manque dans certains manuels en bas de page la précision **Dans l'espace**.

b. Pour tracer le tétraèdre, choisir le menu **Créer** **Solide** **Polyèdre convexe** **Défini par ses sommets** puis renseigner la fenêtre et cliquer sur **OK**.

c. Pour construire le point I, choisir le menu **Créer** **Point** **Milieu** puis renseigner la fenêtre et cliquer sur **OK**.

2. a. Pour construire le point M sur le segment [AC], choisir le menu **Créer** **Point** **Point libre** **Sur un segment** puis renseigner la fenêtre et cliquer sur **OK**.

b. Pour construire le plan \mathcal{P} , choisir le menu **Créer** **Plan** **Perpendiculaire à une droite** puis renseigner la fenêtre et cliquer sur **OK**.

c. Pour tracer la section du tétraèdre par le plan \mathcal{P} , choisir le menu **Créer** **Ligne** **Polygone convexe** **Section d'un polyèdre par un plan** puis renseigner la fenêtre et cliquer sur **OK**.

d. Pour construire le point N, choisir le menu **Créer** **Point**

Intersection droite-plan puis renseigner la fenêtre et cliquer sur **OK**.

e. Lorsque M est en A, le point N est en O. Lorsque M est en C, le point N est en B.

3. a. Pour afficher la longueur MN, choisir le menu **Créer** **Affichage** **Longueur d'un segment** puis renseigner la fenêtre et cliquer sur **OK**.

b. M est tel que AM est le tiers de AC. On conjecture que la valeur minimale de MN est 0,8165.

B. Démonstration

1. a. Le plan perpendiculaire à (AB) passant par I est (OCI).

Or (OB) et (OC) se coupent en O donc si M est en A, N est en O. La droite (CI) est perpendiculaire à (AB) donc (AB) est incluse dans le plan perpendiculaire à (CI) passant par I.

L'intersection de ce plan avec la droite (OB) est donc le point B. Par conséquent si M est en C, N est en B.

b. Si M est en A, MN = AO = 1.

Si M est en C, MN = CB = $\sqrt{2}$.

2. a. M \in [AC] donc il existe $t \in [0; 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AC}$.

b. M($1 - t$; 0; t).

3. a. $\overrightarrow{ON'} = t\overrightarrow{OB}$ donc N' \in (OB).

b. I($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0).

$$c. IM = \sqrt{2t^2 - t + \frac{1}{2}}.$$

$$d. IN' = \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{2}}.$$

e. $\overrightarrow{MN'}(t - 1; t; -t)$ donc $MN'^2 = (t - 1)^2 + t^2 + (-t)^2$ soit :
 $MN'^2 = 3t^2 - 2t + 1$.

f. $IM^2 + IN'^2 = 2t^2 - t + \frac{1}{2} + t^2 - t + \frac{1}{2} = 3t^2 - 2t + 1$ donc IMN' est rectangle en I d'après le théorème de Pythagore.

g. N et N' sont confondus.

4. a. $f'(t) = 6t - 2$.

b.

x	0	$\frac{1}{3}$	1
signe de f'	-		+
f	1	$\frac{2}{3}$	2

c. MN est minimale lorsque MN^2 est minimale donc pour $t = \frac{1}{3}$.

d. La valeur minimale de MN^2 est $\frac{2}{3}$ donc la valeur minimale de MN est $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

e. Oui puisque $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,8165$.

TP 2 Section plane d'un tétraèdre

L'objectif de ce TP est de construire, à l'aide d'un logiciel de géométrie plane, la section d'un tétraèdre par un plan déterminé par trois points situés chacun sur une des faces du tétraèdre. On envisage dans un premier temps le cas où le plan est parallèle à une des faces, puis dans le cas plus général on construit pas à pas l'intersection du plan avec chacune des faces du tétraèdre en apportant à chaque fois les justifications nécessaires. Dans une dernière partie, on utilise un logiciel de géométrie dans l'espace

pour observer les différentes sections possibles du tétraèdre par un plan.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 08_TS_TP2.ggb et 08_TS_correctionTP2.ggb (GeoGebra) ; 08_TS_TP2.g3w et 08_TS_correctionTP2.g3w (Geospace)

A. Le plan (IJK) est parallèle au plan (BCD)

1. (BC) est incluse dans le plan (BCD) qui est parallèle au plan (IJK) donc (BC) est parallèle au plan (IJK). D'autre part (BC) est incluse dans le plan (ABC) donc parallèle à ce plan. La droite d'intersection de (ABC) et (IJK) est donc parallèle à la droite (BC).


2. L'intersection de (IJK) et (ABC) est la droite parallèle à (BC) passant par I.

L'intersection de (IJK) et (ACD) est la droite parallèle à (CD) passant par J.



L'intersection de (IJK) et (ABD) est la droite parallèle à (BD) passant par K.

B. Les plans (IJK) et (BCD) sont sécants

1. Pour construire l'intersection de deux droites chacune définies par deux points :

- Construire les droites : cliquer sur l'icône 

Droite passant par deux points, puis cliquer sur chacun des points définissant la droite. Recommencer pour la deuxième droite.

- On construit ensuite le point d'intersection en cliquant sur la flèche en bas à droite de l'icône  Nouveau point puis en sélectionnant  Intersection entre deux objets dans le menu déroulant. On clique ensuite sur chacune des droites.

- Pour renommer le point créé, on positionne le pointeur sur le point, on clique droit et dans le menu qui apparaît on choisit Renommer.

2. Si deux des trois droites étaient parallèles à (BCD), (IJK) contiendrait deux droites sécantes, chacune parallèle au plan (BCD), (IJK) serait donc parallèle au plan (BCD).

3. a. Les droites (IK) et (D'C') sont incluses dans le plan (AIK). (D'C') est la droite d'intersection de (AIK) et (BCD), le point d'intersection de (IK) et (BCD) appartient donc à (D'C').

b. On construit le point B' intersection de (AJ) et (CD). V est le point d'intersection des droites (IJ) et (B'D').

c. (d₁) est la droite (UV).

4. a. Ces droites sont coplanaires, si (d₁) était parallèle à deux des trois droites, ces deux droites seraient parallèles entre elles, ce qui est impossible car BCD est un triangle.

b. (d₂) est la droite (IM) et (d₃) est la droite (JN).

c. Si on avait (d₂) parallèle à (AB) et (d₃) parallèle à (AD), le plan (IJK) contiendrait deux droites sécantes, toutes les deux parallèles au plan (ABD). (IJK) et (ABD) seraient donc parallèles ce qui est impossible car ces plans ont un point commun sans être confondus.

d. (d₄) est la droite (RK).

5. a. (d₄), (AD) et (BD) sont coplanaires dans le plan (ABD) et (AD) et (BD) sont sécantes.


b. S appartient à (d₄) et (d₄) est incluse dans le plan (IJK), donc S appartient au plan (IJK).

S appartient à (AD) et (AD) est incluse dans le plan (ACD), donc


S appartient au plan (ACD). On déduit donc que S appartient à (d₃). Comme par ailleurs N appartient à (d₃), (SN) est la droite (d₃).

6. Il s'agit du quadrilatère RSNM.


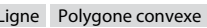
C. Observations des différentes sections

1. Pour créer le plan (IJK), choisir le menu  Plan

Nommé défini par trois points puis renseigner la fenêtre.

Correctif : il se peut qu'il soit indiqué par erreur dans certains manuels en bas de page le menu  Plan

Nommé défini par les plans.

2. Pour créer la section du tétraèdre T par le plan (IJK), choisir le menu  Ligne 

Section d'un polyèdre par un plan.

3. Pour déplacer un point, placer le pointeur sur ce point, cliquer gauche, une main apparaît à la place du pointeur, déplacer alors la souris tout en maintenant le bouton appuyé.

CAP VERS LE BAC

Sujet A

1. a. $\vec{IA} = \frac{1}{2}\vec{EA}$, $\vec{LC} = \frac{1}{2}\vec{GC}$ et $\vec{EA} = \vec{GC}$, donc $\vec{IA} = \vec{LC}$ donc ACLI est un parallélogramme.

b. (LI) et (AC) sont parallèles d'après la question 1. a. Dans le triangle ABC, J est le milieu de [AB] et K est le milieu de [BC], donc (JK) est parallèle à (AC). Par conséquent (LI) est parallèle à (JK).

c. Les points I, J, K et L sont coplanaires car (JK) et (LI) sont parallèles. (IJ) et (KL) ne sont pas parallèles car (IJ) est parallèle à (EB) et (LK) est parallèle à (BC), or (EB) et (BC) sont sécantes.

d. (IJ) \subset (ABF), donc M \in (ABF).

(LK) \subset (BCF), donc M \in (BCF).

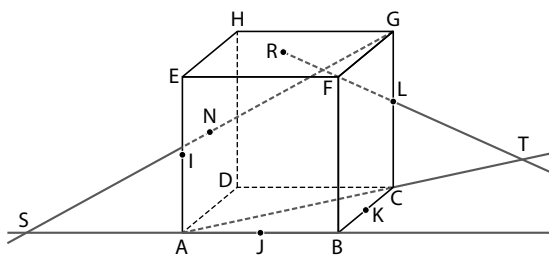
M appartient à l'intersection de (ABF) et (BCF), c'est-à-dire à (BF).

2. (ACH) et (BEG) sont parallèles.

3. N \in (ABG), (GN) et (AB) sont sécantes dans le plan (ABG).

Or (AB) est incluse dans (ABC), donc le point d'intersection S de (GN) et (AB) est le point d'intersection de (GN) et (ABC).

4. (RL) et (AC) sont sécantes dans le plan (ACG) et leur point d'intersection est celui de (RL) et (ABC).



Sujet B

1. a. I(1 ; 1 ; -1), J($\frac{5}{2}$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$) et K(-3 ; -3 ; 3).

b. $\vec{IJ}\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ et $\vec{IK}(2; -4; 4)$. \vec{IJ} et \vec{IK} ne sont pas colinéaires, donc les points I, J et K définissent un plan.

2. Soit $\vec{u} = 2\vec{IJ}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{IK}$. Le plan (IJK) est dirigé par le couple constitué des vecteurs \vec{u} et \vec{v} . La droite (AD) est dirigée par le vecteur $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{AD}$. On a $\vec{u}(3; -1; -3)$, $\vec{v}(1; -2; 2)$ et $\vec{w}(3; -1; 1)$ et l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ équivaut à :

$$\begin{cases} 3a + b + 3c = 0 \\ -a - 2b - c = 0 \\ -3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 3c \\ 5a + 2c = 0 \\ -9a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 3c \\ 5a + 2c = 0 \\ c = -9a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 3c \\ -13a = 0 \\ c = -9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

\vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont donc non coplanaires donc (AD) et (IJK) sont sécants.

3. *Correctif : il se peut qu'il soit indiqué dans certains manuels que $\vec{AL} = -\frac{1}{2}\vec{IJ} + \vec{IK}$, il faut lire $\vec{IL} = -\vec{IJ} + \frac{1}{2}\vec{IK}$.*

$L\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$. L appartient à (IJK) par définition de L.

$\vec{AL}\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ donc $\vec{AD} = 4\vec{AL}$ et L appartient à (AD).

Sujet C

1. $I\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ et $K\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

2. $\vec{AK}\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $\vec{AG}(1; 1; 1)$. \vec{AK} et \vec{AG} ne sont pas colinéaires. Donc A, K et G ne sont pas alignés.

3. a. $AI = AJ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $GI = GJ = \frac{\sqrt{6}}{2}$ et K est le milieu de [IJ]. Donc (AKG) est le plan médiateur de [IJ].

b. $ID = JD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc D appartient au plan médiateur de [IJ].

4. A, K, D et G sont coplanaires et \vec{AD} et \vec{AG} ne sont pas colinéaires, il existe donc a et b tels que $\vec{AK} = a\vec{AD} + b\vec{AG}$.

On obtient $a = b = \frac{1}{4}$.

Sujet D

1. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. $\vec{u}(-1; 2; 1)$ est un vecteur directeur de Δ' ; $\vec{AB}(2; -3; -1)$ est un vecteur directeur de Δ . \vec{u} et \vec{AB} ne sont pas colinéaires, donc Δ et Δ' ne sont pas parallèles.

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - k \\ -2 - 3t = 1 + 2k \\ -1 - t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 3 + t \\ -2 - 3t = -1 - 2t \\ k = -1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \\ k = -1 - t \end{cases}$$

donc ce système n'a pas de solution, Δ et Δ' ne sont pas sécants.

Δ et Δ' sont donc non coplanaires.

3. a. $\vec{CD}(2; 7; -3)$ et $\vec{CE}(-1; 9; -1)$. \vec{CD} et \vec{CE} ne sont pas colinéaires, donc les points C, D et E définissent un plan.

b. $\vec{AB} = a\vec{CD} + b\vec{CE}$ équivaut à $\begin{cases} 2 = 2a - b \\ -3 = 7a + 9b \\ -1 = -3a - b \end{cases}$ qui conduit à :

$$\begin{cases} b = -\frac{4}{5} \\ a = \frac{3}{5} \\ a = \frac{3}{5} \end{cases} \text{ donc } \vec{AB} = \frac{3}{5}\vec{CD} - \frac{4}{5}\vec{CE}.$$

Les vecteurs \vec{AB} , \vec{CD} et \vec{CE} sont donc coplanaires.

c. Δ est parallèle au plan \mathcal{P} .

Sujet E

1. a. $\vec{u}_1(1; 3; 0)$ et $\vec{u}_2(2; 1; -1)$.

b. \vec{u}_1 et \vec{u}_2 ne sont pas colinéaires, donc les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

$\begin{cases} 3a = 0,5 + 2b \\ 9 + 3a = 4 + b \\ 2 = 4 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,5 \\ a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$ donc (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes. (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

2. a. $A_1(3; 9; 2)$ appartient à (d_1) et $A_1\vec{S}(0; 5; 1,9)$.

On pose $\vec{v}_1 = A_1\vec{S}$. Le plan \mathcal{P}_1 est dirigé par les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{v}_1 et l'égalité $a\vec{u}_1 + b\vec{v}_1 + c\vec{u}_2 = \vec{0}$ équivaut à :

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ 3a + 5b + c = 0 \\ 1,9b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs \vec{u}_1 , \vec{v}_1 et \vec{u}_2 ne sont pas coplanaires, donc la droite (d_2) est sécante au plan \mathcal{P}_1 .

b. $A_2(0,5; 4; 4)$ est un point de (d_2) et $A_2\vec{S}(2,5; 0; -3,9)$.

On pose $\vec{v}_2 = A_2\vec{S}$. Le plan \mathcal{P}_2 est dirigé par les vecteurs \vec{u}_2 et \vec{v}_2 et l'égalité $a\vec{u}_2 + b\vec{v}_2 + c\vec{u}_1 = \vec{0}$ équivaut à :

$$\begin{cases} 2a + 2,5b + c = 0 \\ a + 3c = 0 \\ -a - 3,9b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs \vec{u}_2 , \vec{v}_2 et \vec{u}_1 ne sont pas coplanaires donc (d_1) est sécante au plan \mathcal{P}_2 .

c. (R) doit être la droite d'intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .

Sujet F

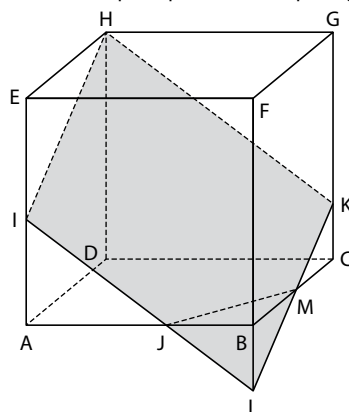
1. Affirmation C.

2. Affirmation B.

3. Affirmation C.

4. Affirmation A.

151 La section du cube par le plan (IJK) est le pentagone HIJMK.



$$152 \quad 1. \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 1 + 4t \text{ avec } t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - t \end{cases}$$

2. C(-39 ; 33 ; -5).

153 (IJ) et (KD) sont perpendiculaires. La droite (HD) est perpendiculaire au plan (EFG) et la droite (IJ) est incluse dans le plan (EFG), donc (HD) est orthogonale à (IJ). La droite (IJ) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (DHK), donc (IJ) est perpendiculaire à ce plan.

154 $\vec{AB}(-5 ; -1 ; 2)$ et $\vec{AC}(4 ; -1 ; -3)$.

L'égalité $a\vec{AB} + b\vec{AC} + c\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à
$$\begin{cases} -5a + 4b + 6c = 0 \\ -a - b + 3c = 0 \\ 2a - 3b + c = 0 \end{cases} \text{ soit}$$

$$\begin{cases} -b + 21c = 0 \\ a = b - 3c \\ -b - 5c = 0 \end{cases} \text{ et à } \begin{cases} b = 21c \\ a = b - 3c \\ b = -5c \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Les vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{u} ne sont pas coplanaires donc (d) est sécante au plan (ABC). Le point d'intersection est E.

POUR ALLER PLUS LOIN

155 1. δ est la droite (OM).

2. δ est incluse dans le plan déterminé par O et (d).

156 1. (BJ) est parallèle à (HI) et (HI) est incluse dans le plan (ACH), donc (BJ) est parallèle à (ACH).

2. D n'appartient pas à (ACH) donc (DJ) n'est pas incluse dans le plan (ACH). Les droites (DJ) et (HI) sont sécantes dans le plan (DBF) en un point Ω et Ω est l'intersection de (DJ) et (ACH).

157 1. a. Si A, B et C étaient alignés, les droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 seraient coplanaires dans le plan (OAB).

b. Ces droites sont coplanaires dans le plan déterminé par les droites sécantes Δ_2 et Δ_3 .

2. (BC) est incluse dans le plan \mathcal{P} donc (BC) est parallèle à \mathcal{P} . Si (BC) est parallèle à (B'C') alors (BC) est parallèle à \mathcal{P} puisque (B'C') est incluse dans le plan \mathcal{P}' . Avec le théorème du toit, on déduit que la droite d'intersection Δ de \mathcal{P} et \mathcal{P}' est parallèle à (BC).

3. Notons R le point d'intersection de (BC) et (B'C'). Comme (BC) est incluse dans le plan \mathcal{P} , R est un point de \mathcal{P} . Comme (B'C') est incluse dans le plan \mathcal{P}' , R est un point de \mathcal{P}' . R appartient donc aux deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' donc à leur droite d'intersection Δ .

4. Les plans (OAB) et \mathcal{P}' sont sécants selon la droite (A'B'). $I \in \Delta$ donc $I \in \mathcal{P}'$; $I \in (AB)$ donc $I \in (OAB)$. I appartient donc à la droite d'intersection de \mathcal{P}' et (OAB), soit (A'B').

On fait le même raisonnement pour J et K.

158 1. Dans le triangle AHF, L est le milieu de [AH] et M est le milieu de [AF] donc d'après le théorème des milieux $LM = \frac{1}{2}HF$.

2. On démontre de la même façon que chacune des arêtes de l'octaèdre a pour longueur la moitié de la diagonale d'une face du cube.

3. Les points J, K, L et M sont coplanaires car les droites (LM) et (KJ) sont parallèles puisque toutes les deux parallèles à la droite (HF). Le quadrilatère JKLM est un losange car ses côtés sont

de même longueur. Les diagonales [LJ] et [MK] sont de même longueur, donc le losange JKLM est un carré. On démontre de la même façon que IKNM et IJNL sont des carrés.

4. (MK) et (LJ) sont les diagonales du losange JKLM donc ces droites sont perpendiculaires. Les segments [MK] et [LJ] se coupent en leurs milieux.

D'autre part HLBJ est un parallélogramme, donc le milieu O de [HB] est aussi celui de [LJ]. On raisonne de la même façon pour les autres droites.

159 1. a. (EC) est incluse dans le plan (EGC) qui est perpendiculaire à (HF) donc (EC) est orthogonale à (HF).

b. (AF) est perpendiculaire au plan (EBC) et (EC) est incluse dans ce plan donc (EC) est orthogonale à (AF).

c. (EC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AFH), donc (EC) est perpendiculaire à ce plan.

2. a. (EBC) est le plan médiateur de [AF] et (EC) est incluse dans le plan (EBC), donc I appartient au plan médiateur de [AF]. I est donc équidistant de A et F. Comme H est également équidistant de A et F, dans le plan (AFH), (HI) est la médiatrice de [AF].

b. I est le centre de gravité du triangle équilatéral AFH.

3. Le tétraèdre est de type 2.

160 Partie A

1. a. (h_A) et (h_B) sont sécantes donc définissent un plan \mathcal{P} .

(h_A) est perpendiculaire au plan (BCD) donc orthogonale à la droite (CD).

De même (h_B) est orthogonale à (CD) et on déduit que (CD) est perpendiculaire au plan \mathcal{P} .

b. (AB) est incluse dans le plan \mathcal{P} et (CD) est perpendiculaire à ce plan donc (AB) et (CD) sont orthogonales.

2. a. *Correctif : il se peut qu'il soit indiqué dans certains manuels « Montrer que les hauteurs issues de A et E... », il faut lire « Montrer que les hauteurs issues de A et B... ».*

(CD) est perpendiculaire à (ABE) car orthogonale aux droites (AB) et (BE) donc (CD) est orthogonale à (AH).

Comme de plus (AH) est perpendiculaire à (BE), on déduit que (AH) est perpendiculaire à (BCD), donc (AH) est la hauteur (h_A). On procède de même pour la hauteur (h_B).

b. (h_A) et (h_B) sont sécantes puisque ce sont deux hauteurs du triangle ABF.

Partie B

1. a. H est l'orthocentre du triangle ABE, donc (AB) est perpendiculaire à (HE). Comme (AB) est aussi orthogonale à (CD), on déduit que (AB) est perpendiculaire à (CDH).

b. (CH) et (DH) sont deux droites du plan (CDH).

2. a. (BH), c'est-à-dire (h_B), est perpendiculaire à (ADC) donc à (AD). (BC) est orthogonale à (AD) donc (AD) est perpendiculaire à (BHC) donc orthogonale à (CH). La droite (CH) est donc orthogonale à deux droites sécantes de (ABD) ce qui prouve que (CH) est perpendiculaire à ce plan. On procède de même pour la droite (DH) et le plan (ABC).

b. D'après ce qui précède, (CH) est la hauteur issue de C et (DH), la hauteur issue de D du tétraèdre. Les hauteurs du tétraèdre sont concourantes en H.

3. Les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes si, et seulement si, les arêtes opposées sont deux à deux orthogonales.

161 1. a. (AA') est incluse dans les plans médiateur de $[BD]$ et $[BC]$.

b. (AA') est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCD) , donc (AA') est perpendiculaire au plan (BCD) .

2. a. $\vec{A'C} + \vec{A'D} = 2\vec{A'I}$ car I est le milieu de $[CD]$ donc $\vec{CA'} + \vec{DA'} = 2\vec{IA'}$ et $\vec{u} = \vec{BA'} + 2\vec{IA'}$. B, I et A' sont alignés, donc \vec{u} est colinéaire à \vec{BI} .

b. On obtient de la même façon $\vec{u} = \vec{DA'} + 2\vec{JA'}$ et on conclut comme précédemment.

c. \vec{BI} et \vec{DJ} ne sont pas colinéaires, le seul vecteur colinéaire à ces deux vecteurs est donc le vecteur nul.

$$\begin{aligned} \vec{d. AB} + \vec{AC} + \vec{AD} &= \vec{AA'} + \vec{A'B} + \vec{AA'} + \vec{A'C} + \vec{AA'} + \vec{A'D} \\ &= 3\vec{AA'} - \vec{u} = 3\vec{AA'}. \end{aligned}$$

On obtient alors $\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AA'}$, donc G appartient à (AA') .

On démontre de la même façon que G appartient aux autres médianes du tétraèdre, donc les médianes de ce tétraèdre sont concourantes en G .

162 1. Faux. **2.** Vrai. **3.** Faux.

4. Faux. **5.** Faux. **6.** Faux.

7. Faux. **8.** Vrai. **9.** Faux.

163 1. a. $C(1; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $I(1; \frac{1}{2}; 0)$ et $J(\frac{1}{2}; 1; 0)$.

b. $M \in [CE]$ donc il existe $t \in [0; 1]$ tel que $\vec{CM} = t\vec{CE}$.

c. Soit $M(x_M; y_M; z_M)$, on a $\vec{CM}(x_M - 1; y_M - 1; z_M)$ et $\vec{CE}(-1; -1; 1)$.

$$\text{On déduit alors que } \begin{cases} x_M - 1 = -t \\ y_M - 1 = -t \\ z_M = t \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_M = 1 - t \\ y_M = 1 - t \\ z_M = t \end{cases}.$$

2. a. $CI = CJ = \frac{1}{2}$ et $EI = EJ = \frac{3}{2}$ donc C et E appartiennent au plan médiateur de $[IJ]$.

b. $M \in (CE)$, donc M appartient au plan médiateur de $[IJ]$ et MJ est isocèle en M .

$$\text{c. } IM^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

3. a. $\theta \in [0; \pi]$ donc $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et la fonction sinus est croissante sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$, par conséquent $\sin \frac{\theta}{2}$ est maximal lorsque $\frac{\theta}{2}$ est maximal donc lorsque θ est maximal.

b. Si K est le milieu de $[IJ]$, $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{IK}{IM}$ et $IK = \frac{\sqrt{2}}{4}$ donc $\sin \frac{\theta}{2}$ est maximal lorsque IM est minimale puisque la fonction $x \mapsto \frac{IK}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$.

$$\text{c. } f'(x) = 6t - 1.$$

x	0	$\frac{1}{6}$	1
signe de f'		-	+
f	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{9}{4}$

d. IM^2 est minimal pour l'unique valeur de $t_0 = \frac{1}{6}$ de t donc \widehat{IM} est maximal pour l'unique position M_0 de M correspondant à la valeur $t = \frac{1}{6}$. On a $M_0(\frac{5}{6}; \frac{5}{6}; \frac{1}{6})$.

e. $IC^2 = \frac{1}{4}$, $IM_0^2 = \frac{1}{6}$ et $M_0C^2 = \frac{1}{12}$. On a $IM_0^2 + M_0C^2 = IC^2$ donc, d'après le théorème de Pythagore, IM_0C est rectangle en M_0 .

164 1. a. $4\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$

$$\text{soit } 4\vec{AG} = \vec{AG} + \vec{GB} + \vec{AG} + \vec{GC} + \vec{AG} + \vec{GD}$$

$$\text{soit } \vec{AG} = \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} \text{ et } \vec{0} = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}.$$

b. Comme I est le milieu de $[AB]$, $\vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{GI}$.

De même $\vec{GC} + \vec{GD} = 2\vec{GJ}$, donc $2\vec{GI} + 2\vec{GJ} = \vec{0}$ et $\vec{GI} = -\vec{GJ}$, donc G appartient à (IJ) . On fait le même raisonnement pour prouver que G appartient aux droites (KL) et (MN) .

2. a. $IL = \frac{1}{2}\vec{BD}$ et $KJ = \frac{1}{2}\vec{BD}$ donc $IL = KJ$ et $IKJL$ est un parallélogramme.

De plus, $IL = \frac{1}{2}\vec{BD}$ et $IK = \frac{1}{2}\vec{AC}$; or $BD = AC$ donc $IL = IK$ et $IKJL$ est un losange. On démontre de la même façon que $IMJN$ et $KNLM$ sont des losanges.

b. (IJ) et (KL) sont les diagonales du losange $IKJL$ donc ces droites sont perpendiculaires.

De même (IJ) et (MN) sont les diagonales du losange $IMJN$ et (KL) et (MN) sont les diagonales du losange $KNLM$.

3. a. (IJ) est orthogonale à (KL) et (MN) , deux droites sécantes du plan (MKN) , donc (IJ) est perpendiculaire à ce plan.

b. (AB) et (MK) sont parallèles. (IJ) est perpendiculaire au plan (MNK) donc orthogonale à la droite (MK) et (IJ) est orthogonale à (AB) .

c. (CD) et (KN) sont parallèles. (KN) est incluse dans le plan (MNK) donc (IJ) est orthogonale à (KN) donc à (CD) .

d. (IJ) est incluse dans le plan médiateur de $[AB]$ car (IJ) est orthogonale à (AB) et I est le milieu de $[AB]$. Comme G appartient à (IJ) , on déduit que G appartient au plan médiateur de $[AB]$. De la même façon, on démontre que G appartient au plan médiateur de $[CD]$.

e. Avec ce qui précède, on déduit que $GA = GB$ et $GC = GD$.

En procédant de la même façon, on démontre que G appartient au plan médiateur de $[AC]$ donc $GA = GC$ et on a alors $GA = GB = GC = GD$ ce qui prouve que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Prises d'initiatives

165 1. $\vec{AB} + \vec{DC} = \vec{AL} + \vec{LK} + \vec{KB} + \vec{DL} + \vec{LK} + \vec{KC} = 2\vec{LK}$ car :
 $\vec{AL} + \vec{DL} = \vec{0}$ et $\vec{KB} + \vec{KC} = \vec{0}$.

2. $P \in [LK]$, donc il existe un réel t tel que $\vec{KP} = t\vec{KL}$.

Existence : On définit les points M et N par :
 $\vec{BM} = t\vec{BA}$ et $\vec{CN} = t\vec{CD}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \vec{PM} + \vec{PN} &= \vec{PK} + \vec{KB} + \vec{BM} + \vec{PK} + \vec{KC} + \vec{CN} \\ &= 2\vec{PK} + t\vec{BA} + t\vec{CD} = 2\vec{PK} + 2t\vec{KL} \\ &= -2t\vec{KL} + 2t\vec{KL} = \vec{0}. \end{aligned}$$

P est donc le milieu de $[MN]$.

Unicité : Soit M un point de $[AB]$, il existe $x \in [0; 1]$ tel que :
 $\vec{BM} = x\vec{BA}$.

Soit N un point de [CD], il existe $y \in [0; 1]$ tel que :

$$\overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CD}.$$

Comme précédemment, on obtient :

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = 2t\overrightarrow{LK} + x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{CD} = (x-t)\overrightarrow{BA} + (y-t)\overrightarrow{CD}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{CD} n'étant pas colinéaires, $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \vec{0}$ implique que $x-t=0$ et $y-t=0$ soit $x=t$ et $y=t$.

166 (AB) est parallèle à (CD) donc au plan (DCF). Les points E, D, F et B sont coplanaires puisque ces points se situent dans le plan médiateur de [AC]. De plus $ED = EB = BF = DE$ donc DEBF est un losange.

En particulier, (EB) est parallèle à (DF) donc au plan (DCF). Le plan (ABE) contient deux droites sécantes chacune parallèle au plan (DCF), donc ces plans sont parallèles.

Soit I et J les milieux respectifs de [AB] et [DC]. Les points E, I, J et F sont coplanaires dans le plan médiateur de [AB].

De plus $EI = IF = EJ = JF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, par conséquent EIFJ est un losange. Notons H le projeté de I sur (JF), la distance des deux plans (ABE) et (CDF) est la longueur IH. En exprimant de deux façons l'aire du losange, on obtient $HI \times JF = \frac{EF \times IJ}{2}$ d'où :

$$HI = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Produit scalaire dans l'espace

A Le programme

Dans cette partie, il s'agit, d'une part de renforcer la vision dans l'espace entretenue en classe de Première, d'autre part de faire percevoir toute l'importance de la notion de direction de droite ou de plan.

[...] Le repérage permet à la fois de placer des objets dans l'espace et de se donner un moyen de traiter des problèmes d'intersection d'un point de vue algébrique.

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier des problèmes d'intersection de droites et de plans, en choisissant un cadre adapté, vectoriel ou non, repéré ou non.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Produit scalaire Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace : définition, propriétés. Vecteur normal à un plan. Équation cartésienne d'un plan.	<ul style="list-style-type: none"> • Déterminer si un vecteur est normal à un plan. ▣ Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls. • Déterminer une équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal. • Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne. ▣ Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. • Choisir la forme la plus adaptée entre équation cartésienne et représentation paramétrique pour : <ul style="list-style-type: none"> – déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan ; – étudier la position relative de deux plans. 	<p>On étend aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan.</p> <p>On caractérise vectoriellement l'orthogonalité de deux droites et on introduit la notion de plans perpendiculaires.</p> <p>Ⓐ <i>Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.</i> <i>Intersection de trois plans.</i></p>

B Notre point de vue

Dans ce deuxième chapitre de géométrie dans l'espace, nous abordons la notion de produit scalaire de deux vecteurs. Cet outil déjà rencontré en classe de Première dans le plan, nous permet entre autre d'étudier vectoriellement les notions d'orthogonalité. Ainsi après avoir défini la notion de vecteur normal à un plan et conformément au programme, nous caractérisons les points d'un plan par une équation cartésienne de celui-ci. Nous étudions les positions relatives de plans et de droites, et notamment l'intersection d'une droite et d'un plan lorsque ceux-ci sont sécants. L'utilisation conjointe d'une représentation paramétrique d'une droite et d'une équation cartésienne du plan permettant de déterminer les coordonnées du point d'intersection. Pour introduire ces différentes notions, nous proposons quatre activités. La première permet d'étendre naturellement le produit scalaire de deux vecteurs à l'espace, en partant d'une configuration connue des élèves. Dans la seconde activité, nous faisons découvrir les équations cartésiennes d'un plan en recherchant la nature d'un ensemble défini par une condition portant sur les coordonnées. L'activité trois est consacrée aux positions relatives de plans, avec une utilisation d'un logiciel de géométrie dans l'espace qui aidera les élèves à faire les conjectures sur les relations entre le parallélisme de deux plans et des équations de ces plans. Enfin la dernière activité permet d'introduire la notion de plans perpendiculaires.

La notion d'équation de plan est essentielle et l'un des thèmes de l'accompagnement personnalisé y est consacré, l'autre s'attache à reprendre pas à pas l'obtention d'une représentation paramétrique d'une droite d'intersection de deux plans sécants. Concernant l'approfondissement, nous avons fait le choix de proposer de déterminer la perpendiculaire commune de deux droites non coplanaires.

Les notions abordées dans le chapitre 9

1. Produit scalaire dans l'espace
2. Applications du produit scalaire
3. Intersection de droites et de plans

C Avant de commencer

Voir livre pages 426 et 427 et le site www.bordas-index.fr pour les corrections détaillées.

D Activités

Activité 1 Approche du produit scalaire dans l'espace

L'objectif de cette activité est d'introduire la notion de produit scalaire pour des vecteurs de l'espace. Nous partons d'un solide que les élèves ont étudié dans les classes antérieures, et par des égalités vectorielles successives, on se ramène à des calculs de produits scalaires dans un plan et on conjecture à partir d'un cas particulier que la propriété de linéarité reste valable dans l'espace.

1. $\vec{AD} \cdot \vec{AH} = a^2$.
2. **a.** $\vec{CF} = \vec{DE}$ et $\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE} = -\vec{AD} + \vec{AE}$.
b. $\vec{AH} \cdot \vec{DE} = 0$ car $[\vec{AH}]$ et $[\vec{DE}]$ sont les diagonales du carré ADHE, on déduit que $\vec{AH} \cdot \vec{CF} = 0$.
3. $\vec{AD} \cdot \vec{DC} = 0$ et $\vec{AD} \cdot \vec{HG} = 0$.
4. **a.** La droite (AD) est perpendiculaire au plan (DHG) et (GD) est incluse dans ce plan.
b. $\vec{AD} \cdot \vec{AG} = \vec{AD} \cdot (\vec{AD} + \vec{DG}) = \vec{AD}^2 = a^2$ or $\vec{AD} \cdot \vec{AH} = a^2$ et $\vec{AD} \cdot \vec{HG} = 0$.

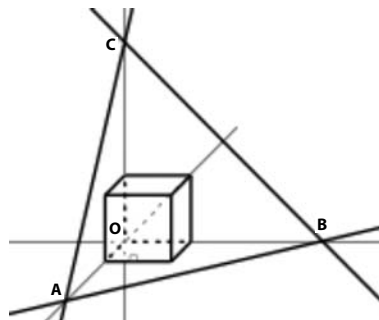
Activité 2 Équations cartésiennes d'un plan

Dans cette activité, nous introduisons la notion d'équation d'un plan de l'espace. Pour cela nous considérons un ensemble de point de l'espace dont les coordonnées vérifient une condition simple puis par des considérations géométriques et en utilisant le produit scalaire, nous démontrons que l'ensemble cherché est un plan.

Fichier associé sur le site www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 09_TS_activite2.g3w (Geospace).

1. **a.** Le point de coordonnées (1 ; 1 ; 1) est un sommet du cube qui appartient à l'ensemble \mathcal{F} .

- b.** Le point de coordonnées (3 ; 0 ; 0) est sur l'axe des abscisses et appartient à l'ensemble \mathcal{F} .
- c.** Il s'agit de la droite (AB) avec A (3 ; 0 ; 0) et B (0 ; 3 ; 0).
- d.** Soit C (0 ; 0 ; 3). L'intersection de \mathcal{F} avec le plan (yOz) est la droite (BC). L'intersection de \mathcal{F} avec le plan (xOz) est la droite (AC).



- 2. a.** $I \in \mathcal{F}$ car $(-2) + 4 + 1 = 3$ et $J \notin \mathcal{F}$ car $0 + 1 + 1 = 2$.
b. $c = 1$.
- 3. a.** $z = 3 - x - y$.
b. On conjecture que \mathcal{F} est un plan.
- 4. a.** T (3 ; 0 ; 0), U (0 ; 3 ; 0) et V (0 ; 0 ; 3). $\vec{OF} (1 ; 1 ; 1)$ et $\vec{TU} (-3 ; 3 ; 0)$ donc $\vec{OF} \cdot \vec{TU} = 0$, ce qui prouve que les vecteurs \vec{OF} et \vec{TU} sont orthogonaux.
b. $\vec{TV} (-3 ; 0 ; 3)$ et $\vec{OF} \cdot \vec{TV} = 0$. Le vecteur \vec{OF} est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (TUV) donc \vec{OF} est un vecteur normal au plan (TUV), la droite (OF) est donc orthogonale au plan (TUV).
c. Soit M (x_M ; y_M ; z_M) un point de (TUV), $\vec{UM} (x_M ; y_M - 3 ; z_M)$ et $\vec{UM} \cdot \vec{OF} = 0$ donc $x_M + (y_M - 3) + z_M = 0$ et $x_M + y_M + z_M = 3$.
d. Soit M (x_M ; y_M ; $3 - x_M - y_M$) un point de \mathcal{F} .
 $\vec{FM} (x_M - 1 ; y_M - 1 ; 2 - x_M - y_M)$
donc $\vec{FM} \cdot \vec{OF} = (x_M - 1) \times 1 + (y_M - 1) \times 1 + (2 - x_M - y_M) \times 1 = 0$.

Par conséquent \overrightarrow{FM} et \overrightarrow{OF} sont orthogonaux. On déduit que M appartient au plan passant par F et perpendiculaire à la droite (OF), c'est-à-dire au plan (TUV) puisque F appartient à ce plan, les vecteurs \overrightarrow{TF} , \overrightarrow{TU} et \overrightarrow{TV} étant coplanaires puisque :

$$\overrightarrow{TU} + \overrightarrow{TV} - 3\overrightarrow{TF} = \vec{0}.$$

e. L'ensemble \mathcal{S} est le plan (TUV).

Activité 3 Intersection de deux plans

Dans cette activité, l'utilisation du logiciel Geospace permet de conjecturer la traduction analytique de la position relative de deux plans. Dans une première question, on observe que la direction d'un plan n'est pas changée lors de la modification du terme constant de l'équation, et dans la deuxième question, on fait varier la valeur du coefficient de la variable x de l'équation, pour conjecturer la nature de l'ensemble caractérisé par un système linéaire.

Fichier associé sur le site www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 09_TS_activite3.g3w (Geospace).

1. Pour faire varier la valeur du paramètre d , choisir le menu **Piloter** **Piloter au clavier** puis choisir le paramètre d et cliquer sur **OK**. On fait ensuite varier la valeur de d en utilisant les touches directionnelles du clavier.

a. On conjecture que \mathcal{P} et \mathcal{P}_1 sont parallèles quelle que soit la valeur de d .

b. Pour $d = 2$, les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}_1 sont confondus.

c. $\vec{n}(2; -2; -7)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} , $\vec{n}_1(4; -4; -14)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_1 . Les vecteurs \vec{n} et \vec{n}_1 sont colinéaires puisque $\vec{n}_1 = 2\vec{n}$.

d. Les droites Δ et Δ_1 sont parallèles donc Δ est perpendiculaire au plan \mathcal{P}_1 et \mathcal{P} et \mathcal{P}_1 sont des plans parallèles.

2. Pour faire varier la valeur du paramètre a , choisir le menu **Piloter** **Piloter au clavier** puis choisir le paramètre a et cliquer sur **OK**. On fait ensuite varier la valeur de a en utilisant les touches directionnelles du clavier.

a. Pour $a = -6$ les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}_2 sont parallèles. Il n'existe pas de valeur de a pour laquelle \mathcal{P} et \mathcal{P}_2 sont confondus.

b. \mathcal{P} et \mathcal{P}_2 sont sécants. L'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient le système est une droite : la droite d'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}_2 .

Activité 4 Plans perpendiculaires

L'objectif de cette activité est de faire découvrir la notion de plans perpendiculaires. À partir de l'étude d'exemples, on observe que lorsqu'un plan contient une droite perpendiculaire à un deuxième plan, le premier contient également des droites non perpendiculaires au second, et qu'il existe des couples de plans pour lesquels aucune droite du premier n'est perpendiculaire au second. On termine cette activité en donnant la définition de plans perpendiculaires.

1. La droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABC) car orthogonale aux droites (AB) et (AD) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC). Par conséquent, \overrightarrow{AE} est un vecteur normal au plan (ABC).

2. a. $A \in (ABE)$ et $E \in (ABE)$ donc (AE) est incluse dans le plan (ABE).

b. (EB) et (AF) sont deux droites du plan (ABE) qui sont perpendiculaires au plan (ABC).

c. Oui, par exemple la droite (BF). Ces droites sont parallèles entre elles.

3. La droite (DH) est incluse dans le plan (ADE) et elle est perpendiculaire au plan (ABC).

La droite (CG) est incluse dans le plan (ACE) et elle est perpendiculaire au plan (ABC).

4. a. $E \in (EBG)$ et $A \notin (EBG)$ donc la droite (AE) est sécante au plan (EBG).

b. On a alors (d) et (AE) parallèles.

c. Si (EBG) contenait une droite (d) perpendiculaire au plan (ABC), celle-ci serait parallèle à la droite (AE) qui est sécante à (EBG). Cela conduit à une absurdité, donc (EBG) ne contient pas de droite perpendiculaire au plan (ABC).

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 15.$

2 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -14.$

3 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -14\sqrt{2}.$

4 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -5.$

5 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$

6 a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = a^2.$

b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG} = 0.$

c. $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CA} = -2a^2.$

d. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = a^2.$

7 a. $\vec{u} \cdot (2\vec{v}) = 10.$

b. $\vec{u} \cdot (2\vec{v} + 5\vec{w}) = 0.$

c. $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = 3.$

d. $\vec{v} \cdot \vec{u} = 5.$

e. $9\vec{u} \cdot \vec{v} = -18.$

f. $(3\vec{v} - 2\vec{w}) \cdot (5\vec{u}) = 95.$

8 Voir livre page 427.

9 a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$

b. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 46.$

c. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6.$

10 $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-4) \times 3 + 6 \times (-7) + 9 \times 6 = 0$ donc \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

11 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 6 + 4 \times (-9) + 5 \times 6 = 0$ donc \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

- 12** $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 0 = 0$ donc \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.
- 13** a. $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$. b. $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$. c. $\|\vec{u}\| = \sqrt{78}$.
- 14** a. $\vec{AB}(-5; 3; 4)$ et $\vec{AC}(1; 2; -4)$ donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -15$.
b. $\vec{AB}(1; 1; 1)$ et $\vec{AC}(-4; -4; -4)$ donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -12$.
c. $\vec{AB}(-8; -3; -3)$ et $\vec{AC}(6; -7; 0)$ donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -27$.
- 15** Voir livre page 427.
- 16** $\vec{AB}(-7; -1; 1)$ et $\vec{AC}(-7; 2; -5)$ donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 42$, les droites (AB) et (AC) ne sont pas orthogonales.
- 17** $\vec{AB}(3; 4; -5)$ et $\vec{AC}(6; 3; 6)$ donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 18 + 12 - 30 = 0$ et ABC est un triangle rectangle en A.
- 18** 1. \vec{AB} est un vecteur normal au plan (ADH).
2. \vec{AE} est un vecteur normal au plan (ABC).
3. Le vecteur \vec{AH} est orthogonal à \vec{AB} sans que \vec{AH} soit un vecteur de (ABC) ou un vecteur normal de ce plan.
- 19** $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.
- 20** \vec{n} est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .
- 21** \vec{n}_1 et \vec{n}_3 .
- 22** 1. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 \times 13 + 3 \times 2 + 4 \times (-8) = 26 + 6 - 32 = 0$.
 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \times 13 + 4 \times 2 + 1 \times (-8) = 0 + 8 - 8 = 0$.
2. \vec{n} est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .
- 23** B appartient au plan \mathcal{P} .
- 24** $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$.
- 25** Non : contre-exemple dans le cube ABCDEFGH.
 $\vec{AH} \cdot \vec{AB} = 0$ et \vec{AH} n'est pas un vecteur normal au plan (ABC).
- 26** 1. $2 \times (-3) + 3 \times 2 - 1 + 1 = 0$ donc $A \in \mathcal{P}$.
2. $2 \times (-5) + 3 \times 3 - 0 + 1 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}$.
3. $2 \times 4 + 3 \times (-3) + 1 + 1 = 1$ donc $C \notin \mathcal{P}$.
- 27** Non car les coordonnées de C ne vérifient pas l'équation $x_C + 2y_C + 3z_C - 14 = 5$.
- 28** $d = -41$.
- 29** $d = 4$.
- 30** Voir livre page 427.
- 31** $z = 0$.
- 32** $\vec{n}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal au plan d'équation $x + y + z - 6 = 0$ et A appartient à ce plan car $x_A + y_A + z_A - 6 = 0$.
- 33** O(0; 0; 0) et $\vec{n}(0; 1; 0)$.
- 34** $5x + 4y + z = 0$.
- 35** 1. $\vec{AM}(x - 4; y - 2; z - 1)$.
2. $\vec{AM} \cdot \vec{n} = x + 3y - 5z - 5$.
- 36** 1. $\vec{AM}(x - 7; y - 1; z - 1)$.
2. $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 5x - y - 5z - 29$.
- 37** $\vec{n}(1; 1; 1)$.
- 38** $\vec{n}(1; 2; 3)$.
- 39** (d) est incluse dans le plan \mathcal{P} .
- 40** $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

- 41** 1. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 8$.
2. (d) est sécante au plan \mathcal{P} .
- 42** $\vec{u} \cdot \vec{n} = -5$. Comme $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, (d) est sécante au plan \mathcal{P} .
- 43** 1. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.
2. Comme $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, (d) est parallèle à \mathcal{P} et comme $A \in (d)$ et $A \notin \mathcal{P}$, (d) est strictement parallèle au plan \mathcal{P} .
- 44** \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas colinéaires donc les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.
- 45** Voir livre page 427.
- 46** Les triplets (2; 3; -1) et (4; 5; 2) ne sont pas proportionnels donc les plans sont sécants.
- 47** Il s'agit de l'axe des abscisses.
- 48** Les triplets (5; 2; -4) et (-10; -4; 8) sont proportionnels et A(-1; -1; 0) appartient à \mathcal{P} mais pas à \mathcal{Q} donc \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont strictement parallèles.
- 49** Les triplets (5; 2; -4) et (-10; -4; 8) sont proportionnels donc les plans sont parallèles. A(-2; 0; 0) appartient à \mathcal{P} mais pas à \mathcal{Q} donc ces plans sont strictement parallèles.
- 50** Les plans (AEG), (DHF) et (DCG).
- 51** 1. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.
2. \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont perpendiculaires.

POUR S'ENTRAÎNER

- 52** a. $\vec{BF} \cdot \vec{BG} = a^2$.
b. $\vec{EI} \cdot \vec{HF} = 0$.
c. $\vec{EA} \cdot \vec{EI} = 0$.
d. $\vec{BJ} \cdot \vec{HD} = -\frac{1}{2}a^2$.
- 53** a. $\vec{AB} \cdot \vec{AF} = 9a^2$.
b. $\vec{DB} \cdot \vec{CG} = 0$.
c. $\vec{EG} \cdot \vec{HF} = 8a^2$.
d. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = 9a^2$.
- 54** a. $\vec{SA} \cdot \vec{SB} = \frac{1}{2}a^2$.
b. $\vec{AH} \cdot \vec{DB} = 0$.
c. $\vec{SH} \cdot \vec{AC} = 0$.
d. $\vec{HI} \cdot \vec{SC} = \frac{a^2}{4}$.
- 55** 1. $\vec{SB} \cdot \vec{AD} = -\frac{1}{2}a^2$ et $\vec{BC} \cdot \vec{AD} = a^2$.
2. $\vec{SI} \cdot \vec{AD} = \left(\vec{SB} + \frac{1}{2}\vec{BC}\right) \cdot \vec{AD} = \vec{SB} \cdot \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{BC} \cdot \vec{AD}$
 $= -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0$.
On déduit que les droites (AD) et (SI) sont orthogonales.
- 56** 1. $\vec{AI} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AE}$ et $\vec{BJ} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$.
2. $\vec{AI} \cdot \vec{BJ} = \left(\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AE}\right) \cdot \left(-\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\right)$
 $= \frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{2}AB^2 = 0$.
Les droites (AI) et (BJ) sont orthogonales.

57 1. Vrai car si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ à 2π près et les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

2. « Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ ». Cet énoncé est faux car si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de sens opposés :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

58 Voir livre page 427.

59 1. $\vec{AB}(1; -4; 8)$ et $\vec{AC}(2; -1; 2)$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 22, AB = 9 \text{ et } AC = 3.$$

2. $\cos \widehat{BAC} = \frac{22}{27}$ donc $\widehat{BAC} \approx 0,62 \text{ rad}$ à 0,01 près.

60 1. $\vec{AB}(2; 3; -1)$ et $\vec{AC}(5; -3; 1)$ donc :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 10 - 9 - 1 = 0.$$

Le triangle ABC est donc rectangle en A.

2. $I(\frac{9}{2}; 1; 1)$, $A(\frac{7}{2}; 0; 0)$, $\vec{AB} \cdot \vec{AI} = 7$, $AB = \sqrt{14}$, $AI = \frac{7}{2}$.

On déduit que $\cos \widehat{BAI} = \frac{2}{\sqrt{14}}$ donc $\widehat{BAI} \approx 1,01 \text{ rad}$ à 0,01 près.

61 1. $\vec{BA}(7; -1; 3)$ et $\vec{BC}(1; 1; -2)$ donc :

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 7 - 1 - 6 = 0.$$

Donc ABC est rectangle en A.

2. $J(4; -4; \frac{7}{2})$ et $\vec{BJ}(4; 0; \frac{1}{2})$.

$$\vec{BC} \cdot \vec{BJ} = 4 + 0 - 1 = 3, BC = \sqrt{6} \text{ et } BJ = \frac{\sqrt{65}}{2}.$$

$\cos \widehat{CBJ} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{65}}$ et $\widehat{CBJ} \approx 1,26 \text{ rad}$ à 0,01 près.

63

Saisir X

Saisir Y

Saisir Z

Saisir A

Saisir B

Saisir C

P prend la valeur $X \times A + Y \times B + Z \times C$

Afficher P

64 FAUX, si A, B et C ne sont pas alignés.

65 VRAI. $\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{-3}{3 \times 5} = -\frac{1}{5}$ soit $\widehat{BAC} \approx 1,77 \text{ rad}$ à 0,01 près.

66 FAUX : $\vec{BA} \cdot \vec{CA} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3$.

67 FAUX : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 4 + 1 \times 5 + (-1) \times 2 = 7$.

68 1. $\vec{SA} \cdot \vec{AB} = -\frac{1}{2}a^2$ et $\vec{AH} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}a^2$.

2. $\vec{SH} \cdot \vec{AB} = (\vec{SA} + \vec{AH}) \cdot \vec{AB} = \vec{SA} \cdot \vec{AB} + \vec{AH} \cdot \vec{AB} = 0$.

Les droites (SH) et (AB) sont orthogonales.

3. $\vec{SH} \cdot \vec{AD} = \vec{SA} \cdot \vec{AD} + \vec{AH} \cdot \vec{AD} = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0$.

4. La droite (SH) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC), donc cette droite est perpendiculaire au plan (ABC) et \vec{SH} est un vecteur normal au plan (ABC).

69 1. $\vec{AB}(3; 2; 1)$ et $\vec{AC}(5; -1; 3)$. Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés.

2. $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$ donc \vec{n} est un vecteur non nul, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), \vec{n} est donc un vecteur normal à (ABC).

70 1. $\vec{AB}(0; 5; -2)$ et $\vec{AC}(4; 1; 1)$. Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés, ces points définissent donc un plan.

2. $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$ donc \vec{n} est un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC), \vec{n} est donc un vecteur normal au plan (ABC).

71 Voir livre page 427.

72 1. Faux : si ABCDEFGH est un cube, $\vec{AH} \cdot \vec{AB} = 0$ mais \vec{AH} n'est pas un vecteur normal au plan (ABC).

2. Vrai puisqu'un vecteur normal à un plan est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

73 FAUX car dans ce cas on aurait $\vec{AB} \cdot \vec{n} \neq 0$.

74 VRAI : $\vec{n}' = -3\vec{n}$.

75 VRAI car le plan médiateur du segment [AB] est perpendiculaire à la droite (AB).

76 • Première méthode

\mathcal{P} a pour équation : $-x + 3y + 2z + d = 0$ et $A \in \mathcal{P}$ donc :

$$-x_A + 3y_A + 2z_A + d = 0$$

ce qui conduit à $d = -25$ d'où l'équation $-x + 3y + 2z - 25 = 0$.

• Deuxième méthode

$M(x; y) \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ ce qui équivaut à :

$$(x - 4) \times (-1) + (y - 5) \times 3 + (z - 7) \times 2 = 0$$

soit $-x + 3y + 2z - 25 = 0$.

77 • Première méthode

\mathcal{P} a pour équation : $-y + 4z + d = 0$ et $A \in \mathcal{P}$ donc :

$$-y_A + 4z_A + d = 0$$

ce qui conduit à $d = 23$ d'où l'équation :

$$-y + 4z + 23 = 0.$$

• Deuxième méthode

$M(x; y) \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ ce qui équivaut à :

$$(x - 1) \times 0 + (y - 3) \times (-1) + (z + 5) \times 4 = 0$$

soit $-y + 4z + 23 = 0$.

78 $-3x + y + z + 1 = 0$.

79 $-5x - y + z - 7 = 0$.

80 Voir livre page 427.

82 1. $I(3; -1; 5)$

2. $4x - 6y + 4z - 38 = 0$.

83 $-6x + 4y - 8z = 0$.

84 1. $\vec{AB}(2; 3; -5)$ et $\vec{AC}(4; 1; 0)$.

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés et ces points définissent un plan.

2. $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{AC} \cdot \vec{n} = 0$ donc \vec{n} est un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), \vec{n} est donc un vecteur normal au plan (ABC).

3. $-x + 4y + 2z + 20 = 0$.

85

Saisir A
Saisir B
Saisir C
Saisir X
Saisir Y
Saisir Z
D prend la valeur $-A \times X - B \times Y - C \times Z$
Afficher A
Afficher B
Afficher C
Afficher D

87 $bcx + acy + abz - abc = 0$.

88 1. $\vec{AB}(2; 4; -2)$ et $\vec{AC}(4; -4; 4)$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ donc ABC est rectangle en A.

2. a. $\vec{SO}(-4; 0; -4)$ $\vec{SO} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{SO} \cdot \vec{AC} = 0$.

b. $-4x - 4z = 0$ ce qui équivaut à $x + z = 0$.

c. Le triplet $(0; 0; 0)$ vérifie l'équation précédente.

3. a. $O \in (ABC)$, S est un sommet de tétraèdre et (SO) est perpendiculaire à (ABC).

b. On a $AB = 2\sqrt{6}$, $AC = 4\sqrt{3}$ donc l'aire du triangle ABC est $12\sqrt{2}$. Comme $SO = 4\sqrt{2}$, on obtient que le volume du tétraèdre est 32.

89 1. $\vec{n}_1(5; -3; 2)$. 2. $\vec{n}_2(0; 1; 7)$. 3. $\vec{n}_3(-1; 2; -5)$.

90 1. $\vec{n}_1(1; -1; 0)$. 2. $\vec{n}_2(2; 0; 1)$. 3. $\vec{n}_3(0; 1; -1)$.

91
$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

92 Voir livre page 427.

93 Il s'agit de la réunion des plans d'équations respectives :
 $x - y - z = 0$ et $x - y + z = 0$.

94 VRAI car les coordonnées du point A vérifient l'équation et les vecteurs $\vec{n}(2; 0; 3)$ et $\vec{n}(4; 0; 6)$ sont colinéaires.

95 FAUX : \mathcal{P} a pour vecteur normal $\vec{n}'(1; -1; 0)$ et \vec{n}' n'est pas colinéaire à $\vec{n}(1; -1; 3)$.

96 FAUX : dans l'espace $x - 3y + 2 = 0$ est une équation d'un plan.

97 VRAI : les coordonnées de A, de B et de C vérifient l'équation de plan.

98 1. \mathcal{P} a pour vecteur normal $\vec{n}(7; 2; -1)$ et (d_1) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1; 4; 1)$. On a $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ donc (d_1) est parallèle à \mathcal{P} .

2. $7(15 - 3t) + 2(-9 + t) - (7 + 2t) + 4 = 0$ équivaut à $t = 4$. \mathcal{P} et (d_2) sont sécants en $A(3; -5; 15)$.

99 1. \mathcal{P} a pour vecteur normal $\vec{n}(5; -3; 3)$ et (d_1) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-3; 5; -3)$. On a $\vec{n} \cdot \vec{u} = -39$ soit $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$ donc (d_1) n'est pas parallèle à \mathcal{P} .

2. $5(5 + 2t) - 3(-5 - 3t) + 3(10 + 5t) - 2 = 0$ équivaut à $t = -2$. \mathcal{P} et (d_2) sont sécants en $A(1; 1; 0)$.

100 \mathcal{P} et (d) sont sécants en $A(13; -4; 5)$.

101 Il s'agit du point $C(0; \frac{7}{3}; \frac{2}{3})$.

103 Voir livre page 427.

104

Saisir A
Saisir B
Saisir C
Saisir X
Saisir Y
Saisir Z
P prend la valeur $A \times X + B \times Y + C \times Z$

Si $P \neq 0$

Afficher « La droite est sécante au plan »

Sinon

Afficher « La droite est parallèle au plan »

Fin Si

105 1. $4x + 2y - z - 3 = 0$.

2. a. $\vec{n}(-2; 1; 0)$.

b. \vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires donc les plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont sécants.

3. a.
$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 \end{cases}$$

b. $H(0; 0; -1)$.

106 FAUX car A n'appartient pas à \mathcal{P} .

107 VRAI : $\vec{n}(4; -2; 3)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} et $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ donc la droite est parallèle au plan \mathcal{P} . Comme de plus B n'appartient pas à \mathcal{P} , la droite est strictement parallèle au plan.

108 VRAI. $\vec{CD}(-4; -1; -1)$ et $\vec{n} \cdot \vec{CD} \neq 0$, donc la droite (CD) et le plan \mathcal{P} sont sécants.

109 1. $\vec{n}_1(5; 6; -7)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_1 . $\vec{n}_2(1; -2; 1)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_2 . Comme \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas colinéaires, \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.

2.
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}t, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

110 1. $\vec{n}_1(7; -2; -5)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_1 .

$\vec{n}_2(1; 5; -6)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_2 .

Comme \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas colinéaires, \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.

2.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

111 Les triplets $(4; -2; 6)$ et $(6; -3; 9)$ sont proportionnels donc \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont parallèles. Le point $A(\frac{1}{4}; 3; 1)$ appartient à \mathcal{P}_1 mais pas au plan \mathcal{P}_2 , donc \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont strictement parallèles.

112 a. \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont sécants selon la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{11}{3} + \frac{1}{3}t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -\frac{4}{3} + \frac{5}{3}t \end{cases}$$

b. Les triplets $\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)$ et $(-1; 2; -4)$ sont proportionnels donc les plans sont parallèles. Comme le point A $(2; 0; 0)$ appartient aux deux plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} , on déduit que ces plans sont confondus.

c. Les triplets $(3; -1; -1)$ et $(-6; 2; 2)$ sont proportionnels, donc \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont parallèles. Comme le point A $(0; 0; 2)$ appartient à \mathcal{P} mais pas à \mathcal{Q} , on déduit que ces plans sont strictement parallèles.

113

Saisir A

Saisir B

Saisir C

Saisir A'

Saisir B'

Saisir C'

D prend la valeur $A \times B' - A' \times B$

E prend la valeur $B \times C' - B' \times C$

Si $D^2 + E^2 = 0$ **alors**

Afficher « Les plans sont parallèles »

Sinon

Afficher « Les plans sont sécants »

Fin Si

114 $4x + 3y - z - 37 = 0$.

115 $x + 2y - 7z - 2 = 0$.

116 Les triplets $(4; 1; -3)$ et $(1; -1; 1)$ ne sont pas proportionnels donc le système définit une droite de l'espace. Le vecteur $\vec{u}(2; 7; 5)$ est un vecteur directeur de la droite définie par ce système.

117 Voir livre page 427.

118 Il s'agit du point A $(10; 2; 5)$.

119 1. a. Les triplets $(-2; 1; 1)$ et $(1; -2; 1)$ ne sont pas proportionnels donc les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -3 + t \end{cases}$$

2. a. $\vec{u}(1; 1; 1)$ est un vecteur directeur de Δ , $\vec{n}_3(3; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_3 et $\vec{u} \cdot \vec{n}_3 \neq 0$ donc la droite Δ est sécante au plan \mathcal{P}_3 .

b. Le point d'intersection de Δ et \mathcal{P}_3 est A $(4; 6; 1)$.

120 $\vec{n}_1(-4; 3; 1)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_1 .

$\vec{n}_2(5; 7; -1)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_2 .

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ donc les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont perpendiculaires.

121 $\vec{n}_1(-11; 5; 6)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_1 .

$\vec{n}_2(4; -2; 9)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_2 .

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ donc les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont perpendiculaires.

122

Saisir A

Saisir B

Saisir C

Saisir A'

Saisir B'

Saisir C'

P prend la valeur $A \times A' + B \times B' + C \times C'$

Si $P = 0$ **alors**

Afficher « Les plans sont perpendiculaires »

Sinon

Afficher « Les plans ne sont pas perpendiculaires »

Fin Si

123 FAUX : les triplets $(2; -3; 1)$ et $(2; 3; 0)$ ne sont pas proportionnels.

124 FAUX : $\vec{n}_1(2; 3; 4)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_1 . $\vec{u} \cdot \vec{n}_1 \neq 0$ donc \vec{u} n'est pas un vecteur directeur d'une droite de \mathcal{P}_1 .

125 FAUX. $\vec{n}_1(1; 3; 1)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_1 .

$\vec{n}_2(-3; 1; 1)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_2 .

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$ donc les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ne sont pas perpendiculaires.

126 Les vecteurs $\vec{AB}(3; 0; 1)$ et $\vec{AC}(-5; 1; 0)$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

127 $4x - 3y + z + 25 = 0$.

128 1. $\vec{AB}(0; 4; 8)$.

2. $4y + 8z - 12 = 0$.

129 1. Le plan et la droite sont sécants en A $\left(\frac{52}{29}; -\frac{51}{29}; \frac{45}{29}\right)$.

Correctif : les questions 3. et 4. sont en fait les questions 2. a. b.

2. a. Les triplets $(1; 1; 1)$ et $(1; -1; 2)$ ne sont pas proportionnels donc les plans sont sécants.

$$\begin{cases} x = -4 - 3t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 427 et le site www.bordas-index.fr pour les corrections détaillées.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

138 $x - 5y + 3z - 10 = 0$.

139 $x - 4z + 24 = 0$.

140 1. Les triplets $(1; 5; 1)$ et $(2; 11; -1)$ ne sont pas proportionnels donc les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.

$$\begin{cases} x = 6 - 16t \\ y = -2 + 3t, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

141 1. Les triplets $(1; -1; 0)$ et $(2; 5; 0)$ ne sont pas proportionnels donc les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.

$$2. \begin{cases} x = -\frac{9}{7} \\ y = \frac{5}{7} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

► **Déterminer la perpendiculaire commune de deux droites non coplanaires**

► Comme (d) et (d') ne sont pas coplanaires, ces droites ne sont pas parallèles donc \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires. Soit \vec{v} un vecteur normal au plan passant par A et dirigé par les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' , \vec{v} est orthogonal aux deux vecteurs \vec{u} et \vec{u}' .

► Si \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles, alors \vec{u} , \vec{u}' et \vec{v} sont coplanaires, ce qui est impossible car \vec{v} est orthogonal à \vec{u} et à \vec{u}' , on aurait \vec{u} et \vec{u}' colinéaires. Par conséquent \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants.

► \vec{v} est à la fois un vecteur directeur de \mathcal{P} et de \mathcal{P}' , donc \vec{v} dirige la droite Δ , intersection de \mathcal{P} et \mathcal{P}' . Comme \vec{v} est orthogonal à \vec{u} et à \vec{u}' , Δ est orthogonal aux deux droites (d) et (d') et même perpendiculaire car (d) et Δ sont dans le plan \mathcal{P} et (d') et Δ sont dans le plan \mathcal{P}' .

► Soit Δ' une perpendiculaire commune aux droites (d) et (d'). On note $\vec{\delta}$ un vecteur directeur de Δ' . Le vecteur $\vec{\delta}$ est orthogonal à chacun des vecteurs \vec{u} et \vec{u}' donc $\vec{\delta}$ est un vecteur normal au plan passant par A et dirigé par les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' donc $\vec{\delta}$ est colinéaire à \vec{v} . Comme de plus Δ' est coplanaire avec (d), on déduit que Δ' appartient au plan \mathcal{P} . On démontre de la même façon que Δ' appartient au plan \mathcal{P}' donc Δ' est confondue avec Δ .

$$\begin{aligned} \vec{MM'} \cdot \vec{HH'} &= (\vec{MH} + \vec{HH'} + \vec{H'M'}) \cdot \vec{HH'} \\ &= \vec{MH} \cdot \vec{HH'} + \vec{HH'} \cdot \vec{HH'} + \vec{H'M'} \cdot \vec{HH'} = \vec{HH'}^2 \end{aligned}$$

$$\text{car } \vec{MH} \cdot \vec{HH'} = 0 \text{ et } \vec{H'M'} \cdot \vec{HH'} = 0.$$

Notons θ l'angle $(\vec{MM'}, \vec{HH'})$, on a alors :

$$\vec{MM'} \cdot \vec{HH'} = \vec{MM'} \times \vec{HH'} \times \cos \theta \text{ et } \vec{MM'} \times \cos \theta = \vec{HH'} \\ \text{d'où } \vec{HH'} \leq \vec{MM'}.$$

► Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires donc les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles.

$$\text{De plus } \begin{cases} 4+t = -1+2k \\ 3+2t = 1+k \\ 1-t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 0 \\ t = -1 \end{cases}.$$

On déduit donc que les droites (d) et (d') n'ont pas de points commun. Les droites (d) et (d') ne sont donc pas coplanaires.

$$\text{► Soit } \vec{v}(a; b; c). \begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{u}' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-c=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-3a \\ b=-2a \end{cases}.$$

On peut prendre $\vec{v}(1; -2; -3)$.

► Soit $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-c=0 \\ a-2b-3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b+2c=0 \\ a=2b+3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2b \\ a=-4b \end{cases}$$

On peut prendre $\vec{n}(4; -1; 2)$ et \mathcal{P} a pour équation :

$$4x - y + 2z - 15 = 0.$$

On procède de même, et on montre que \mathcal{P}' a pour équation :

$$3x - 6y + 5z - 1 = 0.$$

► La perpendiculaire commune à (d) et (d') est la droite d'intersection de \mathcal{P} et \mathcal{P}' , elle a pour représentation

$$\text{paramétrique : } \begin{cases} x = \frac{89}{21} - \frac{1}{3}t \\ y = \frac{41}{21} + \frac{2}{3}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

► On obtient $H(\frac{27}{7}; \frac{19}{7}; \frac{8}{7})$ et $H'(\frac{25}{7}; \frac{23}{7}; 2)$: $HH' = \frac{2\sqrt{14}}{7}$.

142 1. \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires donc (d) et (d') ne sont pas parallèles. De plus :

$$\begin{cases} -7+t = -2 \\ 3+t = 3+4k \\ 4+t = 5-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ k = \frac{5}{4} \\ k = -2 \end{cases}$$

donc les droites (d) et (d') n'ont pas de point commun.

On déduit que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

$$2. \mathcal{P} : x - 5y + 4z + 6 = 0.$$

$$\mathcal{P}' : 5x + 3y + 6z - 29 = 0.$$

$$\Delta : \begin{cases} x = -3t + \frac{76}{7} \\ y = t \\ z = 2t - \frac{59}{14} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$3. H(-\frac{67}{14}; \frac{73}{14}; \frac{87}{14}) \text{ et } H'(-2; \frac{30}{7}; \frac{61}{14}) : HH' = \frac{13\sqrt{14}}{14}.$$

143 1. $\vec{u}(3; -1; 2)$ est un vecteur directeur de (d). $\vec{u}'(2; 1; 1)$ est un vecteur directeur de (d').

Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires, donc (d) et (d') ne sont pas parallèles.

$$\text{De plus : } \begin{cases} 2+3t = -1+2t' \\ 1-t = 3+t' \\ 1+2t = 5+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 4-t \\ t = \frac{8}{3} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

donc les droites (d) et (d') n'ont pas de point commun.

On déduit que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

$$2. \mathcal{P} : x + 3y - 5 = 0.$$

$$\mathcal{P}' : 4x - 13y + 5z - 60 = 0.$$

$$\Delta : \begin{cases} x = 5-3t \\ y = t \\ z = 8+5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$3. H(\frac{50}{7}; -\frac{5}{7}; \frac{31}{7}) \text{ et } H'(5; 0; 8) : HH' = \frac{5\sqrt{35}}{7}.$$

144 On se place dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. On a alors :

$$(EB) : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (FC) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{P} : x - 2y + z - 1 = 0.$$

$$\mathcal{P}' : -2x + y + z + 1 = 0.$$

$$\Delta : \begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

145 M doit être le milieu de [AB] et N le milieu de [CD].

Dans ce cas, $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Optimisation d'une mesure d'angle

Dans ce TP, nous étudions les valeurs extrémales d'un angle dépendant de la position de deux points dans un tétraèdre régulier. Dans une première partie, nous effectuons des conjectures à l'aide du logiciel Geospace, puis dans une seconde partie nous démontrons les conjectures émises à l'aide de résultats établis en classe de Première comme la propriété d'Al-Kashi. Dans une dernière partie, nous fixons un des deux points, puis à l'aide d'une étude de fonction nous recherchons la position du second point permettant d'optimiser la valeur de l'angle étudié.

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 09_TS_TP1.xws (Xcas), 09_TS_TP1.dfw (Derive), 09_TS_TP1.g3w et 09_TS_correctionTP1.g3w (Geospace).

Correctif : en bas de page les deux premières aides correspondent aux questions A.2.b. et A.4., et non pas A.1.b. et A.4.a..

A. Construction et conjecture à l'aide du logiciel de géométrie

1. Pour construire les points M et N, choisir le menu **Créer** **Point** **Point libre** **Sur segment**.

2. a. Pour créer la variable a , choisir le menu **Créer** **Numérique** **Calcul géométrique** **Angle géométrique**.

Pour afficher la variable a , choisir le menu **Créer** **Affichage** **Variable numérique déjà définie**.

b. Pour créer la variable p , choisir le menu **Créer** **Numérique** **Calcul algébrique** et saisir **AM*AN*cos(a)**.

Pour afficher la variable p , choisir le menu **Créer** **Affichage** **Variable numérique déjà définie**.

3. Pour déplacer un point, placer le pointeur sur ce point, cliquer gauche, une main apparaît à la place du pointeur, déplacer alors la souris tout en maintenant le bouton appuyé.

a. On conjecture que la valeur minimale du produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ est $\frac{1}{2}$.

b. On conjecture que la valeur maximale de l'angle \widehat{MAN} est $1,05$ rad.

B. Démonstrations des conjectures

1. a. $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \times AM \times BM \times \cos \widehat{ABM}$ soit :
 $AM^2 = 1 + x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{3} = x^2 - x + 1$.

b. En utilisant la propriété d'Al-Kashi dans le triangle ABN, on obtient $AN^2 = y^2 - y + 1$.

c. En utilisant la propriété d'Al-Kashi dans le triangle AMN, on obtient $MN^2 = x^2 + y^2 - xy$.

d. Correctif : il se peut qu'il soit indiqué $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$ par erreur dans certains manuels, il faut lire $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$.

$$\begin{aligned} MN^2 &= NM^2 = \overrightarrow{NM}^2 = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN})^2 \\ &= AM^2 + AN^2 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} \\ \text{soit } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} &= \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - x + 1 + y^2 - y + 1 - x^2 - y^2 + xy)$$

$$\text{c'est-à-dire } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(xy - x - y + 2)$$

$$\text{or } (x-1)(y-1) + 1 = xy - x - y + 1 + 1 = xy - x - y + 2.$$

2. Comme $x \in [0; 1]$, $x-1 \leq 0$, de même $y-1 \leq 0$ et $(x-1)(y-1) \geq 0$ soit $(x-1)(y-1) + 1 \geq 1$ donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} \geq \frac{1}{2}$.

D'autre part, si M est en C et N en D, on obtient :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \text{ puis que } AC = AD = 1 \text{ et } \widehat{CAD} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

On conclut que $\frac{1}{2}$ est la valeur minimale du produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$.

$$3. \cos \widehat{MAN} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}}{AM \times AN}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} \geq \frac{1}{2}, AN \leq 1 \text{ et } AM \leq 1$$

conduit à $\cos \widehat{MAN} \geq \frac{1}{2}$. La fonction cosinus est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ donc $\widehat{MAN} \leq \frac{\pi}{3}$.

C. Optimisation de l'angle \widehat{MAN} dans un cas particulier

1. a. Pour placer le point N au milieu du segment [BD], on pourra s'aider de la longueur du segment [BN] qu'on fera afficher en choisissant le menu **Créer** **Affichage** **Longueur d'un segment**, en renseignant la fenêtre et en cliquant sur **OK**.

b. Pour afficher la longueur BM, choisir le menu **Créer** **Affichage** **Longueur d'un segment**, puis renseigner la fenêtre et cliquer sur **OK**.

c. On conjecture que la valeur de x est 0,2.

$$2. a. \text{ Lorsque } y = \frac{1}{2}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{3-x}{4} \text{ et } AN = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b. Correctif : il se peut qu'il soit indiqué $\cos \widehat{MAN} = \frac{3-x}{\sqrt{3x^2-3x+3}}$ par erreur dans certains manuels, il faut lire :

$$\cos \widehat{MAN} = \frac{3-x}{2\sqrt{3x^2-3x+3}}.$$

$$\begin{aligned} \cos \widehat{MAN} &= \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}}{AM \times AN} = \frac{3-x}{4} \times \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3-x}{2\sqrt{3x^2-3x+3}}. \end{aligned}$$

c. Xcas : 09_TS_TP1.xws.

Pour déterminer $u'(x)$, saisir :

$$\text{normal(deriver((3-x)/sqrt(3x^2-3x+3)))}$$

puis sélectionner le dénominateur de l'expression obtenue et le factoriser à l'aide de la commande **M** puis **Factor**.

Derive : 09_TS_TP1.dfw.

Pour déterminer $u'(x)$, saisir l'expression de la fonction, la sélectionner, choisir la commande **d**, puis **OK** et enfin **=**.

$$\text{On obtient } u'(x) = \frac{(1-5x)\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{3}(x^2-x+1)^2}.$$

d. $u'(x)$ est du signe de $1-5x$ donc positif sur $\left[0; \frac{1}{5}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{1}{5}; 1\right]$, on déduit que u est croissante sur $\left[0; \frac{1}{5}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{5}; 1\right]$.

e. On déduit que u admet un maximum pour $x = \frac{1}{5}$ et comme

$\cos \widehat{MAN} = 2 \times u(x)$, $\cos \widehat{MAN}$ est maximal pour $x = \frac{1}{5}$ et par décroissance de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on déduit que \widehat{MAN} est minimal pour $x = \frac{1}{5}$.

TP 2 Un lieu géométrique

Dans ce deuxième TP, nous étudions le lieu géométrique de l'orthocentre d'un triangle dont un sommet est variable sur une des arêtes d'un tétraèdre trirectangle. Une première partie est consacrée à la construction puis à la conjecture à l'aide du logiciel Geospace, tandis que dans une seconde partie nous démontrons les résultats conjecturés en utilisant les propriétés du produit scalaire.

Fichiers associés sur le site www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 09_TS_TP2.xws (Xcas), 09_TS_TP2.dfw (Derive) et 09_TS_TP2.g3w (Geospace).

A. Construction et conjecture à l'aide du logiciel de géométrie

1. Pour représenter les points O, A, B et C choisir le menu **Créer**

Point Point repéré Dans l'espace.

Pour représenter le tétraèdre OABC, choisir le menu **Créer**

Solide Polyèdre convexe Défini par ses sommets.

2. a. Pour créer le point M, choisir le menu **Créer** Point

Point libre Sur segment.

b. Pour créer le point H, choisir le menu **Créer** Point

Point image par Projection orthogonale sur une droite.

3. Pour déplacer un point, placer le pointeur sur ce point, cliquer gauche, une main apparaît à la place du pointeur, déplacer alors la souris tout en maintenant le bouton appuyé.

a. Lorsque M est en A, H est le milieu de [AC].

b. Lorsque M est en B, H est le milieu de [BC].

4. Pour afficher la longueur CH, choisir le menu **Créer**

Affichage Longueur d'un segment.

CH semble être maximale lorsque M est le milieu de [AB].
CH semble être minimale lorsque M est en A ou en B.

5. a. Pour faire apparaître la trace du point H, choisir le menu **Affichage** Sélection trace, sélectionner le point H, puis choisir le menu **Affichage** Mode trace(bascule).

H semble décrire un arc de cercle.

b. Pour construire le milieu d'un segment, choisir le menu **Créer** Point Milieu.

c. Pour construire le point K, choisir le menu **Créer** Point Centre(divers) Cercle circonscrit.

d. K n'existe pas lorsque M est en A ou en B, et si M décrit le segment [AB] privé des extrémités, K semble être fixe.

e. Pour faire afficher les coordonnées du point K, choisir le menu **Créer** Affichage Coordonnées d'un point.

K semble décrire un arc de cercle dont le centre est le point de coordonnées (1 ; 1 ; 4).

B. Démonstrations des conjectures

1. a. Dans le plan (OCM) :

– H est le projeté orthogonal de O sur (CM) donc :

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CH}.$$

– O est le projeté orthogonal de M sur (OC) donc :

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CO} = CO^2.$$

b. $CO = 6$, on déduit que $CH = \frac{36}{CM}$.

c. CH est minimal lorsque CM est maximal donc lorsque M est en A ou en B.

CH est maximal lorsque CM est minimal donc lorsque M est le projeté orthogonal de C sur (AB), c'est-à-dire lorsque M est le milieu de [AB] puisque ABC est équilatéral.

2. a. $M(6 - 6a; 6a; 0)$.

b. $\overrightarrow{CM}(6 - 6a; 6a; -6)$

$$\text{et } CM^2 = (6 - 6a)^2 + (6a)^2 + (-6)^2$$

$$= 36a^2 - 72a + 36 + 36a^2 + 36 = 72a^2 - 72a + 72.$$

c. \overrightarrow{CH} et \overrightarrow{CM} sont colinéaires donc il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{CH} = \lambda \overrightarrow{CM}$. D'autre part $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CM} = 36$ donne $\lambda \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM} = 36$,

$$\text{d'où } \lambda = \frac{36}{CM^2} = \frac{1}{2a^2 - 2a + 2}.$$

On a alors $\overrightarrow{CH}\left(\frac{6-6a}{2a^2-2a+2}; \frac{6a}{2a^2-2a+2}; \frac{-3}{2a^2-2a+2}\right)$ et en simplifiant chaque quotient, on obtient le résultat demandé.

d. $QC(-1; -1; 2)$

$$\text{et } \overrightarrow{QH}\left(\frac{-a^2-2a+2}{a^2-a+1}; \frac{-a^2+4a-1}{a^2-a+1}; \frac{2a^2-2a-1}{a^2-a+1}\right).$$

e. Fichier Xcas : 09_TS_TP2.xws.

Pour calculer la norme du vecteur, saisir :

$$\text{normal}(\text{norm}((-a^2-2a+2)/(a^2-a+1), (-a^2+4a-1)/(a^2-a+1), (2a^2-2a-1)/(a^2-a+1)))$$

Fichier Derive : 09_TS_TP2.dfw.

Pour calculer la norme du vecteur, saisir :

$$\text{ABS}([(-a^2-2a+2)/(a^2-a+1), (-a^2+4a-1)/(a^2-a+1), (2a^2-2a-1)/(a^2-a+1)])$$

puis cliquer sur **=**.

$$\text{On obtient } \|\overrightarrow{QH}\| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

f. Le résultat précédent est conforme à la conjecture faite, puisque quelle que soit la position du point M sur [AM], la longueur QH est constante égale à $\frac{\sqrt{6}}{6}$ donc le point H est situé sur le cercle de centre Q et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{6}$ du plan (ABC).

CAP VERS LE BAC

Sujet A

1. Vrai : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = 0,5$.

2. Faux : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IJ} = 2IB^2 = \frac{1}{2}$

$$\text{or } AB \times IC \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

3. Vrai : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IJ} = 2IB^2$

$$\text{et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} = 2IB^2.$$

4. Vrai : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$ car B est le projeté orthogonal de C sur (AI).

5. Faux, les coordonnées du point E ne vérifient pas l'équation.

6. Faux: (EFI) a pour équation $y = 0$.

7. Vrai: le vecteur $\vec{n}(4; -3; 2)$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{EI}(\frac{1}{2}; 0; -1)$ et $\vec{IJ}(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$.

8. Vrai car le vecteur $\vec{n}(-4; 1; 2)$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{FI}(-\frac{1}{2}; 0; -1)$ et $\vec{FJ}(0; 1; -\frac{1}{2})$.

9. Vrai: en considérant la base EFI, le volume est le tiers de l'aire de cette base par la hauteur qui est alors égale à 1. L'aire du triangle EFI est égale à $\frac{1}{2}$.

Sujet B

$$1. \text{ a. } \vec{MD} \cdot \vec{MA} = (\vec{MI} + \vec{ID}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IA}) \\ = (\vec{MI} - \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IA}) = MI^2 - IA^2.$$

b. $\vec{MD} \cdot \vec{MA} = 0$ si et seulement si $MI^2 = IA^2$ ce qui équivaut à $IM = IA$. (E) est donc la sphère de centre I et de rayon IA.

2. a. $\vec{AB}(-3; 6; 0)$ et $\vec{AC}(-3; 0; 4)$ donc $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{AC} \cdot \vec{n} = 0$. Le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC).

b. Une équation de (ABC) est $4x + 2y + 3z - 12 = 0$.

$$3. \text{ a. } \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b. $H(-1; 2; 4)$.

c. $DH = \sqrt{29}$.

d. H est le projeté orthogonal de D sur (ABC) donc \vec{HD} est orthogonal à \vec{HA} soit $\vec{HD} \cdot \vec{HA} = 0$ et H appartient à l'ensemble (E).

Sujet C

1. Soit \mathcal{P} le plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ et passant par le point $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace, $\vec{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. M appartient à \mathcal{P} si et seulement si $\vec{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ ce qui équivaut à $(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$ soit à $ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$.

2. a. $\vec{AB}(-4; -1; 7)$ et $\vec{AC}(1; 4; 2)$. Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés et ces points définissent un plan.

b. Les coordonnées de chacun des points A, B et C vérifient l'équation proposée.

$$c. \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 9 - t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

d. $J(-1; 7; 6)$.

e. $IJ = 2\sqrt{6}$.

Sujet D

1. Soit \mathcal{D} une droite orthogonale à deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 d'un plan \mathcal{P} . Soit \vec{n} un vecteur directeur de \mathcal{D} , \vec{u} un vecteur directeur de \mathcal{D}_1 et \vec{v} un vecteur directeur de \mathcal{D}_2 . Soit Δ une droite du plan \mathcal{P} et \vec{w} un vecteur directeur de Δ . Comme \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

On a $\vec{n} \cdot \vec{w} = a\vec{n} \cdot \vec{u} + b\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, ce qui prouve que la droite \mathcal{D} est orthogonale à la droite Δ .

$$2. V_{ABDM} = \frac{1}{6a}.$$

3. a. $\vec{BK} = \frac{a^2}{a^2 + 2} \vec{BM} + \frac{1}{a^2 + 2} \vec{BD}$. Pour chaque valeur de a , il existe un unique point K et ce point appartient au plan (BMD).

$$b. \vec{BK} \cdot \vec{AM} = \frac{1}{a^2 + 2} \text{ et } \vec{BK} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{a^2 + 2}. \\ \vec{BK} \cdot \vec{MD} = \vec{BK} \cdot (\vec{MA} + \vec{AD}) = -\vec{BK} \cdot \vec{AM} + \vec{BK} \cdot \vec{AD} \\ = \frac{-1}{a^2 + 2} + \frac{1}{a^2 + 2} = 0.$$

$$c. \text{ On a } \vec{DK} = \frac{a^2}{a^2 + 2} \vec{DM} + \frac{1}{a^2 + 2} \vec{DB}; \\ \vec{DK} \cdot \vec{AM} = \frac{1}{a^2 + 2} \text{ et } \vec{DK} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{a^2 + 2} \text{ donc:} \\ \vec{DK} \cdot \vec{MB} = \vec{DK} \cdot \vec{MA} + \vec{DK} \cdot \vec{AB} = 0.$$

d. K appartient au plan (BDM) et dans ce plan, d'une part (DK) est perpendiculaire à (MB), d'autre part (BK) est perpendiculaire à (MD). K appartient à deux hauteurs du triangle BDM, K est donc l'orthocentre de ce triangle.

$$4. \vec{AK} \cdot \vec{MB} = (\vec{AD} + \vec{DK}) \cdot \vec{MB} = \vec{AD} \cdot \vec{MB} + \vec{DK} \cdot \vec{MB} \\ = 0 + 0 = 0. \\ \vec{AK} \cdot \vec{MD} = \vec{AB} \cdot \vec{MD} + \vec{BK} \cdot \vec{MD} = 0 + 0 = 0. \\ (\text{AK}) \text{ est perpendiculaire au plan (BDM).}$$

Sujet E

Partie A

1. $\vec{AB}(3; 3; 3)$ et $\vec{AC}(3; 0; -3)$ donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ et ABC est rectangle en A.

2. \mathcal{P} a pour vecteur normal \vec{n} , or $\vec{AB} = 3\vec{n}$ donc (AB) est perpendiculaire à \mathcal{P} .

$$x_A + y_A + z_A - 3 = 0 \text{ donc } A \in \mathcal{P}.$$

$$3. x - z - 1 = 0.$$

Partie B

1. $\vec{AD}(-3; 6; -3)$, $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = 0$ donc \vec{AD} est normal au plan (ABC) donc (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

$$2. V_{ABCD} = 27.$$

3. a. $\vec{DB}(6; -3; 6)$ et $\vec{DC}(6; -6; 0)$ donc $\vec{DB} \cdot \vec{DC} = 54$, $DB = 9$ et $DC = 6\sqrt{2}$. On a alors $\cos \widehat{BDC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit $\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}$ rad.

$$b. \mathcal{A}_{BDC} = \frac{DB \times DC \times \sin \widehat{BDC}}{2} = 27.$$

$$c. AH = 3.$$

146 1. $\vec{n}'(2; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} et \vec{n}' n'est pas colinéaire à \vec{n} donc Δ n'est pas perpendiculaire à \mathcal{P} .

$$2. \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. La droite Δ coupe \mathcal{P} en $H(1; 2; -3)$.

$$147 1. x + y + z - 2 = 0.$$

2. $x_A + y_A + z_A - 2 = 1$ donc $A \notin \mathcal{P}$.

$$3. (\text{AB}): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + t \end{cases}$$

La droite (AB) coupe le plan \mathcal{P} en $H(\frac{8}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{5}{3})$.

148 Méthode 1 : $AB = AC$ donc A appartient au plan médiateur de [BC]. De même, D appartient au plan médiateur de [BC]. La droite (AD) est donc orthogonale à (BC).

Méthode 2 :

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

POUR ALLER PLUS LOIN

149 $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{ID} = \frac{1}{2} (AD^2 - AI^2 - ID^2) = -\frac{1}{4} a^2$ soit $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} = \frac{1}{4} a^2$.

$\cos \widehat{AID} = \frac{1}{3}$ et $\widehat{AID} \approx 1,23$ rad.

150 1. La droite (EI) est incluse dans le plan (EFG) et (AE) est perpendiculaire à (EFG), donc (EI) et (AE) sont orthogonales. Comme (EI) et (AE) sont de plus sécantes, ces droites sont perpendiculaires.

En utilisant le théorème de Pythagore au triangle AEI rectangle en E, on obtient $AI = \frac{\sqrt{6}}{2} a$.

2. $AJ = \frac{\sqrt{6}}{2} a$.

3. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2} a^2$,

$\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} a^2$ et $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} a^2$.

4. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{5a^2}{4}$, $\cos \widehat{IAJ} = \frac{5}{6}$ donc $\widehat{IAJ} \approx 33,6^\circ$.

5. Le triangle AIJ est isocèle en A donc :

$$\widehat{AIJ} = \widehat{AJI} \approx \frac{180 - 33,6}{2} \approx 73,2^\circ.$$

151 1. $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, donc \vec{w} est un vecteur normal au plan \mathcal{P} . \mathcal{P} a pour équation $-x + 5y + 3z + 9 = 0$.

2. La perpendiculaire à \mathcal{P} passant par B a pour représentation

paramétrique $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. On obtient $B'(\frac{46}{35}; -\frac{11}{7}; \frac{2}{35})$.

152 1. a. On prend $\vec{n}(1; 2; 2)$.

b. $x + 2y + 2z - 2 = 0$.

2. $\overrightarrow{OH} = \frac{2}{9} \vec{n}$ donc (OH) est la perpendiculaire à (ABC) passant par O. $x_H + 2y_H + 2z_H - 2 = 0$ donc $H \in (ABC)$.

3. a. $\overrightarrow{OC}(0; 0; 1)$, $\overrightarrow{OH}(\frac{2}{9}; \frac{4}{9}; \frac{4}{9})$ et $\overrightarrow{AB}(-2; 1; 0)$.

On vérifie que $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

b. On note K le point d'intersection de (AB) et (OCH). (OK) et (CK) sont toutes les deux perpendiculaires à (AB) donc K est le projeté orthogonal des points O et H sur (AB).

4. $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CH} = \frac{5}{9}$ donc $\cos \widehat{OCH} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

5. $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{CO} = CK \times CO \times \cos \widehat{CKO}$. Or $H \in [CK]$ puisque O, C et K sont alignés et $z_C < z_H < z_K$; on déduit donc que $\widehat{CKO} = \widehat{HCO}$ et $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{CO} = CK \times \frac{\sqrt{5}}{3}$.

D'autre part $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{CO} = CO^2 = 1$.

On obtient $CK = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

6. $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{CK \times AB}{2} = \frac{3}{2}$.

153 1. La droite (OC) est orthogonale à (OA) et (OB) qui sont deux droites sécantes du plan (AOB) donc (OC) est perpendiculaire à ce plan. La droite (AB) est incluse dans le plan (AOB) donc (OC) et (AB) sont orthogonales. On procède de la même façon pour les autres couples d'arêtes opposées.

2. a. (OH) est perpendiculaire au plan (ABC) donc orthogonale à la droite (AB). Comme (AB) est aussi orthogonale à (CO) qui est sécante à (OH), la droite (AB) est perpendiculaire au plan (OCH).

b. On note K le point d'intersection de (AB) et (OCH). (OK) et (CK) sont toutes les deux perpendiculaires à (AB) donc K est le projeté orthogonal des points O et H sur (AB).

3. a. $\mathcal{A}_{AOB} = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{OK \times AB}{2}$ donc $OA \times OB = OK \times AB$ et $OA^2 \times OB^2 = OK^2 \times AB^2$ donc $\frac{1}{OK^2} = \frac{AB^2}{OA^2 \times OB^2}$ donc :

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{OA^2 + OB^2}{OA^2 \times OB^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}.$$

b. De même, on obtient :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

4. a. $V_{OABC} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{OAB} \times OC = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times OH$.

On obtient alors $(\mathcal{A}_{ABC})^2 = (\mathcal{A}_{OAB})^2 \times \frac{OC^2}{OH^2}$.

Or $\mathcal{A}_{OAB} = \frac{OA \times OB}{2}$, donc :

$$(\mathcal{A}_{ABC})^2 = \frac{OA^2 \times OB^2 \times OC^2}{4OH^2} = \frac{OA^2 \times OB^2 \times OC^2}{4} \left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right)$$

soit $(\mathcal{A}_{ABC})^2 = \frac{OB^2 \times OC^2}{4} + \frac{OA^2 \times OC^2}{4} + \frac{OA^2 \times OB^2}{4}$

$$= (\mathcal{A}_{OBC})^2 + (\mathcal{A}_{OAC})^2 + (\mathcal{A}_{OAB})^2.$$

b. $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2}$.

154 1. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y - z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - 2z \\ y = 4 + z \end{cases}$

donc \mathcal{D} a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. a. \mathcal{P}_λ a pour équation $(1 + \lambda)x + (1 + 2\lambda)y + z - 4\lambda = 0$ donc $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_λ .

b. $\lambda = 0$.

c. $\lambda = -1$.

3. \mathcal{P}_{-1} a pour équation $-y + z + 4 = 0$ la droite \mathcal{D}' est caractérisée par le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y = z + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - 2z \\ y = 4 + z \end{cases},$$

\mathcal{D}' a donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

ce qui prouve que \mathcal{D}' est confondue avec \mathcal{D} .

4. Soit H le projeté orthogonal de A sur \mathcal{D} , on obtient $H(0; 2; -2)$ et $AH = \sqrt{11}$.

155 1. a. $L(0; a; 0)$, $M(a; 0; 0)$ et $D(0; 0; 1)$.

On obtient $DL = DM = \sqrt{a^2 + 1}$.

b. Soit I le milieu de $[LM]$, $DI = \sqrt{\frac{a^2 + 2}{2}}$ et $LM = a\sqrt{2}$ donc :

$$\mathcal{A}_{DLM} = a \frac{\sqrt{a^2 + 2}}{2}.$$

2. $\overrightarrow{OK}(1; 1; a)$, $\overrightarrow{DL}(0; a; -1)$ et $\overrightarrow{DM}(a; 0; -1)$.

$\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{DL} = 0$ et $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{DM} = 0$ donc (OK) est perpendiculaire au plan (DLM) .

3. a. $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}.$

b. $H \in (OK)$.

c. $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = a$, $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK} = \lambda OK^2$ et $OK^2 = a^2 + 2$ donc :

$$\lambda = \frac{a}{a^2 + 2}.$$

Comme $0 \leq \lambda \leq 1$, $H \in [OK]$.

d. $H\left(\frac{a}{a^2 + 2}; \frac{a}{a^2 + 2}; \frac{a^2}{a^2 + 2}\right)$.

e. $\overrightarrow{HK} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OK}$,

donc $HK^2 = (1 - \lambda)^2 OK^2 = \left(\frac{a^2 + 2 - a}{a^2 + 2}\right)^2 \times (a^2 + 2)$

d'où $HK = \frac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2 + 2}}$.

4. $V_{DLMK} = \frac{a\sqrt{a^2 + 2}}{6} \times \frac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2 + 2}} = \frac{1}{6}a(a^2 - a + 2)$.

156 1. a. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

b. $\vec{n} = \vec{0}$ équivaut à $\begin{cases} bc' - b'c = 0 \\ ca' - c'a = 0 \\ ab' - a'b = 0 \end{cases}$ qui traduit la proportionnalité

des triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ donc la colinéarité des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

2. a. $\overrightarrow{AB}(-3; -1; -3)$ et $\overrightarrow{AC}(-2; -1; -1)$. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C définissent un plan.

b. $\vec{n}(-2; 3; 1)$.

c. $-2x + 3y + z + 5 = 0$.

157 Partie A

1. \vec{n} et \overrightarrow{IH} sont colinéaires, donc :

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{IH}| = \|\vec{n}\| \times IH = IH \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

2. $IH(x_H - x_I; y_H - y_I; z_H - z_I)$

donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IH} = -ax_I - by_I - cz_I + ax_H + by_H + cz_H$

$$= -ax_I - by_I - cz_I - d$$

car $ax_H + by_H + cz_H = -d$ puisque H appartient au plan \mathcal{P} .

$$3. IH = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{IH}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Partie B

1. $\overrightarrow{AB}(3; 0; 3)$, $\overrightarrow{AC}(3; 3; 3)$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

ABC est donc rectangle en A.

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{9\sqrt{6}}{2}.$$

2. a. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

b. $x - 2y + z - 9 = 0$.

3. a. $d(\mathcal{D}, (ABC)) = \sqrt{6}$.

b. $V_{ABCD} = 9$.

4. \mathcal{Q} est parallèle à \mathcal{P} .

5. $E\left(\frac{11}{3}; -\frac{2}{3}; 0\right)$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ donc $E \in [AD]$ car $0 \leq \frac{2}{3} \leq 1$.

6. $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et de même $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ donc :

$$V_{EFGD} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V_{ABCD} = \frac{1}{3}.$$

Partie C

Il s'agit de la réunion des plans d'équations respectives :

$$-5x + 11y + 8z - 18 = 0 \text{ et } 23x + 25y - 20z + 24 = 0.$$

158 1. I est le milieu de $[AC]$ donc $BA^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}AC^2$ et $DC^2 + DA^2 = 2DI^2 + \frac{1}{2}AC^2$ et par conséquent :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(BI^2 + DI^2) + AC^2 = 4IJ^2 + BD^2 + AC^2.$$

2. Immédiat avec le 1.

159 1. a. $\|\vec{i}\| = 1$.

b. $\vec{v}' \cdot \vec{i} = \vec{v} \cdot \vec{i} - (\vec{v} \cdot \vec{i})(\vec{i} \cdot \vec{i}) = 0$.

c. $\|\vec{j}\| = 1$; $\vec{j} \cdot \vec{i} = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \vec{v}' \cdot \vec{i} = 0$.

2. a. En considérant trois réels α , β et γ tels que :

$$\alpha \vec{w} + \beta \vec{i} + \gamma \vec{j} = \vec{0}$$

et en substituant les expressions de \vec{i} et \vec{j} en fonction de \vec{u} et \vec{v} , on démontre que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

b. $a = -\vec{w} \cdot \vec{i}$ et $b = -\vec{w} \cdot \vec{j}$.

c. $\vec{w}' \neq \vec{0}$ car \vec{w} , \vec{i} et \vec{j} ne sont pas coplanaires.

d. $\vec{k} = \frac{1}{\|\vec{w}'\|} \vec{w}'$.

3. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé.

160 1. b. $\overrightarrow{BC}(4; 0; 0)$ est orthogonal aux deux vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} .

c. $V_{OABC} = 32$.

d. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ donc B appartient à la sphère de diamètre $[AC]$. De même, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ donc O appartient à la même sphère. Le centre de cette sphère est $I(2; 3; 4)$ et le rayon est $\sqrt{29}$.

2. a. (MN) et (QP) sont parallèles à (BC) donc (MN) et (QP) sont parallèles. De même (MQ) et (NP) sont parallèles. De plus (BC) et (OA) sont orthogonales donc (MN) et (MQ) sont perpendiculaires. $MNPQ$ est donc un rectangle.

b. (PM) est dans le plan π et (OB) est orthogonal à π donc (PM) et (OB) sont orthogonales. La droite (PM) est orthogonale à (AC) pour $k = \frac{72}{13}$.

c. $MP^2 = \frac{13}{16}k^2 - 9k + 36$.

La distance MP est minimale pour $k = \frac{72}{13}$.

161 Correctif : les questions **4. a.**, **4. b.** et **4. c.** sont en fait les questions **3. b.**, **3. c.** et **3. d.**

1. Les quatre hauteurs de ce tétraèdre sont concourantes en O, donc OIJK est orthocentrique.

2. Soit K le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B : $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Or (BK) est orthogonal au plan (ACD) par définition d'une hauteur, donc (BK) est orthogonale à (CD) .

De même (KH), c'est-à-dire (AH), est orthogonale à (BCD) donc $\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Donc $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ et $H \in (BCD)$, donc (BH) est la hauteur issue de B du triangle BCD.

3. a. Les coordonnées des points B, C et D vérifient l'équation proposée.

b. $H(1; -1; 3)$.

c. $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = -39$.

d. $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} \neq 0$ donc (BH) n'est pas une hauteur du triangle BCD, donc les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B ne sont pas concourantes par contraposé du 2. ABCD n'est donc pas orthocentrique.

Prises d'initiatives

162 Soit O un point de l'espace et A, B et C les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{n}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{n}'$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{n}''$. Quatre cas et quatre cas seulement peuvent se produire pour les plans \mathcal{P} , \mathcal{P}' et \mathcal{P}'' .

• Les trois plans sont parallèles : dans ces conditions les vecteurs normaux sont colinéaires donc coplanaires.

• \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles et \mathcal{P}'' quelconque : dans ce cas \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires, donc les trois vecteurs normaux sont coplanaires.

• \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants suivant une droite \mathcal{D} et \mathcal{P}'' est parallèle à \mathcal{D} . Dans ces conditions, le plan (OAB) est perpendiculaire à la droite \mathcal{D} , et le vecteur \overrightarrow{OC} , orthogonal à \mathcal{D} , est donc dans le plan (OAB) : les trois vecteurs normaux sont encore coplanaires.

• Il reste le cas où \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants suivant une droite \mathcal{D} et \mathcal{P}'' est sécant à la droite \mathcal{D} en M. Les trois plans ont alors un seul point commun : le point M. Le vecteur \overrightarrow{OC} n'est pas dans le plan (OAB), les trois vecteurs normaux ne sont pas coplanaires.

163 Les points P et Q jouant le même rôle, on peut penser à remplacer $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ par $2\overrightarrow{AI}$ où I est le milieu de [PQ].

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

donc I est un point fixe.

De plus :

$$AB^2 + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IP}) \cdot (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IP}) = 0$$

$$\Leftrightarrow IP^2 = AB^2 + AI^2 \Leftrightarrow IP = \frac{\sqrt{5}}{2} AB.$$

La double condition est donc équivalente au fait que P appartiennent à la sphère de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2} AB$ avec I tel que $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Les couples (P, Q) sont les extrémités des diamètres de cette sphère.

164 • Si A et B sont confondus.

L'ensemble cherché est l'espace tout entier si $k = 0$. Sinon si k est non nul, l'ensemble cherché est l'ensemble vide.

• Si A et B sont distincts.

Soit H le point de l'espace défini par $\overrightarrow{AH} = \frac{-k}{AB^2} \overrightarrow{AB}$, on a $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ si et seulement si $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donc l'ensemble cherché est le plan passant par H et de vecteur normal AB.

165 Soit h la hauteur du tétraèdre ABCD. Le volume V est égal à $\frac{1}{3}h \times \mathcal{A}$ où \mathcal{A} est l'aire commune aux faces du tétraèdre. Le volume V est aussi la somme des volumes des quatre tétraèdres MABC, MABD, MACD et MBCD dont les volumes sont respectivement $\frac{1}{3}d_1 \times \mathcal{A}$, $\frac{1}{3}d_2 \times \mathcal{A}$, $\frac{1}{3}d_3 \times \mathcal{A}$, et $\frac{1}{3}d_4 \times \mathcal{A}$, où d_1 , d_2 , d_3 et d_4 sont les distances respectives du point M aux faces ABC, ABD, ACD et BCD.

On obtient alors $h = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$.

166 • Si $k = 0$, on reconnaît la sphère de diamètre [AB].

Soit I le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ équivaut à $MI^2 = IA^2 + k$.

• Si $k < -\frac{1}{4}AB^2$, l'ensemble cherché est l'ensemble vide.

• Si $k = -\frac{1}{4}AB^2$, l'ensemble cherché est réduit au seul milieu de [AB].

• Si $k > -\frac{1}{4}AB^2$, l'ensemble cherché est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{1}{4}AB^2 + k}$.

167 L'équation équivaut au système
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$$

qui caractérise la droite passant par A(-4; 2; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 1; 1)$.

A Le programme

On approfondit le travail en probabilités et statistique mené les années précédentes.

Cette partie se prête particulièrement à l'étude de problèmes issus d'autres disciplines.

Le recours aux représentations graphiques et aux simulations est indispensable.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Conditionnement, indépendance Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$. Indépendance de deux événements.	<ul style="list-style-type: none"> • Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée. • Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités. • Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers. <p>▣ Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour \bar{A} et B.</p>	<p>On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau. On énonce et on justifie les règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés.</p> <p>Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve.</p> <p>Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en oeuvre de cette formule doit être maîtrisée.</p> <p>Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes.</p> <p>◇ Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre, notamment pour simuler une marche aléatoire.</p> <p>↔ [SVT] Héritéité, génétique, risque génétique.</p>

B Notre point de vue

Nous avons regroupé dans ce chapitre la partie du programme relative au conditionnement et à l'indépendance.

Les notions nouvelles concernant ce chapitre sont peu nombreuses : conditionnement par un événement de probabilité non nulle et indépendance de deux événements.

La première activité « Réussite au bac » permet, à partir de données présentées en tableau, de découvrir la notion de probabilité conditionnelle et la formule permettant le calcul de ces probabilités. Les notions correspondantes constituent le contenu de la première page de cours.

La seconde page de cours est consacrée aux arbres pondérés et à la formule des probabilités totales. La notion d'arbre de probabilités est déjà connue des élèves :

- En classe de Troisième et de Seconde, on s'est intéressé à la succession de deux expériences (éventuellement trois), pas nécessairement identiques.

Ces activités ont permis à l'élève de se familiariser avec les arbres de probabilités construits intégralement.

– En classe de Première, on s'est intéressé à la répétition d'une même expérience aléatoire, un certain nombre n de fois (ce nombre n pouvant éventuellement être grand), dans le cadre de la loi binomiale.

Le contenu du programme de Terminale est dans le prolongement de ces apprentissages.

Nous avons décidé de formaliser cette partie de cours en détaillant la méthode de construction d'un arbre pondéré, en proposant un peu de vocabulaire et en donnant quelques règles.

Les capacités attendues étant : « construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée » et « exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités », ces capacités sont reprises dans les deux savoir-faire. L'arbre pondéré, construit dans le deuxième savoir-faire, donne aussi l'occasion de mettre en œuvre la formule des probabilités totales.

La troisième page de cours traite de l'indépendance de deux événements. Il nous a paru important d'insister sur l'aspect « commutatif » de cette notion d'indépendance : si l'événement B est indépendant de l'événement A, alors l'événement A est indépendant de l'événement B.

On retrouve aussi dans cette partie la démonstration « exigible » mentionnée dans le programme.

Concernant l'accompagnement personnalisé, la page « Revoir les points essentiels » revient sur deux points importants : la construction d'un arbre pondéré et le calcul d'une probabilité conditionnelle. La page « approfondissement » permet la découverte d'une des principales applications des probabilités conditionnelles : la formule de Bayes.

Les commentaires du programme demandent de mener des activités algorithmiques, notamment pour simuler une marche aléatoire, et des activités en lien avec la SVT sur les thèmes « hérédité, génétique, risque génétique ». C'est pourquoi le TP1 propose d'étudier une situation de « marche aléatoire » en partant d'un point de vue algorithmique pour ensuite observer et formaliser certains résultats. Le TP2 propose, quant à lui, d'étudier un phénomène d'hérédité connu : la loi de « Hardy-Weinberg ».

Les notions abordées dans le chapitre 10

1. Probabilité conditionnelle
2. Arbres pondérés et probabilités totales
3. Indépendance de deux événements

Avant de commencer

Voir livre page 427 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

Activités

Activité 1 Réussite au bac

Cette activité permet, à partir de données présentées en tableau, de découvrir la notion de probabilité conditionnelle et la formule permettant le calcul de ces probabilités. Les valeurs du tableau étant des effectifs, on commence par déterminer les probabilités correspondantes.

1. Tableau complété :

	Nombre de succès au bac	Nombre d'échecs au bac	Total
Nombre de redoublants	36	4	40
Nombre de non redoublants	378	50	428
Total	414	54	468

$$2. P(B) = \frac{414}{468} = \frac{23}{26}; P(R) = \frac{40}{468} = \frac{10}{117};$$

$$P(\bar{R}) = \frac{428}{468} = \frac{107}{117}; P(B \cap R) = \frac{36}{468} = \frac{1}{13};$$

$$P(B \cap \bar{R}) = \frac{378}{468} = \frac{21}{26}.$$

$$3. P_R(B) = \frac{36}{40} = \frac{9}{10} = \frac{P(B \cap R)}{P(R)}.$$

$$4. P_{\bar{R}}(B) = \frac{378}{428} = \frac{189}{214} = \frac{P(B \cap \bar{R})}{P(\bar{R})}.$$

5. Réussite des élèves redoublants : 0,9.

Réussite des élèves non redoublants : 0,88 (environ).

6. $\frac{36}{414} = P_B(R)$: probabilité que l'élève choisi soit redoublant, sachant qu'il a obtenu son bac.

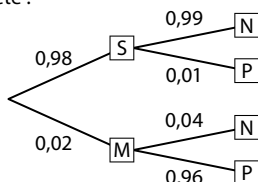
$\frac{378}{414} = P_B(\bar{R})$: probabilité que l'élève choisi ne soit pas redoublant, sachant qu'il a obtenu son bac.

Activité 2 Un test de dépistage

Cette activité donne l'occasion de lire et compléter des probabilités sur un arbre pondéré. Ces informations sont ensuite utilisées pour déterminer la probabilité de certains événements.

1. $0,98 = P(S)$.

2. Arbre complété :



3. a. $P(S \cap N) = 0,9702$.

b. C'est l'événement $M \cap N$, $P(M \cap N) = 0,0008$.

c. $P(N) = 0,971$.

4. a. $P(S \cap P) = 0,0098$ et $P(M \cap P) = 0,0192$.

b. $P(P) = 0,029$.

Activité 3 Catégories de personnels d'une entreprise

Cette activité permet de découvrir la formule des probabilités totale, grâce au calcul de la probabilité d'un événement, en utilisant un tableau de probabilité puis en utilisant un arbre pondéré.

1. a. $P_M(F) = 0,20$ et $P(M \cap F) = 0,15 \times 0,2 = 0,03$.

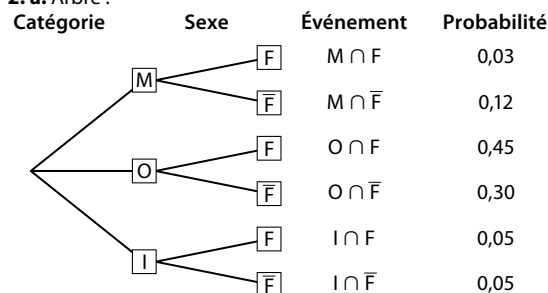
b. $P(O \cap F) = 0,45$ et $P(I \cap F) = 0,05$.

$P(F) = P(M \cap F) + P(O \cap F) + P(I \cap F)$ soit $P(F) = 0,53$.

c. Tableau complété :

	M	O	I	Total
F	0,03	0,45	0,05	0,53
\bar{F}	0,12	0,3	0,05	0,47
Total	0,15	0,75	0,1	1

2. a. Arbre :



b. $P(F) = 0,03 + 0,45 + 0,05 = 0,53$.

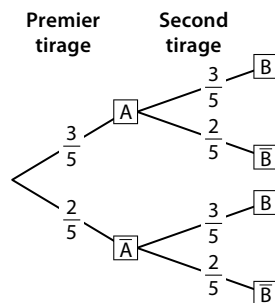
Activité 4 Tirage de boules

Cette activité introduit la notion d'événements indépendants à partir de la comparaison des deux cas classiques : tirage de boules « avec remise », puis tirage de boules « sans remise ».

1. a. $P(A) = \frac{3}{5} = 0,6$.

b. $P_A(B) = \frac{3}{5} = 0,6$.

c.

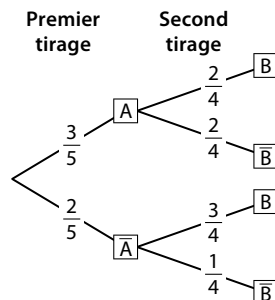


$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{3}{5}$.

d. $P(A \cap B) = \frac{9}{25} = P(A) \times P(B)$.

2. a. $P(A) = \frac{3}{5} = 0,6$.

b.



c. $P_A(B) = \frac{2}{4} = 0,5$.

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{3}{5} = 0,6$.

$P(B) \neq P_A(B)$.

d. $P(A \cap B) = \frac{3}{10} = 0,3$ alors que $P(A) \times P(B) = \frac{9}{25} = 0,36$.

Correctif : dans le cours page 298 dans l'encadré en bas de page sur la formule des probabilités totales il faut lire « Soit A_1, A_2, \dots, A_n , n événements incompatibles deux à deux et tels que leur réunion soit égale à E . » et non pas « Soit un événement A , réunion des événements A_1, A_2, \dots, A_n , deux à deux incompatibles. »

POUR DÉMARRER

1. Non, $P(V)$.

2. Oui, $P_U(V)$.

3. Oui, $P_{\bar{V}}(U)$.

4. Non, $P(\bar{U} \cap \bar{V})$.

2 1. « Parmi », $P_F(R)$.

2. « Un tiers des », $P_H(R)$.

3. « Chez », $P_R(F)$.

4. « Lorsqu'on », $P_H(\bar{R})$.

5. « Parmi », $P_{\bar{R}}(F)$.

3 Voir livre page 428.

$$4 \quad P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,75} = 0,4.$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,8} = 0,375.$$

$$5 \quad P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25.$$

$$P_C(D) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = \frac{0,1}{0,25} = 0,4.$$

6 1. $P(Q) = 0,1$; $P(R) = 0,22$; $P(Q \cap R) = 0,04$.

2. $P_Q(R) = \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)} = \frac{0,04}{0,1} = 0,4$. $P_Q(R)$ est la probabilité que l'exercice choisi soit une question sur les probabilités sachant que c'est un QCM.

$P_R(Q) = \frac{P(Q \cap R)}{P(R)} = \frac{0,04}{0,22} = \frac{2}{11}$. $P_R(Q)$ est la probabilité que l'exercice choisi soit un QCM sachant que c'est un exercice sur les probabilités.

$$7 \quad P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = 0,2 \times 0,3 = 0,06.$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,06}{0,54} = \frac{1}{9}.$$

$$8 \quad P(C \cap D) = P_C(D) \times P(C) = 0,25 \times 0,4 = 0,1.$$

$$P(D) = \frac{P(C \cap D)}{P_C(D)} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}.$$

9 1.

	A	\bar{A}	Total
B	0,3	0,2	0,5
\bar{B}	0,15	0,35	0,5
Total	0,45	0,55	1

$$2. P(\bar{A}) = 0,55 ; P(\bar{A} \cap B) = 0,2.$$

$$3. P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6.$$

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{0,2}{0,55} = \frac{4}{11}.$$

10 Voir livre page 428.

11 1.

	F	G	Total
R	$\frac{12}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{20}{35}$
\bar{R}	$\frac{8}{35}$	$\frac{7}{35}$	$\frac{15}{35}$
Total	$\frac{20}{35}$	$\frac{15}{35}$	1

$$2. P(\bar{R}) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}.$$

$$3. P_F(R) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)} = \frac{12}{20} = 0,6.$$

$P_F(R)$ est la probabilité de choisir un élève étudiant le russe, sachant que c'est une fille.

$$P_{\bar{R}}(G) = \frac{P(\bar{R} \cap G)}{P(\bar{R})} = \frac{7}{15}.$$

$P_{\bar{R}}(G)$ est la probabilité de choisir un garçon sachant que l'élève n'étudie pas le russe.

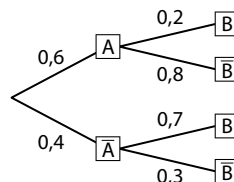
12 Voir livre page 428.

$$13 \quad 1. P(A \cap B) = 0,6 \times 0,75 = 0,45.$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12.$$

$$2. P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,45 + 0,12 = 0,57.$$

14 1.



$$2. P(\bar{A}) = 0,4 ; P_{\bar{A}}(B) = 0,7.$$

$$3. P(A \cap B) = 0,6 \times 0,2 = 0,12 \text{ et } P(\bar{A} \cap B) = 0,4 \times 0,7 = 0,28.$$

$$4. P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,12 + 0,28 = 0,4.$$

15 Voir livre page 428.

$$16 \quad 1. P_B(A) = \frac{5}{8} = 0,625 = P(A).$$

A et B sont indépendants.

$$2. P_A(B) = \frac{1}{7} \approx 0,143 \neq P(B).$$

A et B ne sont pas indépendants

$$17 \quad 1. P(A) \times P(B) = \frac{35}{80} = \frac{7}{16} = P(A \cap B).$$

A et B sont indépendants.

$$2. P(A) \times P(B) = 0,231 \neq P(A \cap B).$$

A et B ne sont pas indépendants.

$$18 \quad 1. P(B) = \frac{0,27}{0,72} = \frac{3}{8}.$$

$$2. P(B) = \frac{6}{125} \times \frac{25}{8} = \frac{3}{20}.$$

19 Voir livre page 428.

$$20 \quad 1. P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,97 \times 0,95 = 0,9215.$$

2. La probabilité est $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ soit 0,9215.

POUR S'ENTRAÎNER

$$21 \quad 1. P(I) = \frac{8}{15} ; P(M) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

$$2. P(\bar{I}) = \frac{7}{15} : \text{probabilité de tirer un numéro pair.}$$

$$P(I \cap M) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} : \text{probabilité de tirer un numéro impair et multiple de trois.}$$

$$P(\bar{I} \cap M) = \frac{2}{15} : \text{probabilité de tirer un numéro pair et multiple de trois.}$$

$$3. P_M(I) = \frac{3}{5} : \text{probabilité de tirer un numéro impair sachant qu'il est multiple de trois.}$$

$P_1(M) = \frac{2}{7}$: probabilité de tirer multiple de trois sachant que c'est un numéro pair.

22 Soit S l'événement « l'abonné a choisi l'option Sport-Live » et C l'événement « l'abonné a choisi l'option Cinéma-Séries ».

1. $P_C(S) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{60}{75} = \frac{4}{5}$.

2. $P_S(C) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$.

23 $P(A \cap B) = 0,72 + 0,47 - 0,88 = 0,31$.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{31}{47} \approx 0,66$.

$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{31}{72} \approx 0,43$.

24 Voir livre page 428.

25 1. $P(R) = \frac{284}{475}$; $P_R(F) = \frac{1}{3}$.

2. $P(R \cap F) = P(R) \times P_R(F) = \frac{284}{1425}$.

27 Soit V l'événement « le ménage possède une voiture » et D l'événement « le ménage possède un deux-roues ».

1. $P(V \cap D) = 0,82 + 0,11 - 0,89 = 0,04$.

2. $P_V(D) = \frac{P(V \cap D)}{P(V)} = \frac{2}{41}$.

28 1. $P(A) = P(X \leq 4) \approx 0,0064$;

$P(B) = P(X \leq 7) \approx 0,3222$.

2. $P(A \cap B) = P(A) \approx 0,0064$.

3. $P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} \approx \frac{0,0064}{0,3222} \approx 0,0199$; $P_A(B) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$.

29 1. $P(X \leq 20) \approx 0,952$;

$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) \approx 0,960$.

2. $P(10 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X < 10) \approx 0,912$.

$P_{X \geq 10}(X \leq 20) = \frac{P(10 \leq X \leq 20)}{P(X \geq 10)} \approx \frac{0,912}{0,960} \approx 0,950$.

30 1. On veut $P(X \geq 4)$, avec X loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,7$.

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,942$.

2. On veut $P_{X \geq 4}(X \leq 6) = \frac{P(4 \leq X \leq 6)}{P(X \geq 4)} \approx \frac{0,687}{0,942} \approx 0,729$.

31 1. Oui, la proposition est vraie.

2. Oui, la réciproque est vraie.

32 VRAI : $P(A \cap B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$.

33 FAUX : $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)}$.

34 VRAI : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq P(A \cap B)$ car $P(A) \leq 1$.

35 1. $P(\bar{A}) = 0,3$ et $P(\bar{B}) = 0,5$.

2.

	A	\bar{A}	Total
B	0,3	0,2	0,5
\bar{B}	0,4	0,1	0,5
Total	0,7	0,3	1

$P_A(B) = \frac{3}{7}$, $P_A(\bar{B}) = \frac{4}{7}$, $P_B(A) = \frac{3}{5}$, $P_B(\bar{A}) = \frac{2}{5}$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{1}{3}$.

36 Correctif : il faut lire « Les pourcentages d'objets défectueux sont respectivement 2 %, 3 % et 4 % de chacune des trois productions ».

1.

Machine \ Boulons	A	B	C	Total
Défectueux	0,012	0,009	0,004	0,025
Non défectueux	0,588	0,291	0,096	0,975
Total	0,6	0,3	0,1	1

2. $P(D) = 0,025$.

3. $P_D(C) = \frac{4}{25} = 0,16$.

37 Correctif : il faut lire « 3. Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un élève qui n'utilise pas régulièrement Internet ».

Voir livre page 428.

38 VRAI.

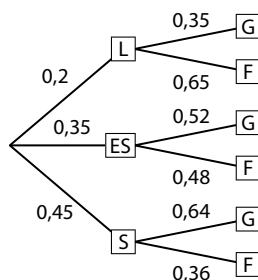
39 VRAI.

40 FAUX : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{32}{48} = \frac{2}{3}$.

41 1. $P(L) = 0,2$: probabilité de choisir un élève de L.

$P_L(G) = 0,35$: probabilité de choisir un garçon parmi les élèves de L.

2.



$P(ES) = 0,35$; $P_L(F) = 0,65$; $P_{ES}(G) = 0,52$; $P_S(G) = 0,64$.

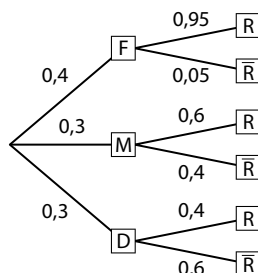
3. $P(F \cap ES) = 0,35 \times 0,48 = 0,168$.

4.

	L	ES	S	Total
Fille	0,13	0,168	0,162	0,46
Garçon	0,07	0,182	0,288	0,54
Total	0,2	0,35	0,45	1

42 Voir livre page 428.

44 1.



2. a. $P(D \cap R) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$.

b. $P(F \cap \bar{R}) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$.

c. $P(R) = 0,4 \times 0,95 + 0,3 \times 0,6 + 0,3 \times 0,4 = 0,68$.

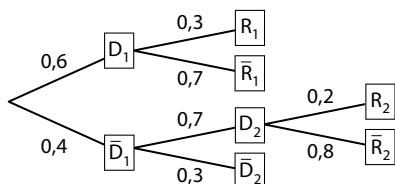
3. $P_{\bar{R}}(M) = \frac{P(\bar{R} \cap M)}{P(\bar{R})} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,32} = \frac{3}{8} = 0,375$.

$$4. P_R(F) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)} = \frac{0,95 \times 0,4}{0,68} = \frac{19}{34} \approx 0,56.$$

La sœur de Pierre a environ 56 % de chances d'avoir raison.

$$45 \quad 1. P(R_1) = P(D_1 \cap R_1) = 0,6 \times 0,3 = 0,18.$$

2.



$$P(R_2) = P(\bar{D}_1 \cap D_2 \cap R_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,2 = 0,056.$$

$$P(R) = P(R_1) + P(R_2) = 0,236.$$

$$3. P_R(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R_1)}{P(R)} = \frac{45}{59} \approx 0,76.$$

46 Voir livre page 428.

47 1. Soit $P(S)$, $P(I)$ et $P(X)$ les probabilités respectives de passer par les points S, I et X.

On a $P(S) = P(X) = 2P(I)$ et $P(S) + P(X) + P(I) = 1$.

Ainsi $5P(I) = 1$, soit $P(I) = \frac{1}{5}$.

$$2. P(E) = P(S) \times P(I) \times P(X) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{125}.$$

3. $P(F)$ est la somme des probabilités de parcourir les « chemins » SIX, SXI, ISX, IXS, XIS et XSI.

$$P(F) = 6 \times \frac{4}{125} = \frac{24}{125}.$$

4. La probabilité qu'aucun des n robots ne passe par les sommets S, I et X dans cet ordre est $\left(\frac{121}{125}\right)^n$.

$$\text{On veut donc : } 1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n \geq 0,99 \text{ soit } n \geq \frac{-2\ln(10)}{\ln\left(\frac{121}{125}\right)}.$$

Il faut au moins 142 robots.

$$48 \quad \text{FAUX : } P(\bar{B}) = 0,4 \times 0,35 + 0,6 \times 0,25 = 0,29.$$

$$49 \quad \text{VRAI : } P(\bar{A} \cap B) = 0,6 \times 0,75 = 0,45.$$

$$50 \quad \text{VRAI : } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,4 \times 0,65}{1 - 0,29} \approx 0,37.$$

$$51 \quad 1. P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{3} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

A et B sont indépendants.

$$2. P(C) = \frac{1}{2} \text{ et } P(A \cap C) = \frac{1}{6}. A \text{ et } C \text{ ne sont pas indépendants.}$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{6}. B \text{ et } C \text{ sont indépendants.}$$

$$52 \quad 1. P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

A et B sont indépendants.

$$2. P(C) = \frac{3}{4} \text{ et } P(A \cap C) = P(A) = \frac{1}{2}.$$

A et C ne sont pas indépendants.

$$P(C) = \frac{3}{4} \text{ et } P(B \cap C) = P(B) = \frac{1}{2}.$$

B et C ne sont pas indépendants.

$$53 \quad 1. \text{ Conséquence de } P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}).$$

$$2. P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) \\ = P(A) \times (1 - P(B)) = P(A) \times P(\bar{B}).$$

$$3. P(A \cap \bar{B}) = 0,4 \times 0,7 = 0,28.$$

$$P(\bar{A} \cup B) = 1 - P(A \cap \bar{B}) = 0,72.$$

$$54 \quad 1. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$\text{Ainsi : } P(A \cap B) = a - \frac{1}{12}.$$

$$a. P(A \cap B) = 0, \text{ on obtient } a = \frac{1}{12}.$$

$$b. P(A \cap B) = a \times \frac{1}{4}, \text{ on obtient } a = \frac{1}{9}.$$

$$c. P(A \cap B) = P(A), \text{ on obtient } a = \frac{1}{3}.$$

$$2. \text{ On a } P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 4P(A \cap B)$$

$$\text{et } P_B(A) = P(A \cap B) \times \frac{1}{a}.$$

$$a. P_A(B) = 0 \text{ et } P_B(A) = 0.$$

$$b. P_A(B) = 4 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{9} \text{ et } P_B(A) = \frac{1}{36} \times 9 = \frac{1}{4}.$$

$$c. P_A(B) = 4 \times \frac{1}{4} = 1 \text{ et } P_B(A) = \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}.$$

$$55 \quad P(A \cup B) + P(\bar{A})P(\bar{B}) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \\ + (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1.$$

57 Voir livre page 428.

$$58 \quad 1. P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,8 \times 0,75 = 0,6.$$

$$2. P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0,2 \times 0,25 = 0,05.$$

Aucun des parents ne répond à l'appel d'Agathe.

$$59 \quad \text{FAUX : } P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B).$$

$$60 \quad \text{VRAI : } P(R) = \frac{1}{8}, P(P) = \frac{1}{4} \text{ et } P(R \cap P) = \frac{1}{32}.$$

61 VRAI.

$$P(A) + P(\bar{A})P(B) = P(A) + (1 - P(A))P(B) \\ = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = P(A \cup B).$$

62 1. $P_M(T)$ est la probabilité que le test soit positif sachant que la personne est malade.

$P_{\bar{M}}(\bar{T})$ est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'est pas malade.

$$2. a. P(M \cap T) = 0,05 \times 0,98 = 0,049.$$

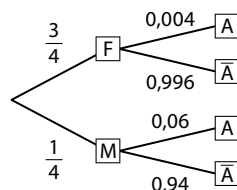
$$P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 1 - 0,99; \text{ ainsi } P(\bar{M} \cap \bar{T}) = 0,95 \times 0,01 = 0,0095.$$

$$b. P(T) = 0,049 + 0,0095 = 0,0585.$$

c. M et T ne sont pas indépendants.

$$3. P_T(M) = \frac{0,049}{0,0585} \approx 0,84.$$

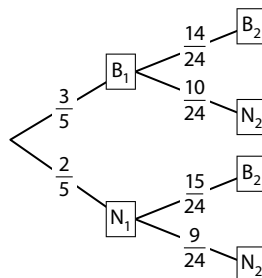
63 1.



$$2. P(A) = P(A \cap F) + P(A \cap M) = 0,018.$$

$$3. P_A(M) = \frac{0,015}{0,018} = \frac{5}{6}. P_A(F) = \frac{0,003}{0,018} = \frac{1}{6}.$$

64 1.



$$2. P(E) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{7}{20}. P(F) = P(N_1 \cap B_2) = \frac{1}{4}.$$

$$3. P(B_2) = \frac{7}{20} + \frac{1}{4} = \frac{3}{5}, P_{B_2}(B_1) = \frac{P(E)}{P(B_2)} = \frac{7}{12} \text{ et } P_{B_2}(F) = \frac{P(F)}{P(B_2)} = \frac{5}{12}.$$

4. $P(B_2 \cap E) = P(E) = \frac{7}{20}$.

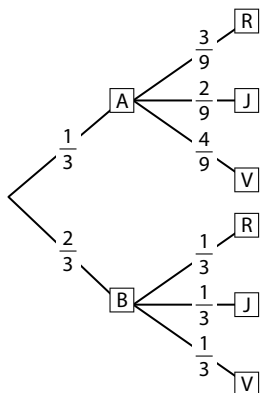
Les événements B_2 et E ne sont pas indépendants.

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 428 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

81



$$P(J) = P(A \cap J) + P(B \cap J) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{27}.$$

82 $P(F) = \frac{15}{35}$; $P(E) = \frac{25}{35}$ et $P(F \cap E) = \frac{5}{35}$.

$$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

► Formule de Bayes

Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

10_TS_appfondissement.ggb (GeoGebra).

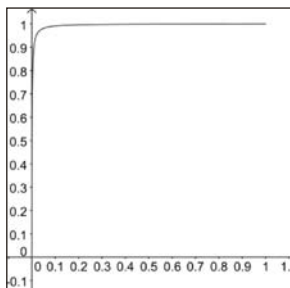
$$\begin{aligned} \triangleright P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B). \end{aligned}$$

$$\text{Alors : } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)}.$$

$$\triangleright P(M) = p; P(\bar{M}) = 1 - p, P_M(T) = 0,99 \text{ et } P_{\bar{M}}(T) = 0,001.$$

$$\triangleright v(p) = P_T(M) = \frac{p \times 0,99}{p \times 0,99 + (1 - p) \times 0,001} = \frac{990p}{989p + 1}.$$

$$\triangleright v'(p) = \frac{990}{(989p + 1)^2}; v \text{ est croissante sur } [0; 1].$$



$$\triangleright v\left(\frac{1}{10\,000}\right) = \frac{10}{111} \approx 0,09.$$

Avec une telle proportion de malades, le test n'est pas efficace : il n'y a que 9 % de chances qu'une personne positive au test soit effectivement malade !

$$\triangleright v(p) = 0,9 \text{ d'où } p = \frac{1}{111} \approx 0,009.$$

$$v(p) = 0,99 \text{ d'où } p = \frac{1}{11} \approx 0,09.$$

83 $P(S_1) = 0,4$; $P(S_2) = 0,6$; $P_{S_1}(D) = 0,04$ et $P_{S_2}(D) = 0,03$.

$$P_D(S_1) = \frac{0,4 \times 0,04}{0,4 \times 0,04 + 0,6 \times 0,03} = \frac{8}{17} \approx 0,47.$$

84 $P(J) = 0,8$; $P(S) = 0,1$; $P(N) = 0,1$; $P_J(A) = 0,04$; $P_S(A) = 0,08$ et $P_N(A) = 0,22$.

$$P_A(J) = \frac{P(J \cap A)}{P(A)} = \frac{P(J \cap A)}{P(J \cap A) + P(S \cap A) + P(N \cap A)} \text{ soit}$$

$$P_A(J) = \frac{P(J) \times P_J(A)}{P(J) \times P_J(A) + P(S) \times P_S(A) + P(N) \times P_N(A)}$$

$$P_A(J) = \frac{0,8 \times 0,04}{0,8 \times 0,04 + 0,1 \times 0,08 + 0,1 \times 0,22} = \frac{16}{31} \approx 0,516.$$

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Marche aléatoire

Ce TP propose d'utiliser des algorithmiques pour simuler une situation de « marche aléatoire » et ainsi pouvoir observer quelques phénomènes. Ces observations permettent ensuite d'aider à la formalisation de certains résultats.

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

10_TS_TP1_A3.alg,

10_TS_TP1_A4.alg,

10_TS_TP1_B1.alg

et 10_TS_TP1_C2.alg (AlgoBox).

A. Premiers résultats

1. a. $S_1 = 1$ ou $S_1 = -1$.

b. $P(D_1) = 0$

2. a.

x_i	-2	0	2
$P(S_2 = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

b. $P(D_2) = P(S_2 = 0) = \frac{1}{2}$.

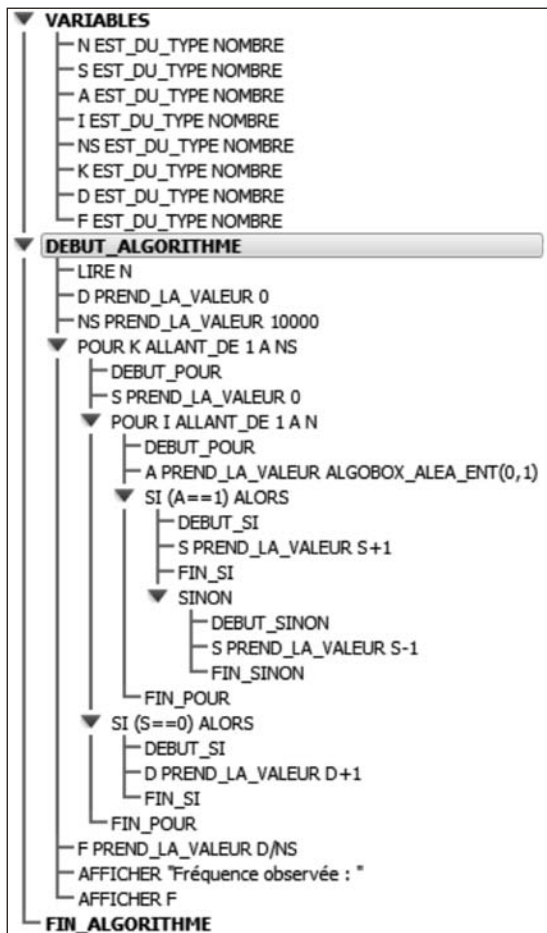
4. a. Variables utilisées :

NS : nombre de simulations

D : nombre de cas où il y a retour à la case départ ($S = 0$)

F : fréquence de retours à la case départ ($F = \frac{D}{NS}$)

Pour modifier le nombre de simulations, il suffit de modifier la valeur de NS.



b. En utilisant l'algorithme précédent, on peut observer que pour $N = 3$ ou $N = 5$, on obtient $F = 0$.

Ainsi $P(D_3) = P(D_5) = 0$.

c. On peut observer que pour N impair, on obtient $F = 0$.

Ainsi $P(D_n) = 0$ pour n impair.

B. Retour à la case départ

1. *Correctif : il faut lire « Modifier l'algorithme ... » et non pas « Utiliser l'algorithme ... ».*

Il suffit de modifier l'algorithme précédent en fixant la valeur de N (instruction « N PREND_LA_VALEUR 4 ») et en laissant à l'utilisateur la possibilité de choisir le nombre de simulations (instruction « LIRE NS »).

2. a.

x_i	-4	-2	0	2	4
$P(S_4 = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

b. $P(D_4) = P(S_4 = 0) = \frac{3}{8}$.

3. a. $P(D_{10}) = \frac{63}{256} \approx 0,246$; $P(D_{100}) \approx 0,080$; $P(D_{1000}) \approx 0,025$.

b. Quand n augmente, $P(D_n)$ se rapproche de 0.

4. a. X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

b. Quand $X_n = k$; $S_n = k \times 1 + (n - k) \times (-1) = 2k - n$.

c. Si $n = 2p$:

$$P(S_n = 0) = P\left(X_n = \frac{n}{2}\right) = P(X_n = p) \\ = \binom{n}{p} \left(\frac{1}{2}\right)^p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p} = \binom{n}{p} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2p}{p} \left(\frac{1}{2}\right)^{2p}.$$

C. Prolongements

1. a. Distance moyenne $= E(|S_n|)$.

$n = 1$: distance moyenne : $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = 1$.

$n = 2$: distance moyenne : $\frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times 2 = 1$.

b. $n = 3$: distance moyenne : $\frac{1}{8} \times 3 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 3 = 1,5$.

c. $n = 4$: distance moyenne : $\frac{4}{16} + \frac{2}{4} + \frac{0}{8} + \frac{2}{4} + \frac{4}{16} = 1,5$.

2. a. Pour chaque simulation, il faut calculer la distance à laquelle se trouve le pion par rapport à la case « départ » au bout des N déplacements. Il suffit pour cela de calculer la valeur absolue de S .

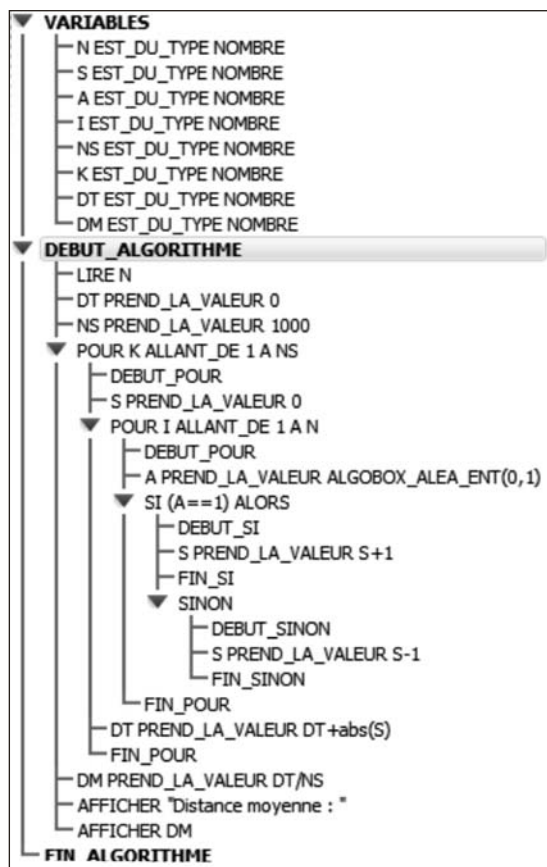
Ensuite, il faut calculer la moyenne de ces distances ($DM = \frac{DT}{NS}$).

Variables utilisées :

NS nombre de simulations ;

DT distance totale sur 1 000 trajets ;

DM distance moyenne pour 1 000 trajets.



c. Quand n augmente, la distance moyenne augmente elle aussi.

TP 2 La loi de Hardy-Weinberg

Ce TP propose d'étudier un phénomène d'hérédité connu : la loi de « Hardy-Weinberg »

Ce modèle a été mis en évidence de façon indépendante au début du XX^e siècle par Hardy, mathématicien, et Weinberg, médecin.

À partir du moment où certaines conditions sont vérifiées, l'équilibre des probabilités, que l'on peut observer à la fin du TP, se produit dès la première génération.

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

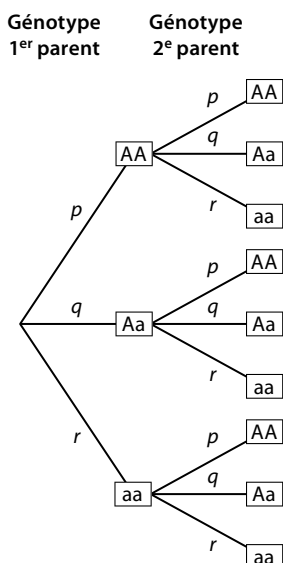
10_TS_TP2.xlsx (Excel 2007),

10_TS_TP2.xls (Excel 2003)

et 10_TS_TP2.ods (OpenOffice).

A. Génotypes des parents

1.



2. a. Probabilité : $p \times p = p^2$.

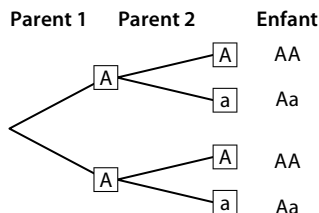
b. Probabilité : $p \times q + q \times p = 2pq$.

3. Voir tableau question B. 3.

B. Génotype de l'enfant

1. Génotype AA.

2.



Les quatre résultats sont équiprobables d'où les probabilités.

3. En procédant de même pour les autres cas, on obtient :

Génotype parents		Probabilité Génotype parents	Probabilités conditionnelles Génotype enfant		
			AA	Aa	aa
AA	AA	p^2	1	0	0
AA	Aa	$2pq$	0,5	0,5	0
AA	aa	$2pr$	0	1	0
Aa	Aa	q^2	0,25	0,5	0,25
Aa	aa	$2qr$	0	0,5	0,5
aa	aa	r^2	0	0	1

4. D'après les données du tableau :

$p_1 = 1 \times p^2 + 0,5 \times 2pq + 0 \times 2pr + 0,25 \times q^2 + 0 \times 2qr + 0 \times r^2$
d'où le résultat.

De même pour q_1 et r_1 .

5. $p_1 = 0,3025$; $q_1 = 0,495$ et $r_1 = 0,2025$.

C. Étude sur plusieurs générations

1. Compléter les lignes 1 et 2 comme sur la copie d'écran de l'énoncé.

2. a. Saisir 1 en A3 ; en B3 entrer la formule : $= (B2 + C2 / 2) ^ 2$.

b. En D3 entrer la formule : $= (D2 + C2 / 2) ^ 2$; en C3 entrer la formule : $= 1 - B3 - D3$.

3. Sélectionner la zone A3:D3 et recopier vers le bas. On observe que les valeurs des probabilités pour les générations 2 et suivantes sont les mêmes que celles de la génération 1.

4. On peut observer que la distribution génotypique est stable à partir de la première génération de descendants quelles que soient les valeurs initiales. C'est la loi de « Hardy-Weinberg »

CAP VERS LE BAC

Sujet A

On considère les événements :

- F : « le livre choisi est français » ;
- R : « le livre choisi est un roman policier ».

1. $\frac{150}{200} = 0,75$: réponse b.

2. $P_R(F) = 0,4$: réponse c.

3. $P(R \cap F) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$: réponse c.

4. $P(F) = 0,4 \times 0,75 + 0,7 \times 0,25 = 0,475$: réponse c.

5. $P_F(R) = \frac{0,3}{0,475} = \frac{12}{19}$: réponse b.

Sujet B

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$ soit $P(B) = \frac{2}{3}$: réponse b.

2. Soit C l'événement « je sors mon chien » et P l'événement « il pleut ».

$$P(C) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{9}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{10}.$$

On en déduit $P_C(\bar{P}) = \frac{P(\bar{P} \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{9}{10} \times \frac{3}{4}}{\frac{7}{10}} = \frac{27}{28}$: réponse d.

Sujet C

1. Voir démonstration, manuel de l'élève p. 300.

2. a. $P(\bar{R} \cap S) = 0,9 \times 0,05 = 0,045$.

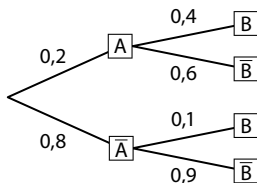
b. $P(\bar{R} \cap \bar{S}) = 0,9 \times 0,95 = 0,855$.

c. X , la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où Stéphane entend son réveil, suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,9$.

La probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois est : $P(X = 4) + P(X = 5) = 0,91854$.

Sujet D

1. a.



b. $P_A(\bar{B}) = 0,6$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,9$.

2. a. $P(A \cap B) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$.

b. $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,08 + 0,08 = 0,16$.

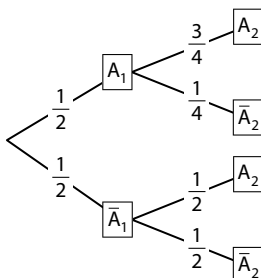
c. A et B ne sont pas indépendants :

$$P(A) \times P(B) = 0,2 \times 0,16 = 0,032 \neq P(A \cap B).$$

3. $P_B(A) = \frac{0,08}{0,16} = \frac{1}{2}$.

Sujet E

1.



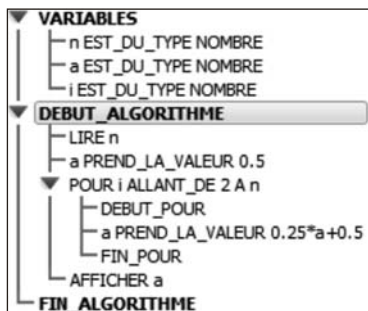
$$a_1 = \frac{1}{2}; b_1 = \frac{1}{2};$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}; b_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

2. $P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\bar{A}_n) \times P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$, soit :

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}.$$

3.



4. a. $U_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}U_n$.

U est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de 1^{er} terme :

$$U_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}.$$

b. $U_n = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, ainsi $a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ converge vers 0 donc a_n converge vers $\frac{2}{3}$.

d. $n \geq 6$.

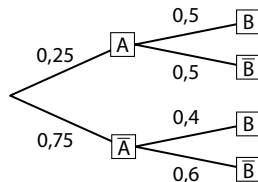
	A	\bar{A}	Total
B	0,5	0,2	0,7
\bar{B}	0,1	0,2	0,3
Total	0,6	0,4	1

2. $P_B(A) = \frac{0,5}{0,7} = \frac{5}{7}$ et $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}$.

3. $P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,7 = 0,42 \neq P(A \cap B)$.

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

85 1.



2. $P_A(B) = 0,5$; $P(B) = 0,25 \times 0,5 + 0,75 \times 0,4 = 0,425$.

$$P(B) \neq P_A(B).$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

3. $P(B) = 0,25 \times 0,5 + 0,75 \times 0,5 = 0,5 = P_A(B)$:

les événements A et B sont indépendants.

87 On considère les événements :

– F : « la fiche choisie est celle d'une fille » ;

– G : « la fiche choisie est celle d'un garçon » ;

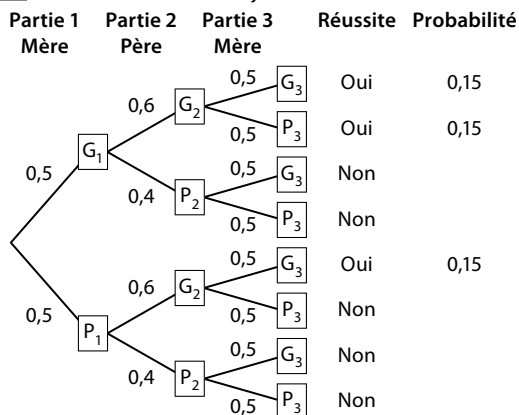
– H : « la fiche choisie est celle d'un élève mesurant plus de 1,55 m ».

$$P(H) = 0,55 \times 0,02 + 0,45 \times 0,05 = 0,0335.$$

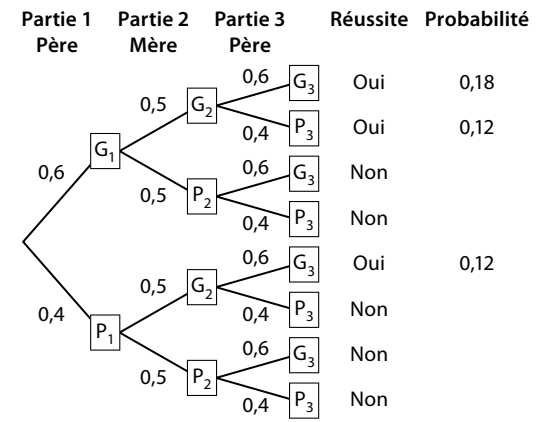
$$P_H(F) = \frac{0,55 \times 0,02}{0,0335} = \frac{22}{67} \approx 0,328.$$

POUR ALLER PLUS LOIN

88 Si Sostène commence à jouer contre sa mère :

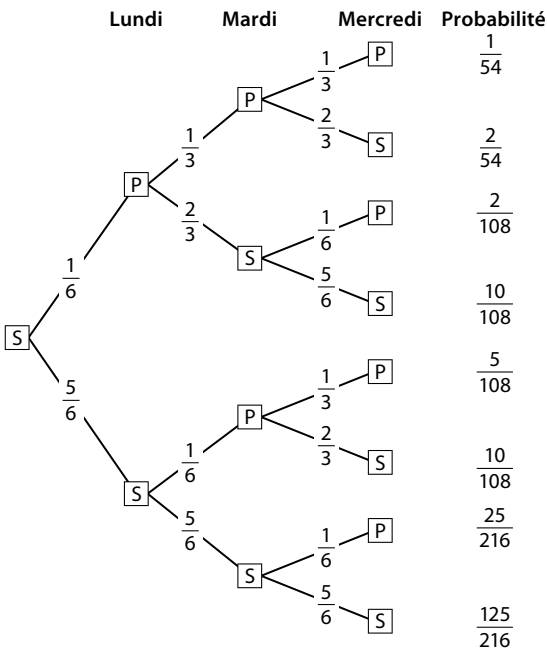


Sa probabilité de réussite est alors 0,45.
 Si Sostène commence à jouer contre son père :



Sa probabilité de réussite est alors 0,42.
 Sostène a intérêt à commencer avec sa mère comme premier partenaire.

- 89 On considère les événements :
- S : « Il fait sec le jour considéré » ;
 - P : « Il pleut le jour considéré ».

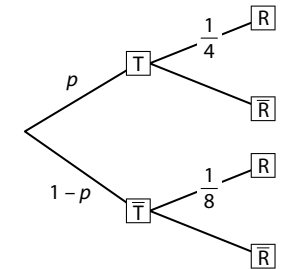


$$P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{29}{36} \approx 0,806.$$

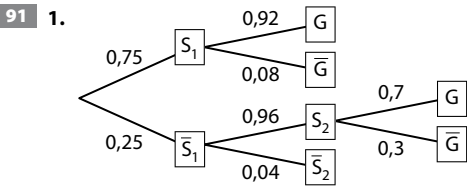
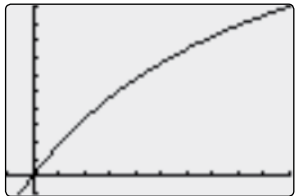
$$P(B) = \frac{1}{54} + \frac{2}{108} + \frac{5}{108} + \frac{25}{216} = \frac{43}{216} \approx 0,199.$$

$$P(C) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 0,579.$$

90 *Correctif: la piste est générale et ne correspond pas à la seule question 2.*



- $P(R) = \frac{1}{4}p + \frac{1}{8}(1-p) = \frac{1}{8}p + \frac{1}{8}.$
- Si $p = 0$, je suis sûr que l'inconnu n'est pas tricheur : $P(R) = \frac{1}{8}.$
 Si $p = 1$, je suis sûr que l'inconnu est tricheur : $P(R) = \frac{1}{4}.$
- $P_R(T) = \frac{\frac{1}{4}p}{\frac{1}{8}p + \frac{1}{8}} = \frac{2p}{p+1} = T(p).$
- Quand p augmente, $T(p)$ augmente en se rapprochant de 1.



- $P(G) = 0,75 \times 0,92 + 0,25 \times 0,96 \times 0,7 = 0,858.$
- $P_G(S_1) = \frac{0,75 \times 0,92}{0,858} \approx 0,804.$
- $P(\text{« Jeu blanc »}) = 0,858^4 \approx 0,542.$

- 92 a. $P(ABCD) + P(ABDC) + P(ACBD) + P(ACDB)$
 $+ P(ADBC) + P(ADCB) = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25}.$
- b. $P(ABCA) + P(ABDA) + P(ACBA) + P(ACDA)$
 $+ P(ADBA) + P(ADCA) = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25}.$
- c. $P(ABAB) + P(ACAC) + P(ADAD) = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$

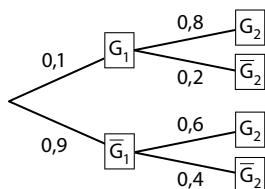
93 1. Il y a 4 choix possibles :

Urne 1	Urne 2	Probabilité de tirer une boule blanche
B	BNN	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
N	BBN	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
NB	NB	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
BB	NN	$\frac{1}{2}$

Il faut choisir la première disposition.

2. a. $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2n-1} = \frac{3n-2}{4n-2}$.
 b. (p_n) est une suite croissante qui converge vers $\frac{3}{4}$.

94 1.



$$p_2 = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,62.$$

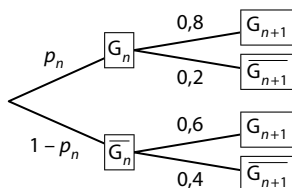
$$2. P_{G_2}(\bar{G}_1) = \frac{0,9 \times 0,6}{0,62} = \frac{27}{31} \approx 0,871.$$

3. La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à $0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$.

La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc :

$$1 - 0,144 = 0,856.$$

4.



$$p_{n+1} = p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}.$$

5. Propriété vraie pour $n = 1$.

Si la propriété est vraie au rang n :

$$\frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n \right) + \frac{3}{5} = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} = p_{n+1}.$$

Elle est vraie au rang $n + 1$.

6. $\left(\frac{1}{5} \right)^n$ converge vers 0, donc p_n converge vers $\frac{3}{4}$.

7. $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ si $n \geq 11$.

95 1. a. $P(V_2) = 0,6$ et $P_{V_2}(V_3) = 0,6$.

Donc $P(V_2 \cap V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

b. 0,36.

2. a. $P(\bar{V}_2) = 0,4$ et $P_{\bar{V}_2}(V_3) = 0,1$.

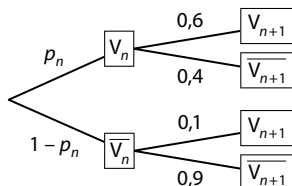
$P(\bar{V}_2 \cap V_3) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$.

b. Correctif : il faut lire « Calculer la probabilité ... » et non pas « En déduire la probabilité ... ».

$P(\bar{V}_2 \cap V_3) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

3. $p_3 = P(V_3) = P(V_2 \cap V_3) + P(\bar{V}_2 \cap V_3) = 0,40$.

4.



5. $p_{n+1} = p_n \times 0,6 + (1 - p_n) \times 0,1 = 0,5 p_n + 0,1$.

6. a. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5 p_n - 0,1 = 0,5 (p_n - 0,2) = 0,5 u_n$.

(u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme

$$u_1 = p_1 - 0,2 = 0,8.$$

b. $u_n = 0,8 \times 0,5^{n-1}$. Ainsi $p_n = 0,8 \times 0,5^{n-1} + 0,2$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,2$.

96 Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

10_TS_exercice96.xlsx (Excel 2007),

10_TS_exercice96.xls (Excel 2003) et

10_TS_exercice96.ods (OpenOffice) ;

10_TS_exercice96_3.alg et

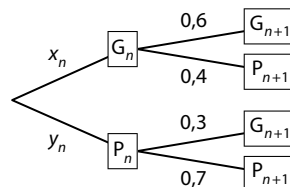
10_TS_exercice96_4.alg (AlgoBox).

1. a. $P(G_1) = 0,5$; $P_{G_1}(G_2) = 0,6$ et $P_{\bar{G}_1}(G_2) = 0,3$.

b. $P(G_2) = 0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,3 = 0,45$; $P(P_2) = 0,55$.

2. a. $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0,6$ et $P_{\bar{G}_n}(G_{n+1}) = 0,4$.

b. On a l'arbre pondéré :



D'où le système.

3. a.

```

VARIABLES
- x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
- y1 EST_DU_TYPE NOMBRE
- N EST_DU_TYPE NOMBRE
- I EST_DU_TYPE NOMBRE
- xn EST_DU_TYPE NOMBRE
- yn EST_DU_TYPE NOMBRE
- xt EST_DU_TYPE NOMBRE
- yt EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME
- x1 PREND_LA_VALEUR 0.5
- y1 PREND_LA_VALEUR 1-x1
- LIRE N
- xn PREND_LA_VALEUR x1
- yn PREND_LA_VALEUR y1
- AFFICHER "Rang 1 : "
- AFFICHER x1
- AFFICHER " , "
- AFFICHER y1
- POUR I ALLANT_DE 2 A N
-   DEBUT_POUR
-   xt PREND_LA_VALEUR 0.6*xn+0.3*yn
-   yt PREND_LA_VALEUR 0.4*xn+0.7*yn
-   xn PREND_LA_VALEUR xt
-   yn PREND_LA_VALEUR yt
-   AFFICHER "Rang "
-   AFFICHER I
-   AFFICHER " : "
-   AFFICHER xn
-   AFFICHER " , "
-   AFFICHER yn
-   FIN_POUR
FIN_ALGORITHME

```

b. À partir de $n = 5$.

c. Les valeurs se stabilisent, autour de 0,42857 pour x_n et autour de 0,57143 pour y_n .

d. Les observations faites à la question c. sont inchangées.

4. a. $x_n + y_n = P(G_n) + P(P_n) = 1$.

b. $w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1} = 0,12x_n - 0,9y_n$
 $= 0,3(4x_n - 3y_n) = 0,3w_n$.

(w_n) est une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $w_1 = 4x_1 - 3y_1 = 0,5$.

Ainsi $w_n = 0,5 \times 0,3^{n-1}$.

5. a. $\begin{cases} x_n + y_n = 1 \\ 4x_n - 3y_n = 0,5 \times 0,3^{n-1} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_n = \frac{3 + 0,5 \times 0,3^{n-1}}{7} \\ y_n = \frac{4 - 0,5 \times 0,3^{n-1}}{7} \end{cases}$

b. $(0,3^{n-1})$ converge vers 0, donc (x_n) converge vers $\frac{3}{7}$ et (y_n) converge vers $\frac{4}{7}$.

97 1. $P(M) = 0,92$; $P(C) = 0,23$ et $P_M(C) = 0,12$.

2. a. $P(M \cap C) = 0,92 \times 0,12 = 0,1104$.

b. Probabilité que le dossier entraîne des frais de réparation matérielle mais pas de frais de dommages corporels :

$$P(M \cap \bar{C}) = 0,92 - 0,1104 = 0,8096.$$

c. $P_C(M) = \frac{0,1104}{0,23} = 0,48$.

3. Soit V l'événement « l'accident est dû à un excès de vitesse ».

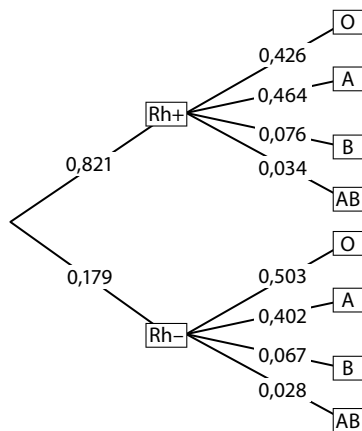
$P(V) = 0,45$ et $P_V(C) = 0,30$.

$P_C(V) = \frac{0,45 \times 0,30}{0,23} \approx 0,587$.

98 1. a. $p_1 = 0,35 + 0,381 + 0,062 + 0,028 = 0,821$.

$p_2 = P_{Rh+}(O) = \frac{0,35}{0,821} \approx 0,426$.

b.



2. a. $P(O) = P(Rh+ \cap O) + P(Rh- \cap O)$

$P(O) \approx 0,821 \times 0,426 + 0,179 \times 0,503 = 0,44$

$P(O) = 0,35 + 0,09$ (tableau).

b. $P_O(Rh+) = \frac{0,35}{0,44} \approx 0,795$.

3. $P(O) = 0,44$ et $P_{Rh+}(O) \approx 0,426$.

Les événements $Rh+$ et O ne sont pas indépendants.

4. a. Probabilité qu'il n'y ait aucune personne du groupe O :

$P(\bar{O})^n = 0,56^n$. Ainsi, $p_n = 1 - 0,56^n$.

b. $p_n \geq 0,999$ pour $n \geq 12$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,56^n = 0$; ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$.

Prises d'initiatives

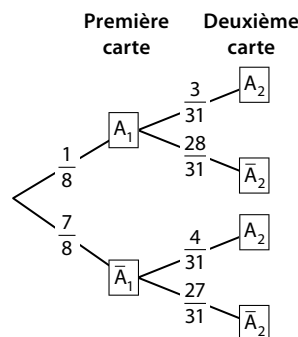
99 $P(R) = \frac{1}{2} \times \frac{n}{n+4} + \frac{1}{2} \times \frac{5-n}{7-n} = \frac{n^2 - 4n - 10}{(n+4)(n+7)}$.

Soit on cherche le sens de variation grâce à la dérivée, soit on fait un tableau de valeurs :

n	0	1	2	3	4	5
P(R)	$\frac{5}{14}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{13}{28}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{18}$

$P(R)$ maximal pour $n = 2$.

100



Probabilité d'avoir au moins un as :

$$P(U) = 1 - \frac{7}{8} \times \frac{27}{31} = \frac{59}{248}.$$

Probabilité d'avoir deux as :

$$P(D) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{31} = \frac{3}{248}.$$

$P(U \cap D) = P(D)$.

$$P_U(D) = \frac{\frac{3}{248}}{\frac{59}{248}} = \frac{3}{59}.$$

101 On désigne par E l'événement « le 1^{er} tire l'allumette brûlée », F l'événement « le 2^e tire l'allumette brûlée », G l'événement « le 3^e tire l'allumette brûlée » et H l'événement « le 4^e tire l'allumette brûlée ».

$P(E) = \frac{1}{4}$.

F est réalisé si c'est le 2^e qui tire l'allumette sachant que le 1^{er} ne l'a pas tirée : $P(F) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

G est réalisé si c'est le 3^e qui tire l'allumette sachant que les deux premiers ne l'ont pas tirée :

$$P(G) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

De même $P(H) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$.

Tous ont la même chance de gagner.

Lois de probabilité à densité

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Notion de loi à densité à partir d'exemples Loi à densité sur un intervalle.		Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω , muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X , fonction de Ω dans \mathbb{R} , qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de \mathbb{R} . On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x; y); x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I . Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.
Loi uniforme sur $[a; b]$. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a; b]$. 	L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur $[0; 1]$. La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $[a; b]$ est introduite à cette occasion par $E(X) = \int_a^b t f(t) dt$. On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
Lois exponentielles.	<ul style="list-style-type: none"> • Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle. 	(AP) Méthode de Monte-Carlo. ☐ On démontre qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{T \geq t}(T \geq t + h) = P(T \geq h).$
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.	☐ Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.	L'espérance est définie comme la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x t f(t) dt$ où f est la fonction de densité de la loi exponentielle considérée. Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes, par exemple sur la radioactivité ou la durée de fonctionnement d'un système non soumis à un phénomène d'usure.
Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et sa représentation graphique. 	Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1. Le théorème de Moivre Laplace assure que
Théorème de Moivre Laplace (admis).	☐ Démontrer que pour : $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. <ul style="list-style-type: none"> • Connaître les valeurs approchées $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$. 	pour tous réels a et b , $P(Z_n \in [a; b])$ tend vers $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

<p>Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. • Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]\}$, $\{X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. 	<p>L'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est définie par $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t f(t) dt + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y t f(t) dt$ où f désigne la densité de cette loi.</p> <p>On peut établir qu'elle vaut 0.</p> <p>On admet que la variance, définie par $E((X - E(X))^2)$, vaut 1.</p> <p>Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.</p> <p>On fait percevoir l'information apportée par la valeur de l'écart-type.</p> <p>⇔ [SI et SPC] Mesures physiques sur un système réel en essai.</p> <p>La connaissance d'une expression algébrique de la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ n'est pas un attendu du programme.</p> <p>On illustre ces nouvelles notions par des exemples issus des autres disciplines.</p>
--	---	--

B Notre point de vue

Ce chapitre a pour objectif l'introduction des lois de probabilité à densité, principalement la loi normale.

La partie « Avant de Commencer » permet une remise en mémoire des lois de probabilité discrètes, particulièrement de la loi binomiale ainsi qu'une révision sur la fonction exponentielle.

La première activité introduit la notion de loi continue, les autres activités permettent la découverte de certaines de ces lois : loi uniforme, loi exponentielle et loi normale centrée réduite.

Ces notions sont reprises dans les pages de cours en respectant les consignes données dans la partie « commentaires » du programme.

Nous avons pensé nécessaire de détailler, dans les pages du cours, l'emploi de la calculatrice pour la détermination de probabilités utilisant des lois normales, conformément au document d'accompagnement des programmes.

De très nombreux exercices d'application sont proposés qui devraient permettre à chaque élève la maîtrise de cet outil. L'Accompagnement personnalisé propose de revoir les points essentiels au cours de deux exercices très simples, puis en approfondissement est présentée la méthode de Monte-Carlo, conformément au programme.

Le TP1, très simple à réaliser, a pour objectif l'utilisation du tableur pour des calculs utilisant la loi normale centrée réduite, tout en permettant la construction d'une table des valeurs de la loi normale centrée réduite, table encore couramment utilisée dans l'enseignement supérieur.

Le TP2 utilise GeoGebra pour des calculs de probabilités avec une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. À cette occasion, on pourra montrer aux élèves les intervalles « 1σ , 2σ , 3σ ».

Le TP3 propose la construction de la droite de Henry et d'un test de normalité.

La rubrique « Cap vers le Bac » propose plusieurs exercices dans lesquels on retrouve les notions du chapitre. Il a pour objectif de fournir un outil permettant à l'élève de s'entraîner avant l'examen.

Les exercices d'approfondissement sont issus d'épreuves de BTS et de concours d'entrée dans des écoles de commerce, ils peuvent être proposés en devoir « maison », certains permettant en outre de travailler des notions d'analyse.

Les notions abordées dans le chapitre 11

1. Lois de probabilité à densité et loi uniforme
2. Loi exponentielle
3. Loi normale centrée réduite
4. Propriétés de la loi normale centrée réduite
5. Lois normales

C Avant de commencer

Voir livre page 429 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

D Activités

Activité 1 L'éco-point

Cette activité introduit la notion de loi continue sur un exemple très simple permettant de visualiser la courbe d'une densité de probabilité et le calcul de probabilités du type $P(0 \leq X \leq t)$ en utilisant l'aire « sous la courbe ».

La définition en cours devrait ainsi être plus facile.

1. a. L'aire est 0,077 et la base est 0,1 donc la hauteur est 0,77.
- b. La somme des aires des 60 rectangles de l'histogramme vaut 1.

c. Sur le graphique la probabilité $P(0 \leq X < 1)$ est représentée par la somme des aires des 10 premiers rectangles.

d. Pour tout décimal t appartenant à $\{0; 0,1; 0,2; \dots; 5,8; 5,9\}$ la somme des aires des rectangles dont la base est sur $[0; t]$ représente la probabilité $P(0 \leq X \leq t)$.

2. a. $\int_0^6 f(x) dx$ est l'aire exprimée en unité d'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction f , les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 6$. On peut estimer sa valeur à $P(0 \leq X < 6)$, c'est-à-dire à 1.

b. Pour tout réel t appartenant à $[0; 6[$:

$$P(0 \leq X < t) = \int_0^t f(x) dx.$$

Activité 2 Tirage de nombres au hasard dans $[0; 1]$

Cette activité introduit conformément au programme la loi uniforme sur $[0; 1]$. L'algorithme proposé pourra être saisi par l'élève dans le cadre d'un exercice « à la maison ».

Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 11_TS_activite2.alg (AlgoBox).

1. a. L'intervalle $[0; 1[$ contient 100 nombres d'au plus 2 décimales et 10^{10} nombres d'au plus 10 décimales.

b. La probabilité d'obtenir 0,2154473089 est de $\frac{1}{10^{10}}$ c'est-à-dire 10^{-10} , cette probabilité est donc « quasi nulle ».

2. $P\left(X = \frac{1}{3}\right) = 0$. On conjecture que $P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ et que :

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

3. a. Puisque f est la densité de probabilité de la loi de X , on a pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$:

$$P(0 \leq X \leq x) = \int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0) = F(x).$$

Or on a convenu de poser pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$: $P(0 \leq X \leq x) = x$.

On a donc pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$:

$$F(x) = P(0 \leq X \leq x) = x.$$

On en déduit : pour tout réel x de $[0; 1]$, $f(x) = F'(x) = 1$.

- b. L'algorithme proposé donne en sortie la moyenne de 10 000 nombres pris aléatoirement dans l'intervalle $[0; 1]$.

c. Les valeurs obtenues après exécution de l'algorithme sont proches de 0,5 et $\int_0^1 t f(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$.

Activité 3 Durée de vie et vieillissement

Cette activité permet la découverte de la loi exponentielle et de la notion de durée de vie sans vieillissement.

1. a. 90 composants tombent en panne au cours de l'année 2 et 81 tombent en panne au cours de l'année 3.

b.

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6
Nombre de pannes	100	90	81	73	66	59
Nombre de composants en fonctionnement à la fin de l'année	900	810	729	656	590	531

c. $U_n = 1\,000 \times (0,9)^n$. La suite (U_n) est la suite géométrique de premier terme 1 000 et de raison 0,9.

2. a.

n	0	1	2	3	4	5	6
$P(T \geq n)$	1,000	0,900	0,810	0,729	0,656	0,590	0,531

b. $P(T \geq n) = (0,9)^n$ et $\frac{P(T \geq n+1)}{P(T \geq n)} = 0,9$.

c. $P_{T \geq n}(T \geq n+1) = 0,9$.

$$P_{T \geq n}(T \geq n+2) = \frac{P(T \geq n+2)}{P(T \geq n)} = 0,81.$$

d. Ces probabilités ne dépendent pas de n , donc ne dépendent pas de l'âge du composant.

Activité 4 Vers la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

Cette activité a pour objectif l'introduction de la loi normale centrée réduite à partir de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Pour cela, on utilise d'abord un tableur qui permet la construction de diagrammes en bâtons, familiers aux élèves.

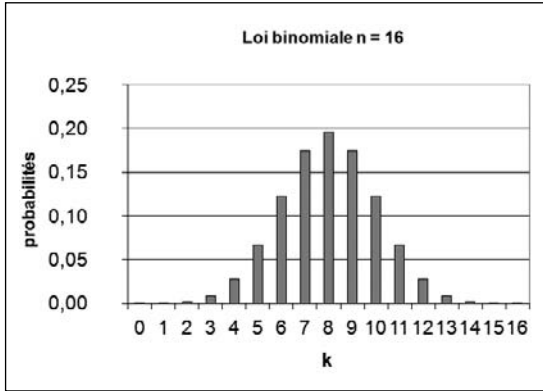
Dans les fichiers tableurs fournis sont traités les cas $n = 16$, $n = 100$ et $n = 200$ avec p variable. Bien entendu, il sera possible de construire sur le même modèle les diagrammes correspondants à d'autres valeurs de n .

Le fichier GeoGebra permet de faire varier simultanément n et p . La courbe représentative de la densité de la loi normale centrée réduite apparaît nettement permettant une introduction plus aisée en cours.

Fichiers associés sur le site www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

- 11_TS_activite4.xlsx (Excel 2007),
- 11_TS_activite4.xls (Excel 2003) ,
- 11_TS_activite4.ods (OpenOffice)
- et 11_TS_activite4.ggb (GeoGebra).

1. a. $\mu = 8$.



Le graphique est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$. Quand on modifie la valeur de p , le graphique se déplace vers la droite quand p augmente et vers la gauche quand p diminue. Le graphique est d'autant moins symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ que p est proche de 0 ou de 1.

On a $P(X = k) = \binom{16}{k} p^k (1 - p)^{16 - k}$ et $\mu = E(X) = 16p$.

$P(X = 16 - k) = \binom{16}{16 - k} p^{16 - k} (1 - p)^k$.

On sait que $\binom{16}{k} = \binom{16}{16 - k}$, donc quand $p = \frac{1}{2}$ on a pour tout entier k compris entre 0 et 16 : $P(X = k) = P(X = 16 - k)$ d'où la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

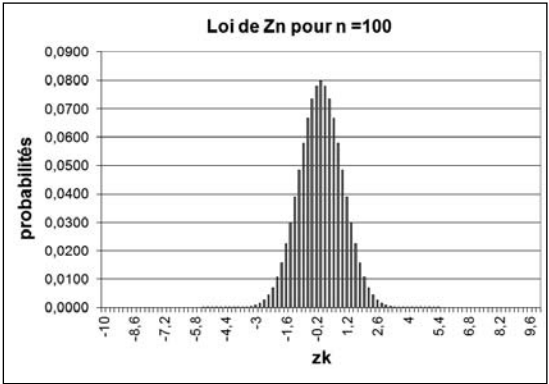
Plus p s'éloigne de $\frac{1}{2}$, plus la différence entre les valeurs de $p^k (1 - p)^{16 - k}$ et de $p^{16 - k} (1 - p)^k$ augmente surtout pour k voisin de 0 ou de 16 ce qui explique la perte de symétrie de la courbe.

b. Quand n augmente, on observe le même déplacement horizontal de la courbe mais plus n est grand moins la perte de symétrie de la courbe quand p s'éloigne de $\frac{1}{2}$ est sensible.

2. a. $E(Z_n) = \frac{1}{\sigma} E(X_n) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \times \mu - \frac{\mu}{\sigma} = 0$.

$V(Z_n) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2$ et $V(X_n) = \frac{1}{\sigma} \times \sigma^2 = 1$.

b. La variable aléatoire Z_n semble prendre la plupart de ses valeurs dans l'intervalle $[-4 ; 4]$.



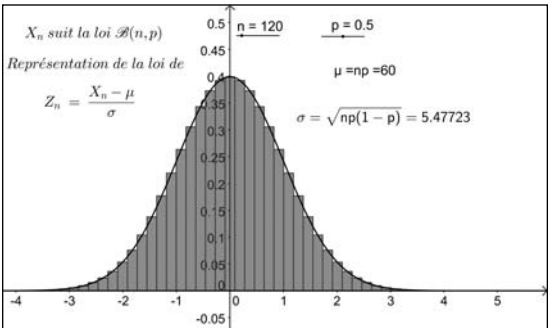
c. Pour $n = 100$, lorsqu'on fait varier p , on observe peu de changement du graphique qui semble demeurer symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 0$ sauf quand p est très proche de 0 ou de 1.

3. Pour pouvoir réaliser un histogramme tel que la somme des aires des rectangles soit égale à 1 et pour pouvoir facilement faire varier n et p , on a utilisé le logiciel GeoGebra.

Quand n est de plus en plus grand, les rectangles deviennent assez vite imperceptibles et sont peu sensibles aux variations de p à condition que p ne soit pas très proche de 0 ou de 1.

Dans tous les cas où n est suffisamment grand et p pas trop proche de 0 ou de 1, on observe une « courbe en cloche », symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction représentée semble avoir pour maximum 0,4 ; atteint en 0. Lorsque n est petit et p proche de 0 ou de 1, le diagramme perd les propriétés observées précédemment.

En conclusion : Quand n est grand la loi de Z_n peut être approchée par la loi d'une variable aléatoire à densité. Cette densité de probabilité est une fonction définie sur \mathbb{R} dont la courbe représentative est une « courbe en cloche », symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



POUR DÉMARRER

- 1** a. $P(X = 5) = 0$.
c. $P(X > 5) = 0,4$.
- 2** a. $P(X > 4) = 0,8$.
c. $P(X < 7) = 0,5$.
- 3** Voir livre page 429.
- 4** a. $P(X > 0) = 1$.
c. $P(1 \leq X \leq 3) = 0,5$.
e. $P(X > 0,5) = 0,75$.
- 5** a. $P(X \leq 0) = 0,5$.
c. $P(X > 0,5) = 0,125$.
- 6** $P(X < 0,2) = 0,2$ et $P\left(X > \frac{3}{7}\right) = \frac{4}{7}$.
- 7** Voir livre page 429.
- 8** 1. $P(A) = \frac{15}{18}$ et $P(A \cap B) = \frac{7}{18}$.
2. $P_A(B) = \frac{7}{15}$.
- 9** 1. La probabilité pour que le temps d'attente de Lisa avant la sonnerie soit compris entre 5 et 10 minutes est $\frac{1}{3}$.
2. Le temps moyen d'attente de Lisa avant la sonnerie est de 12,5 minutes.
- 10** a. $P(0,1 \leq T \leq 0,2) \approx 0,086$. b. $P(T \leq 1) \approx 0,632$.
c. $P(T > 0,5) \approx 0,607$.
- 11** 1. $P(1 \leq T \leq 3) \approx 0,164$. 2. $P(T \leq 5) \approx 0,393$.
3. $P(T > 10) \approx 0,368$. 4. $E(T) = 10$.
- 12** 1. $P_{T \geq 1}(T \geq t + 2) = P(T \geq 2) \approx 0,135$.
2. $P_{T \geq 2}(T \geq 2 + t) = P(T \geq t) \approx e^{-t}$.
- 13** $P_B(A) = P(X \geq 2) = e^{-1} \approx 0,368$.
- 14** Voir livre page 429.
- 15** 1. La durée de vie moyenne de cet élément radioactif est de 33,33 siècles soit 3 333 ans.
2. Pour que $P(T < t)$ dépasse 0,5, on doit avoir $t > \frac{\ln 2}{0,03}$ soit t supérieur à 23,105.
- 16** 1. $\lambda = 1,5$. 2. $P(X < 1) = 1 - e^{-1,5} \approx 0,777$.
- 17** a. $P(1 < X \leq 2) \approx 0,136$. b. $P(-0,5 < X < 1,3) \approx 0,595$.
c. $P(-0,254 \leq X < -0,032) \approx 0,087$.
d. $P(-0,3154 < X \leq 1,5779) \approx 0,566$.
- 18** a. $P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0,683$.
b. $P(0,2 < X \leq 2,1) \approx 0,403$.
c. $P(-1,438 < X < -0,527) \approx 0,224$.
d. $P(-1,6875 \leq X \leq 0,8788) \approx 0,764$.
- 19** a. $P(X > 1,25) \approx 0,106$. b. $P(X < 0,47) \approx 0,681$.
c. $P(X < -0,235) \approx 0,407$. d. $P(X \geq 0,058) \approx 0,477$.
- 20** a. $P(X > -0,02) \approx 0,508$. b. $P(X \leq 1,28) \approx 0,898$.
c. $P(X < -1,415) \approx 0,079$. d. $P(X \leq 1,148) \approx 0,875$.
- 21** Voir livre page 429.

22 a. $P\left(-\frac{10}{7} \leq X \leq \frac{12}{7}\right) \approx 0,880$. b. $P\left(X < \frac{11}{9}\right) \approx 0,889$.

23 $a \approx 0,396$.

24 $b \approx -0,793$.

25 Voir livre page 429.

26 $b \approx -0,184$.

27 1. et 2. $P(-a < X < a) = 0,92 \Leftrightarrow 2\phi(a) - 1 = 0,92$
 $\Leftrightarrow \phi(a) = 0,96$.

3. $a \approx 1,751$.

28 a. $P(10 < X < 20) \approx 0,789$.

b. $P(X < 18) \approx 0,773$.

c. $P(X \geq 16) \approx 0,401$.

d. $P(X < 30) \approx 1$.

29 a. $P(1,9 < X < 2,2) \approx 0,819$.

b. $P(X > 1,88) \approx 0,885$.

c. $P(X \leq 2,17) \approx 0,955$.

d. $P(X < 1) \approx 0$.

30 a. $P(-70 \leq X \leq -10) \approx 0,656$.

b. $P(-60 < X < 10) \approx 0,608$.

c. $P(X < -100) \approx 0,048$.

d. $P(X \geq 3) \approx 0,039$.

31 a. $P(22 < X < 38) \approx 0,890$.

b. $P(X < 27) \approx 0,274$.

c. $P(X > 35) \approx 0,159$.

32 Voir livre page 429.

33 $P(15,7 \leq Y \leq 16,2) \approx 0,907$.

34 1. $a \approx 45,492$.

2. $b \approx 39,712$.

3. $c \approx 41,593$.

4. $d \approx 37,407$.

35 Voir livre page 429.

36 1. $P(200 - \alpha < X < 200 + \alpha) = 0,80$ équivaut à :

$$P\left(\frac{200 - \alpha - 200}{\sqrt{625}} < \frac{X - 200}{\sqrt{625}} < \frac{200 + \alpha - 200}{\sqrt{625}}\right) = 0,80$$

soit à $P\left(-\frac{\alpha}{25} < \frac{X - 200}{25} < \frac{\alpha}{25}\right) = 0,80$.

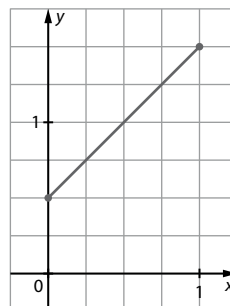
2. La variable aléatoire Y suit la loi normale centrée réduite.

3. $P\left(-\frac{\alpha}{25} < Y < \frac{\alpha}{25}\right) = 0,80 \Leftrightarrow 2P\left(Y < \frac{\alpha}{25}\right) - 1 = 0,80$.
 $\Leftrightarrow 2\phi\left(\frac{\alpha}{25}\right) - 1 = 0,80$.

4. $\phi\left(\frac{\alpha}{25}\right) = 0,9$ d'où $\alpha \approx 32,039$.

POUR S'ENTRAÎNER

37 1. a.



b. f est une fonction continue et positive sur $[0; 1]$.

De plus $\int_0^1 f(x) dx = 1$ donc f est une densité de probabilité sur $[0; 1]$.

2. a. $P(X < 0,25) = \frac{5}{32} \approx 0,156$.

b. $P\left(X > \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9} \approx 0,778$.

c. $P(0,1 < X < 0,7) = 0,54$.

d. $E(X) = \int_0^1 xf(x) dx = \frac{7}{12} \approx 0,583$.

38 1. f est une fonction continue et positive sur $[0; 1]$.

De plus $\int_0^1 f(x) dx = 1$ donc f est une densité de probabilité sur $[0; 1]$.

2. a. $P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} \approx 0,031$.

b. $P(X > 0,1) = 1 - (0,1)^5 \approx 1$.

c. $P(0,2 < X \leq 0,8) = (0,8)^5 - (0,2)^5 \approx 0,327$.

d. $E(X) = \int_0^1 xf(x) dx = \frac{5}{6} \approx 0,833$.

39 1. La fonction inverse étant continue et positive sur

$]0; +\infty[$, la fonction f est continue et positive sur $[1; e]$.

De plus $\int_1^e f(x) dx = \ln e - \ln 1 = 1$ donc f est bien une fonction de densité de probabilité.

2. a. $P(X < 2) = \ln 2 \approx 0,693$; $P\left(X \geq \frac{4}{e}\right) = 2 - 2 \ln 2 \approx 0,614$

et $P\left(\frac{e}{2} < X < \frac{3e}{4}\right) = \ln 3 - \ln 2 \approx 0,405$.

b. $E(X) = e - 1 \approx 1,718$.

40 Voir livre page 429.

41 1. La fonction cosinus est continue et positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$; f est donc bien une fonction de densité de probabilité.

2. a. $P\left(X < \frac{\pi}{3}\right) \approx 0,866$ et $P\left(X > \frac{\pi}{4}\right) \approx 0,293$.

b. $P_{X > \frac{\pi}{4}}\left(X < \frac{\pi}{3}\right) \approx 0,225$.

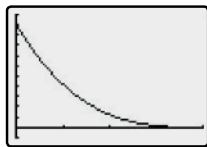
3. a. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$G'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = g(x),$$

donc G est bien une primitive de g sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

b. $E(X) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,571$.

42 1.



2. a. $\int_0^4 f(x) dx = 1$.

b. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{175}{256}$.

c. $\int_1^3 f(x) dx = \frac{5}{16}$.

3. a. La fonction f est continue et positive sur $[0; 4]$.

De plus $\int_0^4 f(x) dx = 1$, donc f est bien une densité de probabilité.

b. $P(0 \leq X \leq 4) = 1$, $P(0 \leq X \leq 1) = \frac{175}{256}$ et

$P(1 \leq X \leq 3) = \frac{5}{16}$.

4. a. $P(A) = \frac{81}{256}$ et $P(B) = \frac{255}{256}$.

b. $P_A(B) = \frac{80}{81}$.

5. $E(X) = \int_0^4 xf(x) dx = 0,8$.

43 1. La proposition est fausse. Contre-exemple :

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \frac{x}{2}$. Il est facile de vérifier que f est une densité de probabilité. Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité a pour densité la fonction f . On a $P(X < 1) = \frac{1}{4}$ et $P(X > 1) = \frac{3}{4}$.

2. Il existe une variable aléatoire X à densité sur $[0; 2]$ telle que :

$$P(X < 1) \neq P(X > 1).$$

44 FAUX, car f est négative sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

45 VRAI car f est continue et positive sur $[-1; 1]$ et :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 1.$$

46 VRAI car la fonction f est continue et positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} (\cos(\pi) - \cos(0)) = 1$.

47 1. $P(X < 10) = \frac{2}{3}$.

2. $P(X > 0,5) = \frac{29}{30}$.

3. Le temps moyen d'attente est de 7 minutes et 30 secondes.

48 1. a. $P(A) = 0,4$. **b.** $P(B) = 0,079$. **c.** $P(C) = 0$.

d. $P(D) = 0,92$. **e.** $P(E) = \frac{4}{7}$. **f.** $P(F) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$.

2. $k = 0,28$.

49 1. f est définie sur $[12; 20]$ par $f(x) = \frac{1}{8}$.

2. a. $P(A) = \frac{3}{8}$.

b. $P(B) = \frac{3}{8}$.

c. $P(C) = \frac{5}{8}$.

d. $P(D) = \frac{19}{40}$.

3. $k = 14$.

4. $t = 16,64$.

5. $E(X) = 16$.

50 1.

Saisir a , b et x

p prend la valeur $\frac{x-a}{b-a}$
Afficher p

2.

TEXAS	CASIO
: Prompt A	"A" ? → A
: Prompt B	"B" ? → B
: Prompt X	"X" ? → X
: $(X-A)/(B-A) \rightarrow P$	$(X-A)/(B-A) \rightarrow P$
: Disp P	P ▲

52 $a = 8$ et $E(X) = 18$.

53 X suit la loi uniforme sur $[a; b]$. On a :

$$P(X < 3) = \frac{3-a}{b-a} \text{ et } P(X < 4) = \frac{4-a}{b-a}.$$

D'où $\frac{3-a}{b-a} = 0,2$ et $\frac{4-a}{b-a} = 0,4$. On en déduit $a = 2$ et $b = 7$.

54 1. $S_1 = \{2; -3\}$ et $S_2 = \{-3; 2\}$.

2. a. Il y a 6 choix possibles. **b.** $\frac{1}{6}$. **c.** $\frac{1}{2}$.

3. a. 0. **b.** $\frac{2}{5}$.

55 L'inéquation $15x^2 - 8x + 1 > 0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty; \frac{1}{5}[\cup \frac{1}{3}; +\infty[$. La probabilité demandée est donc $\frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{13}{5}$.

56 Voir livre page 429.

57 Si $0 < x < 0,25$ alors $0 < 2x < 2x + 0,5 < 1$.

L'intervalle $[2x; 2x + 0,5]$ ne contient pas d'entier.

Si $0,25 < x < 0,5$ alors $0,5 < 2x < 1 < 2x + 0,5 < 1,5$.

L'intervalle contient l'entier 1.

Si $0,5 < x < 0,75$ alors $1 < 2x < 2x + 0,5 < 2$.

L'intervalle ne contient pas d'entier.

Si $0,75 < x < 1$ alors $1,5 < 2x < 2 < 2x + 0,5 < 2,5$.

L'intervalle contient l'entier 2.

Il y a deux intervalles de longueur $\frac{1}{4}$ qui conviennent d'où la probabilité demandée : $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

58 Le raisonnement est le même que pour l'exercice 57.

Si $x \in]0; 0,1[\cup]0,2; 0,3[\cup]0,4; 0,5[\cup]0,6; 0,7[\cup]0,8; 0,9[$ alors l'intervalle $[5x; 5x + 0,5]$ ne contient aucun entier, sinon il en contient 1. Il y a donc 5 intervalles de longueur $\frac{1}{10}$ qui conviennent d'où la probabilité demandée : $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

59 VRAI car $E(X) = \frac{-1+1}{2} = 0$.

60 VRAI car $P(X < 75) = \frac{75}{100} = 0,75$

et $P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) = 1 - \frac{25}{100} = 0,75$.

61 1. La durée de vie moyenne d'un appareil de ce modèle est de 5 ans.

2. $P(X < 7) \approx 0,753$; $P(X > 7) \approx 0,247$ et $P(4 < X < 7) \approx 0,203$.

3. $P_{X>4}(X < 7) \approx 0,451$.

62 1. $\lambda = 1,63 \times 10^{-4}$.

2. Au bout de 4 265 heures environ, la moitié des agendas auront cessé de fonctionner.

63 1. $\lambda = 10^{-5}$.

2. $P(X > 90\,000) \approx 0,407$.

3. $P_{X>90\,000}(X > 110\,000) = P(X > 20\,000) \approx 0,819$.

64 1. $P(X > 10) = e^{-10\lambda}$.

Donc $P(X > 10) = 0,286$ équivaut à $e^{-10\lambda} = 0,286$.

On en déduit $\lambda = \frac{-\ln(0,286)}{10} \approx 0,125$.

2. $P(X < 6) \approx 0,528$.

La probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois est à 10^{-3} près de 0,528.

3. $P_{X>8}(X > 10) = P_{X>8}(X > 8 + 2) = P(X > 2) \approx 0,779$.

Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné 8 ans, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans est à 10^{-3} près de 0,779.

65 Voir livre page 429.

66 1. a. $P(5 < T < 10) = \frac{1}{4}$ équivaut à $e^{-5\lambda} - e^{-10\lambda} = \frac{1}{4}$ soit à :

$$e^{-10\lambda} - e^{-5\lambda} + \frac{1}{4} = 0.$$

b. On pose $X = e^{-5\lambda}$. On résout $X^2 - X + \frac{1}{4} = 0$.

On trouve une solution : $X_0 = \frac{1}{2}$. On en déduit $\lambda = \frac{\ln 2}{5}$.

2. a. $E(T) \approx 7$ heures et 9 minutes. Ce nombre représente la durée moyenne séparant deux pannes informatiques.

b. $P(T > 5) \approx 0,497$.

c. $P_{T>4}(T > 9) = P(T > 5) \approx 0,497$.

67 1. La durée de vie moyenne d'un composant est de 700 jours.

2. $P(T > 120) \approx 0,842$.

3. $P(T > 730) \approx 0,352$.

4. $P_{T>730}(T > 1\,826) = P(T > 1\,096) \approx 0,209$.

5. On aura 10 % des composants en panne au bout de 74 jours.

6. $P(T_A > 300 \cap T_B > 300) = P(T_A > 300) \times P(T_B > 300) \approx 0,424$.

68 Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 11_TS_exercice68.alg (AlgoBox). Correctif : p doit appartenir à l'intervalle $]0; 1[$.

1.

Demander a et p
λ prend la valeur $-\frac{\ln(1-p)}{a}$
Afficher λ

2.

TEXAS	CASIO
: Prompt A	"A" ? → A
: Prompt P	"P" ? → P
: $(-1/A) * \ln(1 - P) \rightarrow L$	$(-1/A) \times \ln(1 - P) \rightarrow L$
: Disp L	L ◀

Pour la programmation sur logiciel : voir fichier.

69 VRAI, car $P(X > 10) \approx 0,4966$.

70 VRAI car $P_{X>10}(X > 10 + 10) = P(X > 10)$.

71 FAUX car $\frac{1}{\lambda} \approx 14,29$; donc la durée de vie moyenne d'un appareil électronique de ce type est de plus de 14 ans.

72 VRAI car $a = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx 9,90$.

73 a. $P(-6 < X < 0) \approx 0,500$. b. $P(X > 12) \approx 0$.

c. $P(X = e) = 0$.

d. $P(X < e) \approx 0,997$.

e. $P(-\sqrt{2} < X < \sqrt{3}) \approx 0,880$.

f. $P_{X>0}(X \leq 1,5) \approx 0,866$.

74 1. $a \approx -0,431$.

2. $b \approx 0,180$.

3. $c \approx 1,335$.

75 $P(-1 < X < a) = 0,76$ d'où $P(X < a) = 0,76 + P(X < -1)$ et $a \approx 1,40$.

76 $\phi(u_{0,2}) = 0,9$ d'où $u_{0,2} \approx 1,282$.

77 Voir livre page 429.

78 a. $S_1 \approx 1,645$.

b. $S_2 \approx 1,645$.

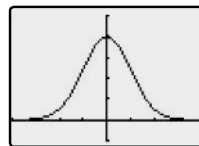
c. $S_3 \approx -1,645$.

d. $S_4 \approx -1,645$.

e. $S_5 \approx 1,960$.

f. $S_6 \approx 1,960$.

79 1.



2. a. $\int_{-6}^6 f(x) dx \approx 1$.

b. $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 0,683$.

c. $\int_0^6 f(x) dx \approx 0,5$.

d. $\int_0^1 f(x) dx \approx 0,341$.

3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

a. $P(-6 < X < 6) \approx 1$.

b. $P(-1 < X < 1) \approx 0,683$.

c. $P(0 < X < 6) \approx 0,5$.

d. $P(0 < X < 1) \approx 0,341$.

4. a. $\int_{-100}^{100} x f(x) dx \approx 0$.

b. L'aire « sous la courbe » de la fonction $x \mapsto x f(x)$ est quasiment nulle en dehors de l'intervalle $[-100; 100]$, le calcul permet de retrouver que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite est 0.

80 Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 11_TS_exercice80.xls (Excel 2007), 11_TS_exercice80.xls (Excel 2003) et 11_TS_exercice80.ods (OpenOffice).

81 Pour tout réel t : $P(-X \leq t) = P(X \geq -t) = P(X \leq t)$, donc $-X$ suit la même loi que X .

82 FAUX car $P(X < -2) \approx 0,023$ et $P(X < 2) \approx 0,977$.

83 FAUX car $P\left(X < \frac{1}{2}\right) \approx 0,691$ et $\frac{P(X < 1)}{2} \approx 0,421$.

84 VRAI car $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 0,5$.

85 VRAI car $1 + P(-0,5 < X < 0,5) = 1 + 2P(X < 0,5) - 1 = 2P(X < 0,5)$.

86 1. 120 kilomètres.

2. a. $P(110 < X < 130) \approx 0,525$. **b.** $P(X > 105) \approx 0,858$.

3. 114 camions car $P(X < 130) \approx 0,762$.

87 **a.** $P(158,5 < X < 166,5) \approx 0,683$.

b. $P(X < 164) \approx 0,646$.

c. $P(X > 170) \approx 0,030$.

d. $P(X < 160) \approx 0,266$.

e. $P_{X > 160}(X < 170) \approx 0,959$.

88 Voir livre page 429.

89 9 545 fruits en moyenne seront acceptés.

90 1. $P(X > 15) \approx 0,841$.

2. $P(15 < X < 25) \approx 0,683$.

3. $P_{X > 15}(X < 25) = \frac{P(15 < X < 25)}{P(X > 15)} \approx 0,811$.

91 1. 40 filles.

2. 127 garçons.

92 1. $P(X > 1 050) \approx 0,1151$.

2. $P(990 < X < 1 035) \approx 0,6107$.

3. $k = 979$. Le poids du sachet qui est tel que 5 % des sachets fabriqués soient plus légers que lui est donc de 979 grammes environ.

4. On cherche k' tel que $P(X > k') = 0,1$ soit tel que :

$$P(X < k') = 0,9.$$

On trouve $k' = 1 052$, d'où un poids de 1 052 grammes.

93 1. 81,76 %.

2. 2,28 %.

3. $Q_1 \approx 2,494$ h soit 2 h 30 min environ.

$Q_2 = 3$ h.

$Q_3 \approx 3,506$ h, soit 3 h 30 min environ.

Q_1 et Q_3 représentent les quartiles et Q_2 la médiane de la population étudiée sous le caractère « temps passé devant la télévision ».

94 Voir livre page 429.

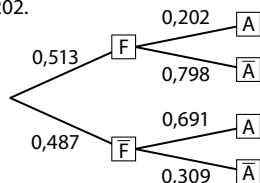
95 1. $P_F(A) = P(X > 170) \approx 0,202$.

$P_F(A) = P(Y > 170) \approx 0,691$.

2. $P(A) \approx 0,440$.

3. $P_A(F) \approx 0,235$.

97 $\mu = 3$ et $\pi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0,94$; d'où $\sigma \approx 0,64$.



98 Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 11_TS_exercice98.alg (AlgoBox).

1. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors cet algorithme donne en sortie l'intervalle $[a; b]$ de centre μ tel que $P(a < X < b) = 0,95$.

2. Voir fichier.

100 $\mu = 1 400$ et $\sigma = 200$.

101 1. **a.** $P(X < 5 800) \approx 0,309$.

b. $P(5 900 < X < 6 100) \approx 0,197$.

c. $P(X > 6 250) \approx 0,266$.

2. a. On cherche k arrondi à l'entier le plus proche tel que $P(X < k) = 0,30$. On trouve $k = 5 790$ d'où une production maximale annuelle prévisible de 5 790 litres pour les 30 % de vaches les moins productives du troupeau.

b. De même on cherche k' tel que $P(X > k') = 0,20$.

On trouve $k' = 6 337$ d'où une production minimale annuelle prévisible de 6 337 litres pour les 20 % de vaches les plus productives du troupeau.

102 1. La proposition est vraie.

En effet si $\mu = \sigma$, alors $P(X \leq \sigma) = P(X \leq \mu) = 0,5$ et :

$$P(X > \sigma) = P(X > \mu) = 0,5.$$

2. Réciproque : « Si $P(X \leq \sigma) = P(X > \sigma)$, alors $\mu = \sigma$ ».

$$P(X \leq \sigma) = P(X > \sigma) \Leftrightarrow P(X \leq \sigma) = 1 - P(X \leq \sigma)$$

$$\Leftrightarrow P(X \leq \sigma) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(X \leq \sigma) = P(X \leq \mu).$$

La réciproque est donc vraie.

103 VRAI car la courbe représentative de la fonction densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

104 FAUX car $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(-1 < Y < 1)$.

105 VRAI car $P(\mu - \sigma^2 < X < \mu + \sigma^2) = P(-\sigma < Y < \sigma)$.

106 FAUX car cela dépend de la valeur de σ .

107 VRAI car $P(X \leq \mu + \sigma) = P(Y \leq 1) \approx 0,841$.

108 1. La durée de vie moyenne d'une ampoule de ce type est de 1 250 heures.

2. $P(T > 1 000) \approx 0,449$.

3. $a \approx 866$.

109 1. $P(68 \leq Z \leq 72) \approx 0,954$.

2. On doit avoir $\phi(h) = 0,995$ d'où $h \approx 2,576$.

3. $P_{Z \geq 68}(Z \leq 72) \approx 0,977$.

110 1. 32 %.

2. 13,7 mois.

111 $\mu \approx 253,85$ grammes.

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 429 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

122 $\lambda \approx 0,26$.

$P(X > 5) \approx 0,273$ et $P_{X>2}(X > 5) = P(X > 3) \approx 0,458$.

123 5,104 kilogrammes.

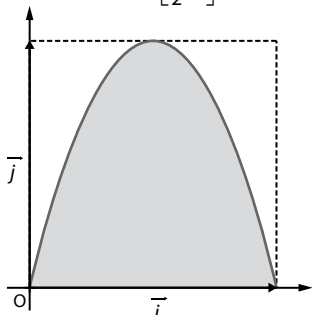
124 4,71 centilitres.

► La méthode de Monte-Carlo

Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

11_TS_approfondissement.alg (AlgoBox).

► f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Le maximum de f est 1, atteint en $\frac{1}{2}$.



Le point $M(x; y)$ du carré S appartient au domaine D si et seulement si :

$$0 \leq y \leq f(x).$$

► X suit la loi binomiale de paramètres N et p où p est la probabilité pour qu'un point pris au hasard dans le carré S appartienne au domaine D . Puisque cette probabilité est proportionnelle à l'aire de D elle est égale à

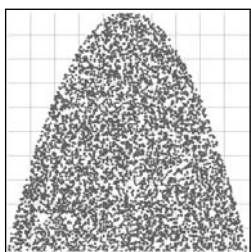
$$p = \frac{\text{aire de } D}{\text{aire de } S} = \text{aire de } D \text{ car } S \text{ est un carré de côté } 1.$$

$$E(X) = N \times p = N \times \text{aire de } D.$$

En répétant un grand nombre de fois cette série de N expériences aléatoires, on peut déterminer une valeur approchée m de $E(X)$. On en déduit alors $p = \text{aire de } D \approx \frac{m}{N}$.

À noter que plus N est grand, moins il est nécessaire d'effectuer de répétitions de la série des N expériences aléatoires pour obtenir une valeur approchée de $E(X)$ donc de p . En effet, pour les très grandes valeurs de N , le nombre de succès est peu fluctuant d'une répétition à l'autre.

► L'algorithme donne en sortie le nombre et la proportion de points se trouvant dans le domaine D lorsque l'on place N points au hasard dans le carré S . Pour les très grandes valeurs de N , il fournit donc une valeur approchée de p donc de l'aire de D . Pour $N = 10\,000$, on a obtenu par exemple le nuage :



et les résultats :

0,6685 – 0,6724 – 0,6675

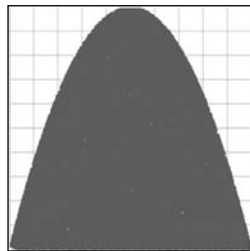
0,6693 – 0,6708 – 0,6742

0,6611 – 0,6650 – 0,6638

0,6695.

Soit en moyenne 0,6821.

Pour $N = 100\,000$, on a obtenu par exemple le nuage :



et les résultats :

0,66345 – 0,67127 – 0,66685

0,67067 – 0,66701 – 0,66699

0,66822 – 0,66574 – 0,66539

0,66851.

Soit en moyenne 0,66771.

Pour $N = 100\,000$, les points n'apparaissent plus sur le graphique.

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 4x - 4x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

L'aire de D est $\frac{2}{3}$, le résultat donné en sortie par l'algorithme est meilleur avec $N = 100\,000$, mais reste correct avec $N = 10\,000$.

125 Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 11_TS_exercice125.alg (AlgoBox).

La valeur exacte de α est $\frac{\pi}{4}$.

126 Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 11_TS_exercice126.alg (AlgoBox).

Pour tout entier $k \in [0; 9]$ et pour tout réel $x \in \left[\frac{k}{10}; \frac{k+1}{10}\right]$, on a $\text{Ent}(10x) = k$ d'où $f(x) = \frac{k}{10}$.

L'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction f et l'axe des abscisses est :

$$a = \sum_{k=0}^9 \frac{k}{10} = \frac{1}{10} \times \frac{9 \times 10}{2} = 4,5.$$

La valeur obtenue en utilisant l'algorithme correspond bien à l'aire calculée ci-dessus.

127 Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

11_TS_exercice127.alg (AlgoBox).

1. F_1 est la fonction de densité de probabilité de la loi normale centrée réduite : $F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2. $X_{\min} = -5$; $X_{\max} = 5$; $Y_{\min} = 0$; $Y_{\max} = 1$.

3. $x = a + (b - a) \times \text{random}()$.

4. Il faut multiplier $\frac{a}{N}$ par $b - a$.

5. La calculatrice donne :

$$P(-1 < T < 1) \approx 0,6827.$$

En faisant fonctionner l'algorithme pour $N = 10\,000$, on a obtenu par exemple :

0,6855 – 0,6812 – 0,6885 – 0,6821 – 0,6795 – 0,6828 –

0,6806 – 0,6802 – 0,6866 – 0,6792 ;

soit une moyenne de 0,6826 proche du résultat donné par la calculatrice.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Table de valeurs de $P(T \leq t)$ où T suit $\mathcal{N}(0, 1)$

Ce TP permet de découvrir comment, avec un tableur, effectuer des calculs utilisant la loi normale centrée réduite.

On commence par la construction d'une table des valeurs de cette loi, cette table étant encore couramment utilisée dans l'enseignement supérieur ; puis on utilise cette table pour déterminer la probabilité de quelques événements.

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 11_TS_TP1.xlsx (Excel 2007), 11_TS_TP1.xls (Excel 2003) et 11_TS_TP1.ods (OpenOffice).

A. Construction de la table

1. Voir fichiers.

2. **Correctif :** l'énoncé doit commencer par « On va calculer $P(T \leq 0,00)$ dans la cellule B2... ».

a. Dans la cellule K14, on va calculer $P(T \leq 3,99)$.

On va calculer $P(T \leq 2,57)$ dans la cellule I27.

c. La formule est **=LOI.NORMALE.STANDARD(\$A2+\$B\$1)**.

d. Les valeurs obtenues sont toutes très proches de 1.

B. Utilisation de la table

a. $P(X \leq 23) = P(T \leq 0,75) = 0,7734$.

$P(X > 15) = P(T > -1,25) = P(T < 1,25) = 0,8944$.

$P(-16 \leq X \leq 16) = P(-9 < T < -1)$
 $\approx P(T < -1) = 1 - P(T < 1)$
 $= 1 - 0,8413 = 0,1587$.

b. $P(X \leq k) = 0,7939 \Leftrightarrow P\left(T \leq \frac{k-20}{4}\right) = 0,7939$
 $\Leftrightarrow P\left(T \leq \frac{k-20}{4}\right) = P(T \leq 0,82)$.

D'où $k = 23,28$.

c. $P(20 - a \leq X \leq 20 + a) = 0,762$ équivaut à :

$$P\left(-\frac{a}{4} \leq T \leq \frac{a}{4}\right) = 0,762 \text{ soit } P\left(T \leq \frac{a}{4}\right) = 0,881$$

d'où $\frac{a}{4} = 1,18$ et $a = 4,72$.

TP 2 Loi normale : observations et calculs

En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, ce TP permet de faire le lien entre probabilité avec une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et calcul d'aire.

Il permet aussi de découvrir les valeurs de $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$ et $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$.

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

11_TS_TP2.ggb, 11_TS_correctionTP2.ggb

et 11_TS_correctionTP2_Imagiciel.ggb (GeoGebra).

1. a. La courbe \mathcal{C} se déplace le long de l'axe des abscisses en restant inchangée.

b. La courbe \mathcal{C} demeure symétrique par rapport à l'axe des ordonnées en s'aplatissant quand σ augmente.

2. Voir le fichier 11_TS_correctionTP2.ggb.

a. $P(2 \leq X \leq 3,5) \approx 0,5328$.

b. $P(X \leq 3,85) \approx 0,8023$ et $P(X > 3,08) \approx 0,4681$.

c. L'utilisation de la calculatrice permet de vérifier les résultats précédents.

3. $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$.

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

Voir le fichier 11_TS_correctionTP2_Imagiciel.ggb.

TP 3 Droite de Henry

Ce TP propose la construction de la droite de Henry, qui est une méthode graphique pour ajuster une distribution gaussienne à celle d'une série d'observations (dans le cas d'une variable numérique continue). En cas d'ajustement satisfaisant, cette droite permet de lire rapidement la moyenne et l'écart type d'une telle distribution.

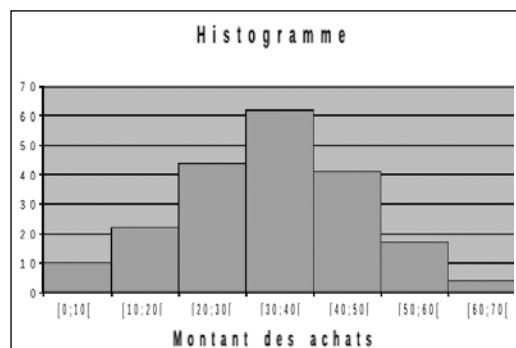
Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 11_TS_TP3.xlsx (Excel 2007), 11_TS_TP3.xls (Excel 2003) et 11_TS_TP3.ods (OpenOffice).

A. Étude d'un relevé statistique

1.

	A	B	C	D	E	F
	Montant	Borne sup xi	Nbre de Clients	Fréquence	Freq cumul	Inv Norm
1						
2	[0;10[10	10	0,05	0,05	-1,6449
3	[10;20[20	22	0,11	0,16	-0,9945
4	[20;30[30	44	0,22	0,38	-0,3055
5	[30;40[40	62	0,31	0,69	0,49585
6	[40;50[50	41	0,205	0,895	1,25357
7	[50;60[60	17	0,085	0,98	2,05375
8	[60;70[70	4	0,02	1	8,16073

2.



On constate une répartition symétrique de la série, la forme de l'histogramme évoquant une courbe de Gauss, on peut donc conjecturer que le montant X dépensé par un client suit approximativement une loi normale.

3. $N = 200$.

4. et 5. Voir les fréquences et les fréquences cumulées croissantes dans le tableau précédent.

6. $P(X < 30) = 0,38$ et $P(X < 60) = 0,98$.

B. Tracé de la droite de Henry

1. On a $P(X < 30) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{30 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(T < \frac{30 - \mu}{\sigma}\right)$ où T suit la loi normale centrée réduite.

Comme on a trouvé $P(X < 30) = 0,38$; on en déduit :

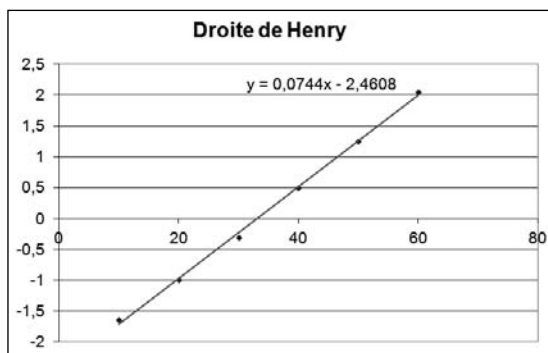
$$\frac{30 - \mu}{\sigma} \approx -0,3054 \approx -0,31.$$

2. a. On utilise la fonction

LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE dans la colonne F.

b. La dernière valeur est aberrante car elle correspond au nombre k tel que $P(X < k) = 1$, en théorie k est donc infini.

Cette valeur est d'ailleurs différente suivant les tableurs utilisés.



3. 4. 5. La droite tracée a pour coefficient directeur $\frac{1}{\sigma}$ et pour ordonnée à l'origine $-\frac{\mu}{\sigma}$. On en déduit $\frac{1}{\sigma} \approx 0,0744$, d'où $\sigma \approx 13,44$ et $\frac{\mu}{\sigma} \approx 2,4608$; d'où $\mu \approx 33,07$.

C. Étude d'un autre exemple

1. La forme de l'histogramme n'évoque pas une courbe de Gauss et lorsque l'on représente les points définis au B.3, ils sont très loin d'être alignés.

2. On représente la série statistique par un histogramme comme défini au A.2. Si la forme de l'histogramme évoque une courbe de Gauss, on peut conjecturer que la variable aléatoire suit approximativement une loi normale. On place les points comme définis au B.3, qui doivent être sensiblement alignés et permettre le tracé de la droite de Henry dont le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine fourniront des valeurs approchées de $\frac{1}{\sigma}$ et de $-\frac{\mu}{\sigma}$, permettant ainsi de déterminer approximativement les paramètres de la loi normale.

CAP VERS LE BAC

Sujet A

1. f est continue et positive sur $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$ et :

$$\int_{\frac{1}{4}}^4 f(x) dx = F(4) - F\left(\frac{1}{4}\right) \text{ avec } F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x}.$$

$\int_{\frac{1}{4}}^4 f(x) dx = \frac{2}{3}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$ donc f est bien une densité de probabilité.

$$2. a. P(X < 2) = F(2) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \approx 0,609.$$

$$b. P(X > 1) = F(4) - F(1) = \frac{2}{3} \approx 0,667.$$

$$3. a. \text{ Pour tout réel } x \in I, G'(x) = k\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right) = k \frac{3\sqrt{x}}{2}.$$

Pour tout réel $x \in I, G'(x) = \sqrt{x} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$.

$$b. E(X) = \int_{\frac{1}{4}}^4 x f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{4}}^4 \sqrt{x} dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(G(4) - G\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{2}{9}\left(4 \times 2 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}.$$

Le temps moyen passé devant un écran par une personne de cette population est de 1 heure $\frac{3}{4}$.

Sujet B

Partie A

1. Réponse b. : $P(2 < X < 4) = e^{-2\lambda} - e^{-4\lambda}$.

$$2. \text{ Réponse c. : } P(X < t) = P(X > t) \Leftrightarrow P(X > t) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\lambda t = -\ln 2.$$

$$3. \text{ Réponse d. : } P_{X \geq 1} P(X \geq 5) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow P(X \geq 4) = \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow e^{-4\lambda} = e^{-1}.$$

Partie B

1. Réponse c. : $P(1 < Y < 2) \approx 0,1359$.

2. Réponse b. : $P(Y < 0,8) \approx 0,7881$.

3. Réponse a. : $P(Y > -1,45) \approx 0,9265$.

4. Réponse b. : Le réel k tel que $P(Y < k)$ est égal à 10^{-4} près à $-0,3853$.

5. Réponse c. : Le réel d tel que $P(-d < Y < d) = 0,6$ est égal à 10^{-4} près à $0,8416$.

Sujet C

1. T suit la loi uniforme sur $[0; 10]$.

a. Le temps d'attente moyen de Monsieur Dulac est de 5 minutes.

$$b. P(T > 7) = 1 - P(T \leq 7) = 1 - \frac{7}{10} = 0,3.$$

2. a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.

$$b. P(X = 0) = 0,7^{10} \approx 0,028.$$

$$c. P(X \leq 5) \approx 0,953.$$

Sujet D

$$1. a. P(X < 2,10) = P(X < 1,95) + P(1,95 < X < 2,10) = 0,96.$$

$$b. P(X < 1,95) = 0,58 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{1,95 - \mu}{\sigma}\right) = 0,58$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{1,95 - \mu}{\sigma}\right) = 0,58$$

car $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$\text{De même } P(X < 2,10) = 0,96 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{2,10 - \mu}{\sigma}\right) = 0,96$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{2,10 - \mu}{\sigma}\right) = 0,96.$$

c. On déduit de la question précédente $\frac{1,95-\mu}{\sigma} = a$ et $\frac{2,10-\mu}{\sigma} = b$ avec $a \approx 0,2019$ et $b \approx 1,7507$ d'où le système :

$$\begin{cases} 1,95 - \mu = a\sigma \\ 2,10 - \mu = b\sigma \end{cases}$$

d. $\mu \approx 1,93$ et $\sigma \approx 0,10$.

2. $P(X > 2,15) \approx 0,00621$ d'où un marché potentiel de 621 personnes.

Sujet E

1. a. Pour tout réel $t \in [0; +\infty[$:

$$G'(t) = (-\lambda At + A - B\lambda)e^{-\lambda t} \text{ et } tf(t) = \lambda te^{-\lambda t}.$$

On en déduit $A = -1$ et $B = -\frac{1}{\lambda}$.

b. $\int_0^b tf(t) dt = G(b) - G(0) = \left(-b - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda b} - \left(0 - \frac{1}{\lambda}\right)e^0$
 $= \frac{1}{\lambda}(-\lambda be^{-\lambda b} - e^{-\lambda b} + 1).$

c. $E(X) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b tf(t) dt.$

$\lim_{b \rightarrow +\infty} -\lambda b = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$, donc $\lim_{b \rightarrow +\infty} -\lambda be^{-\lambda b} = 0.$

$\lim_{b \rightarrow +\infty} -\lambda b = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-\lambda b} = 0.$

D'où $E(X) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b tf(t) dt = \frac{1}{\lambda}.$

2. a. $P(X > 1\,000) = 0,771 \Leftrightarrow e^{-1\,000\lambda} = 0,771.$

D'où $\lambda = -\frac{\ln(0,771)}{1\,000}$ et $\lambda \approx 2,6 \times 10^{-4}.$

b. $\frac{1}{\lambda} \approx 3\,845$. La durée de vie moyenne d'un agenda électronique est de 3 845 heures.

128 $P(X < 45) = 0,7$ et $E(X) = 35.$

129 $E(X) = 5$ et $P(X < 1) = 1 - e^{-0,2} \approx 0,181.$

130 $1 - e^{-5\lambda} = 0,3$ d'où $\lambda = -\frac{\ln(0,7)}{5} \approx 0,07.$

131 1. $P(-1 < X < 2) \approx 0,819$ et $P(X > 0,254) \approx 0,400.$

2. $P(-a < X < a) = 0,95$ pour $a \approx 1,960.$

3. $P(X \leq k) = 0,879$ pour $k \approx 1,170.$

132 $P(60 < X < 70) \approx 0,256.$

$P(X < k) = 0,8257$ pour $k \approx 82,060.$

133 $P(8 \leq X \leq 9) = 0,97 \Leftrightarrow 2\phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\right) - 1 = 0,97$
 $\Leftrightarrow \phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\right) = 0,985.$

On en déduit $\sigma \approx 0,23.$

POUR ALLER PLUS LOIN

134 1. Pour tout réel $x \in]0; +\infty[: f(x) = e^{-x}.$

Pour tout réel $x \in]-\infty; 0[: f(x) = e^x.$

La fonction f est donc continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[.$

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$, f est donc continue en 0, donc sur $\mathbb{R}.$

f est positive sur \mathbb{R} , donc pour que f soit une densité de probabilité il est nécessaire et suffisant que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_{-a}^0 e^x dx + \int_0^a e^{-x} dx \\ &= 1 - e^{-a} + (-e^{-a} + 1) = 2 - 2e^{-a}. \end{aligned}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 1 \Leftrightarrow 2 - 2e^{-a} = 1 \Leftrightarrow e^{-a} = \frac{1}{2} \text{ d'où } a = \ln 2.$$

2. a. $P(X > -0,5) = 1 - P(X \leq -0,5)$

$$= 1 - \int_{-\ln 2}^{-0,5} e^x dx = 1 - e^{-0,5} + e^{-\ln 2}$$

$$= \frac{3}{2} - e^{-0,5} \approx 0,893.$$

b. Pour tout réel $x \in [-\ln 2; \ln 2] :$

$$g(-x) = -xf(-x) = -xe^{-|-x|} = -xe^{-|x|} = -xf(x) = -g(x).$$

c. $E(X) = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} xf(x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} g(x) dx$

$$= \int_{-\ln 2}^0 g(x) dx + \int_0^{\ln 2} g(x) dx.$$

La fonction f étant positive sur \mathbb{R} , la fonction g est positive sur $[0; \ln 2]$ et négative sur $[-\ln 2; 0]$. $\int_0^{\ln 2} g(x) dx$ représente l'aire du domaine limité par la courbe représentative de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2.$

$\int_{-\ln 2}^0 g(x) dx$ représente l'opposé de l'aire du domaine limité par la courbe représentative de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = 0.$

De plus d'après le 2.b. la courbe représentative de g dans un repère est symétrique par rapport à l'origine donc ces deux aires sont égales. On en déduit $E(X) = 0.$

135 Partie A

1. Pour tous réels a et $b :$

$$(b-a)(b^2+ab+a^2) = b^3 - ab^2 + ab^2 + a^2b - a^2b - a^3 = b^3 - a^3.$$

2. On sait que la densité de probabilité de la loi uniforme sur $[a; b]$ est définie par $f(t) = \frac{1}{b-a}$ et que son espérance mathématique est $\frac{b+a}{2}$ d'où :

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b t^2 dt - \frac{(b+a)^2}{4} \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) - \frac{(b+a)^2}{4} \\ &= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} \\ &= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

On en déduit $\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}.$

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{x}{2}}{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}} \right)^2 = +\infty.$$

On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{\frac{x}{2}}{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}} \right)^2 = +\infty.$

2. Pour tout réel $x \in [0; +\infty[:$

$$G'(x) = (-\lambda Ax^2 + (2A - \lambda B)x + B - \lambda C)e^{-\lambda x}.$$

On en déduit $A = -1$, $B = -\frac{2}{\lambda}$ et $C = -\frac{2}{\lambda^2}.$

$$3. I_b = G(b) - G(0) = \left(-b^2 - \frac{2}{\lambda}b - \frac{2}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda b} + \frac{2}{\lambda^2} \\ = \frac{2}{\lambda^2} \left(1 - e^{-\lambda b} - \lambda b e^{-\lambda b} - \frac{(\lambda b)^2}{2} e^{-\lambda b}\right).$$

$$4. \lim_{b \rightarrow +\infty} -\lambda b = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0, \text{ donc } \lim_{b \rightarrow +\infty} -\lambda b e^{-\lambda b} = 0.$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} -\lambda b = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = 0, \text{ donc } \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-\lambda b} = 0.$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \lambda b = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^2} = +\infty, \text{ donc } \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda b}}{(\lambda b)^2} = +\infty.$$

$$\text{D'où } \lim_{b \rightarrow +\infty} (\lambda b)^2 e^{-\lambda b} = 0.$$

$$\text{On en déduit } \lim_{b \rightarrow +\infty} I_b = \frac{2}{\lambda^2}.$$

$$5. V(X) = \lim_{b \rightarrow +\infty} I_b - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$\text{On en déduit } \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ car } \lambda > 0.$$

Partie C

$$1. a. h'(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

b. D'après la question précédente, pour tout réel x :

$$x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = h'(x) + e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$\text{D'où } \int_0^b x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^b h'(x) dx + \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= h(b) - h(0) + \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= h(b) + \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$$2. a. \lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{b^2}{2} = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0, \text{ donc } \lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{b^2}{2} e^{-\frac{b^2}{2}} = 0.$$

$$\text{De plus } \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{2}{b} = 0, \text{ on en déduit par produit : } \lim_{b \rightarrow +\infty} h(b) = 0.$$

$$b. \text{ D'après le cours : } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}.$$

3. a. D'après le 1. b. :

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{h(b)}{\sqrt{2\pi}} + \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

On en déduit :

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{h(b)}{\sqrt{2\pi}} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

b. Par une démarche analogue à celle réalisée aux questions précédentes, on trouve : $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}.$

$$c. V(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \text{ d'où } \sigma(X) = 1.$$

$$136. 1. P(X < 0,35) = 0,95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0,35-0,3}{\sigma}\right) = 0,95, \text{ d'où } \frac{0,05}{\sigma} \approx 1,645. \text{ On en déduit } \sigma \approx 0,03.$$

$$2. a. E(H_n) = 0,3n \text{ et } V(H_n) = (0,03)^2 n, \text{ d'où } \sigma(H_n) = 0,03 \sqrt{n}.$$

b. Les paramètres de H_n sont $\mu = 0,3n$ et $\sigma = 0,03 \sqrt{n}$.

3. a. $P(H_n < 12,5) > 0,975$ équivaut à :

$$P\left(\frac{H_n - 0,3n}{0,03\sqrt{n}} < \frac{12,5 - 0,3n}{0,03\sqrt{n}}\right) > 0,975$$

$$\text{soit à : } \Phi\left(\frac{12,5 - 0,3n}{0,03\sqrt{n}}\right) > \Phi(1,96),$$

$$\text{c'est-à-dire à : } \frac{12,5 - 0,3n}{0,03\sqrt{n}} > 1,96$$

$$\text{ou encore à : } 0,3n + 1,96 \times 0,03 \sqrt{n} - 12,5 < 0.$$

b. On pose $Y = \sqrt{n}$.

$$\text{On résout } 0,3Y^2 + 0,058Y - 12,5 < 0.$$

$$\text{On trouve } S =]Y_1; Y_2[\text{ avec } Y_1 \approx -6,552 \text{ et } Y_2 \approx 6,359.$$

$$\text{On doit donc avoir } \sqrt{n} < 6,359 \text{ soit } n < 40,4.$$

L'inéquation a pour ensemble de solutions $[0; 40] \cap \mathbb{N}$.

On peut donc empiler au maximum 40 tôles.

$$137. 1. P(X < a) = k \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = k \\ \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = k.$$

$$2. P(X > b) = t \Leftrightarrow 1 - P(X \leq b) = t$$

$$\Leftrightarrow P(X \leq b) = 1 - t$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) = 1 - t.$$

$$3. \text{ On a } \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(u) \text{ et } \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(v),$$

$$\text{d'où } \frac{a - \mu}{\sigma} = u \text{ et } \frac{b - \mu}{\sigma} = v.$$

$$\text{On en déduit : } \mu + \sigma u = a \text{ et } \mu + \sigma v = b.$$

4. a. Si $u = v$, on obtient $a = b$. Or on a $a \neq b$.

$$b. \sigma = \frac{a - b}{u - v} \text{ et } \mu = a - \sigma u = \frac{bu - av}{u - v}.$$

5.

Saisir a, b, k et t

u prend la valeur Fracnormale(k) (ou Invnormale(k))

v prend la valeur Fracnormale($1 - t$) (ou Invnormale($1 - t$))

σ prend la valeur $\frac{a - b}{u - v}$

μ prend la valeur $a - \sigma u$

Afficher μ et σ

TEXAS	CASIO
: Prompt A	"A"? → A
: Prompt B	"B"? → B
: Prompt K	"K"? → K
: Prompt T	"T"? → T
: FracNormale(K) → U	InvNormCD(K) → U
: FracNormale(1 - T) → V	InvNormCD(1 - T) → V
: (A - B)/(U - V) → S	(A - B)/(U - V) → S
: A - S * U → M	A - S * U → M
: Disp M	M ▲
: Disp S	S ▲

$$\mu \approx 1400 \text{ et } \sigma \approx 200.$$

$$138. 1. Y = 1200 - X.$$

$$2. a. P(X > 920) \approx 0,091.$$

$$b. P(Y > 315) = P(X < 885) \approx 0,159.$$

c. Les événements « $X > 920$ » et « $Y > 315$ » sont incompatibles donc $p \approx 0,250$.

3. Pour que tous les usagers soient satisfaits, on doit avoir $X \leq 900 + n$ et $Y \leq 300 + n$ soit $1200 - X \leq 300 + n$, c'est-à-dire $900 - n \leq X$. Il faut donc avoir $900 - n \leq X \leq 900 + n$.

On cherche donc n pour que :

$$P(900 - n \leq X \leq 900 + n) \geq 0,995$$

$$\text{qui équivaut à : } P\left(-\frac{n}{15} \leq \frac{X - 900}{\sigma} \leq \frac{n}{15}\right) \geq 0,995$$

$$\text{soit à : } 2\Phi\left(\frac{n}{15}\right) - 1 \geq 0,995$$

$$\text{soit à : } \Phi\left(\frac{n}{15}\right) \geq 0,9975.$$

On en déduit : $\frac{n}{15} \geq 2,8070$ soit $n \geq 42,105$.

La valeur minimale de n est donc 43.

139 Partie A

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

2. Pour tout réel $x \in [1; +\infty[: g'(x) = \frac{100(\exp(-2,72) - 1)}{17(x+1)(x + \exp(-2,72))}$.

g' est strictement négative sur $[1; +\infty[$.

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	
g	$g(1)$	0

$g(1) \approx 3,70$.

Partie B

1. $P(X > 16) = \frac{1}{15} \Leftrightarrow e^{-16\lambda} = \frac{1}{15}$, d'où $\lambda = \frac{\ln 15}{16} \approx 0,169$.

2. a. $P(X \leq R) = 1 - e^{-0,17R}$.

b. $P(R \leq X \leq 16) = e^{-0,17R} - e^{-2,72}$.

c. $P(R \leq X \leq 16) = nP(X \leq R) \Leftrightarrow e^{-0,17R} - e^{-2,72} = n(1 - e^{-0,17R})$
 $\Leftrightarrow e^{0,17R} = \frac{n+1}{n + e^{-2,72}}$.

On doit donc avoir $R = \frac{100}{17} \ln\left(\frac{n+1}{n + \exp(-2,72)}\right)$, c'est-à-dire $R = g(n)$.

3. La fonction g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

Grâce à la calculatrice, on trouve $g(10) \approx 0,522$ et $g(11) \approx 0,477$.

On en déduit que $R > 0,5 \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 10$.

4. $P(R \leq X \leq 16) = 4P(X \leq R) \Leftrightarrow R = g(4)$.

On en déduit $R \approx 1,2$ cm.

5. On prend $R = 1,2$ cm.

a. La probabilité d'atteindre la zone rouge est :

$$P(X \leq 1,2) \approx 0,1845.$$

b. La probabilité d'atteindre la zone bleue est :

$$P(1,2 \leq X \leq 16) \approx 0,7496.$$

c. La probabilité d'atteindre la zone rouge sachant que la cible

a été atteinte est $P_{X \leq 16}(X \leq 1,2) = \frac{P(X \leq 1,2)}{P(X \leq 16)} \approx 0,1977$.

Partie C

On a toujours $R = 1,2$ cm.

1. Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = P(X \leq R)$,
 $p \approx 0,1845$.

2. $P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) \approx 0,0467$.

Le joueur a moins de 5 % de chance d'atteindre au moins 3 fois la zone rouge.

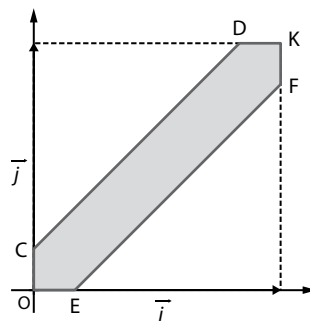
140 1. Si A arrive à 0h30, B doit arriver entre 0h20 et 0h40 pour que les deux amis se rencontrent. L'heure d'arrivée de B doit donc appartenir à l'intervalle $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6}; \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right]$ soit à l'intervalle $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$.

2. Si A arrive à 0h10, l'heure d'arrivée de B doit se situer dans l'intervalle $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ pour que les deux amis se rencontrent.

3. Soit x l'heure d'arrivée de A et y celle de B. Pour que les deux amis se rencontrent, on doit avoir $|y - x| \leq \frac{1}{6}$ c'est-à-dire :

$$-\frac{1}{6} \leq y - x \leq \frac{1}{6} \text{ soit } x - \frac{1}{6} \leq y \leq x + \frac{1}{6}.$$

4.



Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite d'équation $y = x - \frac{1}{6}$ coupe l'axe des abscisses en $E\left(\frac{1}{6}; 0\right)$ et la droite d'équation $x = 1$ en $F\left(1; \frac{5}{6}\right)$.

La droite d'équation $y = x + \frac{1}{6}$ coupe l'axe des ordonnées en $C\left(0; \frac{1}{6}\right)$ et la droite d'équation $y = 1$ en $D\left(\frac{5}{6}; 1\right)$.

x et y sont des heures d'arrivée respectives de A et B compatibles avec une rencontre quand $x - \frac{1}{6} \leq y \leq x + \frac{1}{6}$, c'est-à-dire quand le point de coordonnées $(x; y)$ se trouve dans la zone grise.

5. Puisque l'aire du carré OIKJ est 1, la probabilité pour que les deux amis se rencontrent est l'aire de l'hexagone OEFKDC.

Les triangles EIF et CJD ont chacun pour aire $\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$.

L'hexagone OEFKDC a donc pour aire $1 - \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$, c'est-à-dire $\frac{11}{36}$. La probabilité pour que les deux amis se rencontrent est donc $\frac{11}{36}$.

141 Partie A

1. $P_S(A) = \frac{x}{20}$ et $P_S(B) = \frac{20-x}{20} = 1 - \frac{x}{20}$.

$$P(A) = P(S) \times P_S(A) = \frac{x}{20} \times p = \frac{px}{20}.$$

$$P(B) = P(S) \times P_S(B) = \left(1 - \frac{x}{20}\right)p.$$

$$2. p_x = P_{\bar{A}}(S) = \frac{P(S \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B)}{P(\bar{A})} = \frac{\left(1 - \frac{x}{20}\right)p}{1 - \frac{px}{20}} = \frac{(20-x)p}{20-px}.$$

Partie B

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,2$.

2. a. $T = T_0 + 10X$.

b. La durée moyenne en minutes du parcours d'un candidat est : $E(T) = E(T_0 + 10X) = E(T_0) + 10E(X)$

$$E(T) = 150 + 10 \times 20 \times 0,2 = 150 + 40 = 190.$$

La durée moyenne du parcours d'un candidat est de 190 minutes soit 3 heures et 10 minutes.

3. a. $P(T < 180) = \sum_{k=0}^{20} P((X=k) \cap (T < 180))$ car les événements $\{X=k\}$ pour $0 \leq k \leq 20$ sont deux à deux incompatibles et ont pour réunion l'événement certain $\{0 \leq X \leq 20\}$.

On en déduit : $P(T < 180) = \sum_{k=0}^{20} P_{X=k}(T < 180) P(X=k)$.

b. Pour tout entier k compris entre 0 et 20 :

$$P_{X=k}(T < 180) = P_{X=k}(T_0 + 10X < 180)$$

d'où : $P_{X=k}(T < 180) = P_{X=k}(T_0 + 10k < 180)$.

On en déduit :

$$P(T < 180) = \sum_{k=0}^{20} P_{X=k}(T < 180 - 10k) P(X=k).$$

c.

Variables

K variable entière

P, N, B variables réelles

Initialisation

P prend la valeur 0

Traitement

Pour K variant de 0 à 20

N prend la valeur $P(T_0 < 180 - 10K)$

B prend la valeur $P(X=K)$

P prend la valeur $P + N \times B$

Fin Pour

Sortie

Afficher P

Pour programmer l'algorithme sur la calculatrice, on remarquera que pour tout entier k compris entre 0 et 20 :

$$P(T_0 < 180 - 10k) \approx P(0 < T_0 < 180 - 10k).$$

L'algorithme donne en sortie $P(T < 180) \approx 0,360$.

Prises d'initiatives

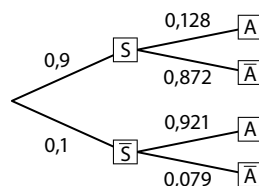
142 Soit X la variable aléatoire modélisant le salaire annuel brut d'un employé syndiqué et Y celle modélisant le salaire annuel brut d'un employé non syndiqué.

$$P(X > 40\,000) \approx 0,128 \text{ et } P(Y > 40\,000) \approx 0,921.$$

On considère un employé choisi au hasard dans l'entreprise.

On note S l'événement : « L'employé est syndiqué » et A l'événement « Le salaire brut annuel de l'employé est supérieur à 40 000 € ».

On construit un arbre pondéré :



On en déduit : $P(A) \approx 0,9 \times 0,128 + 0,1 \times 0,921 \approx 0,207$.

D'où la probabilité pour que l'employé choisi soit syndiqué :

$$P_{\bar{A}}(S) \approx \frac{0,9 \times 0,872}{1 - 0,207} \approx 0,990.$$

143 Dans le cas où la compagnie accepte n réservations, on note X la variable aléatoire modélisant le nombre de personnes confirmant leur réservation et retirant leur billet.

X suit la loi normale de moyenne $0,92n$ et d'écart-type $0,27\sqrt{n}$.

On cherche le plus grand entier n tel que $P(X > 400) < 0,05$,

c'est-à-dire tel que $P\left(T > \frac{400 - 0,92n}{0,27\sqrt{n}}\right) < P(T > 1,645)$ où

T suit la loi normale centrée réduite.

On doit donc avoir :

$$\frac{400 - 0,92n}{0,27\sqrt{n}} > 1,645$$

(car $P(T > a) < P(T > b)$ équivaut à $1 - P(T \leq a) < 1 - P(T \leq b)$ soit à $P(T \leq a) > P(T \leq b)$).

n doit donc vérifier : $0,92n - 0,44415\sqrt{n} - 400 < 0$.

On pose $N = \sqrt{n}$ et on résout $0,92N^2 + 0,44415N - 400 < 0$.

On en déduit $0 \leq \sqrt{n} \leq 20,6115$ d'où $N \leq 424$.

La compagnie peut accepter au maximum 424 réservations.

Échantillonnage et estimation

A Le programme

On approfondit le travail en probabilités et statistique mené les années précédentes.

La loi normale permet d'initier les élèves à la statistique inférentielle par la détermination d'un intervalle de confiance pour une proportion à un niveau de confiance de 95 %.

Cette partie se prête particulièrement à l'étude de problèmes issus d'autres disciplines.

Le recours aux représentations graphiques et aux simulations est indispensable.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Intervalle de fluctuation	<p>☐ Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, alors, pour tout α dans $]0; 1[$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$ où I_n désigne l'intervalle :</p> $\left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$ <p>• Connaître l'intervalle de fluctuation asymptotique (*) au seuil de 95 % :</p> $\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ <p>où p désigne la proportion dans la population.</p>	<p>La démonstration ci-contre donne l'expression d'un intervalle de fluctuation asymptotique (*) au seuil $1 - \alpha$ de la variable aléatoire fréquence $F_n = \frac{X_n}{n}$ qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence obtenue f.</p> <p>Avec les exigences usuelles de précision, on pratique cette approximation dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. En majorant $1,96 \sqrt{p(1-p)}$, on retrouve l'intervalle de fluctuation présenté en classe de Seconde.</p> <p>La problématique de prise de décision, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau avec l'intervalle de fluctuation asymptotique.</p>
Estimation Intervalle de confiance (*). Niveau de confiance.	<p>• Estimer par intervalle une proportion inconnue à partir d'un échantillon.</p> <p>• Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95.</p>	<p>Les attendus de ce paragraphe sont modestes et sont à exploiter en lien avec les autres disciplines.</p> <p>☐ Il est intéressant de démontrer que, pour une valeur de p fixée, l'intervalle contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilité au moins égale à 0,95.</p> <p>On énonce alors que p est élément de l'intervalle avec un niveau de confiance de plus de 95 %, où f désigne la fréquence observée sur un échantillon de taille n.</p> <p>Avec les exigences usuelles de précision, on utilise cet intervalle dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.</p> <p>La simulation de sondages sur tableur permet de sensibiliser aux fourchettes de sondage. Il est important de noter que, dans d'autres champs, on utilise l'intervalle :</p> $\left[f - 1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}; f + 1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \right]$ <p>qu'il n'est pas possible de justifier dans ce programme.</p> <p>⇔ [SVT] Analyse de graphiques où les données sont fournies par des intervalles de confiance.</p> <p>(AP) Prise de décision lors de la comparaison de deux proportions (par exemple lors d'un essai thérapeutique).</p>

(*) Avec les notations précédentes :

- un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F_n au seuil $1 - \alpha$ est un intervalle déterminé à partir de p et de n et qui contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de $1 - \alpha$ que n est grand ;
- un intervalle de confiance pour une proportion p à un niveau de confiance $1 - \alpha$ est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - \alpha$, intervalle aléatoire déterminé à partir de la variable aléatoire fréquence F_n qui, à tout échantillon de taille n , associe la fréquence ;
- les intervalles de confiance considérés ici sont centrés en la fréquence observée f .

B Notre point de vue

Ce chapitre traite les parties « Échantillonnage » et « Estimation » du programme de probabilités.

La partie « Échantillonnage » repose sur la notion d'intervalle de fluctuation asymptotique. Celui-ci est défini après un résultat théorique dont la démonstration (exigible au baccalauréat) utilise le théorème de Moivre-Laplace, vu au chapitre précédent. Ce résultat, difficile à appréhender, est introduit dans l'activité 1 à la fois de façon théorique et aussi en utilisant le tableur.

La seconde partie du cours revient sur la notion de prise de décision sur échantillon, déjà abordée en classe de Première S. Le principe est le même, mais cette fois-ci, les élèves ont à leur disposition deux méthodes, selon que les conditions de validité d'utilisation de l'intervalle de fluctuation asymptotique sont ou non vérifiées. La troisième partie du cours est consacrée à l'estimation, et à la notion d'intervalle de confiance : la justification de l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ nécessite une propriété, démontrée dans le cours. Cette démonstration, au programme, est très riche car elle utilise le théorème de Moivre-Laplace, la définition de la limite d'une suite et l'étude des variations d'une fonction polynôme.

Les exercices, issus de problèmes concrets, permettent de travailler sur la prise de décision à partir d'un échantillon et sur l'utilisation des intervalles de confiance.

Le premier TP revient sur le phénomène évoqué dans la page d'introduction du chapitre, à savoir l'élection présidentielle de 2002 : l'utilisation du tableur et des notions du chapitre permettent de mieux comprendre « l'erreur » des sondages de 2002. Le second TP propose une méthode graphique très précise de détermination des intervalles de confiance, que ce soit avec une calculatrice ou bien un grapheur.

Les notions abordées dans le chapitre 12

1. Échantillonnage
2. Prise de décision à partir d'un échantillon
3. Estimation d'une proportion

C Avant de commencer

Voir livre pages 429 et 430 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

Les notions abordées dans ces exercices permettent, d'une part de travailler sur les intervalles et les inégalités, notions très utiles dans ce chapitre, d'autre part de réactiver les connaissances sur la loi binomiale et la loi normale, puisque ces lois interviennent en plusieurs points du chapitre.

Activité 1 Un sac de bille

Cette activité a pour but de donner du sens à la formule du cours donnant un intervalle de fluctuation asymptotique d'une fréquence.

Pour cela, on se place dans le cas concret du tirage de billes dans un sac dont on connaît la répartition ; ainsi, p est égal à 0,2 dans toute l'activité.

Pour cela, on détermine dans un premier temps l'intervalle :

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

dans le cas $n = 100$, on constate alors par un calcul effectif utilisant la loi binomiale que la probabilité que la fréquence soit dans cet intervalle est voisine de 0,95.

On conforte ce résultat pour d'autres valeurs de n (de plus en plus grandes) à l'aide du tableur : pour cela, on place les points d'abscisse n et d'ordonnée cette probabilité. On constate que cette probabilité se rapproche de 0,95 pour n grand. Le qualificatif d'intervalle de fluctuation « asymptotique » est ici bien illustré par le graphique.

Enfin, dans un troisième temps, on démontre la formule dans le cas particulier où $p = 0,2$, ce qui permet au professeur de faire ensuite la démonstration du cours en changeant uniquement 0,2 en p .

Fichiers associés sur le site www.bordas-indexe.fr et sur le manuel numérique premium :

12_TS_activite1.xlsx (Excel 2007),

12_TS_activite1.xls (Excel 2003)

et 12_TS_activite1.ods (Open Office).

1. a. X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,2$.

b. La variable aléatoire F_n représente la fréquence des billes rouges tirées dans les échantillons de taille n .

2. a. On trouve $s = 0,04$. $I = [0,1216 ; 0,2784]$.

b. $P(F_n \in I) = P\left(0,1216 \leq \frac{X_n}{100} \leq 0,2784\right)$
 $= P(12,16 \leq X_n \leq 27,84)$
 $= P(13 \leq X_n \leq 27) \approx 0,941$, à 10^{-3} près.

3. a. Le premier point placé sur le graphique est :

$$\left(100 ; P\left(\frac{X}{100} \in I\right)\right), \text{ c'est-à-dire } (100 ; 0,941).$$

b. Une lecture rapide du graphique montre que ces probabilités sont comprises entre 0,935 et 0,965. De façon plus précise, on peut observer que $0,938 < P\left(\frac{X_n}{n}\right) < 0,961$, pour n compris entre 100 et 800.

4. a. $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{0,2 \times 0,8n} = 0,4\sqrt{n}$.

$$\text{Ainsi } Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Le théorème de Moivre-Laplace (voir p. 328) dit que la limite de $a_n = P(-1,96 \leq Z_n \leq 1,96)$ quand n tend vers $+\infty$ est égale à $P(-1,96 \leq X \leq 1,96)$, où X suit la loi normale centrée réduite.

D'après le cours sur la loi normale, cette limite est donc égale à $0,95$ à 10^{-3} près.

$$\begin{aligned} \text{b. } -1,96 \leq Z_n \leq 1,96 &\Leftrightarrow -0,784\sqrt{n} \leq X_n - 0,2n \leq 0,784\sqrt{n} \\ &\Leftrightarrow 0,2n - 0,784\sqrt{n} \leq X_n \leq 0,2n + 0,784\sqrt{n}. \end{aligned}$$

c. La double inégalité précédente équivaut à :

$$0,2 - \frac{0,784}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq 0,2 + \frac{0,784}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, en posant $u_n = \frac{0,784}{\sqrt{n}}$, on a bien :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(0,2 - u_n \leq F_n \leq 0,2 + u_n) = P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \text{ (où } X \text{ suit } \mathcal{N}(0, 1)).$$

d. Dans l'onglet « Intervalles de fluctuation », on a représenté les intervalles $[0,2 - u_n ; 0,2 + u_n]$ pour n égal à 100, 500, 1 000, 5 000 et 10 000. On observe qu'ils sont tous centrés en 0,2 et que leur amplitude décroît avec n .

Activité 2 Malvoyants moyens ou profonds

Cette activité permet de revenir sur la notion de prise de décision à partir d'un échantillon vue en Première avec la loi binomiale, puis de découvrir que l'intervalle de fluctuation asymptotique permet de développer aussi cette méthode, avec l'avantage d'une formule explicite.

1. a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,018$.

b. On trouve $a = 3$ et $b = 13$.

c. Un intervalle de fluctuation de la fréquence de malvoyants est $I = \left[\frac{3}{400} ; \frac{13}{400}\right]$, soit $[0,007 ; 0,033]$ à 10^{-3} près.

d. Règle de décision : « Si la fréquence observée f de malvoyants moyens ou profonds dans les échantillons de taille 400 appartient à I , on accepte l'hypothèse $p = 0,018$, sinon on la rejette ».

Ici, $f = 0,0375 : f \notin I$, donc on rejette cette hypothèse.

2. a. $p = 0,018 ; n = 400, np = 7,2$ et $n(1-p) = 392,8$, donc les conditions de validité sont remplies. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 est $I' = [0,004 ; 0,032]$, à 10^{-3} près.

b. La règle de décision est obtenue en remplaçant I par I' . On se rend compte que les deux intervalles ne coïncident pas.

La seconde méthode fait intervenir une formule, contrairement à la méthode vue en Première.

Activité 3 Intervalles de fluctuation

Cette activité illustre le passage de l'intervalle de fluctuation asymptotique vu dans le cours précédemment à l'intervalle de fluctuation vu en Seconde. Le tableur permet de montrer l'écart existant entre ces deux intervalles selon les valeurs de p et de n . En particulier, on se rend compte que, pour n grand, l'écart est très faible.

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

12_TS_activite3.xlsx (Excel 2007),

12_TS_activite3.xls (Excel 2003)

et 12_TS_activite3.ods (Open Office).

1. a. Expression d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 de la fréquence d'un caractère dans un échantillon de taille n :

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

b. $\phi'(p) = 1 - 2p$, donc $\phi'(p)$ s'annule en $\frac{1}{2}$.

ϕ est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, son maximum est $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

c. $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ sur $[0; 1]$, donc $\phi(p) \leq \frac{1}{2}$ sur $[0; 1]$.

d. $1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1,96 \times 0,5}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc

$$p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \geq p - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

donc I_n est inclus dans J_n .

e. Puisque I_n est inclus dans J_n , la probabilité pour que la fréquence appartienne à J_n est supérieure à celle que la fréquence appartienne à I_n , donc J_n est un intervalle de fluctuation asymptotique à un seuil au moins égal à celui de l'intervalle I_n .

2. Le tableur calcule les valeurs $P\left(\frac{X_n}{n} \in J_n\right)$ pour diverses valeurs de p et de n .

La droite d'équation $y = 0,95$ est aussi tracée, afin de conjecturer à partir de quelle valeur de n les probabilités $P\left(\frac{X_n}{n} \in J_n\right)$ restent supérieures à 0,95.

a. On peut conjecturer que les probabilités $P\left(\frac{X_n}{n} \in J_n\right)$ sont toujours supérieures à 0,95.

b. On peut conjecturer que $v_n \geq 0,95$:

– pour $n \geq 31$ dans le cas $p = 0,35$;

– pour $n \geq 81$ dans le cas $p = 0,40$;

– pour $n \geq 271$ dans le cas $p = 0,45$.

c. Pour $p = 0,5$, on conjecture à l'aide du tableur que $n_0 = 529$. C'est pour $p = 0,5$ que n_0 semble être le plus grand : en effet, c'est pour cette valeur que la fluctuation est la plus importante puisque la variance est maximale pour $p = 0,5$ (la variance est égale à $p - p^2$).

Activité 4 Le grand stade

Dans cette activité, on introduit la notion d'intervalle de confiance à partir de l'intervalle de fluctuation $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ vu précédemment, et on fait réfléchir l'élève sur ce qu'apporte (ou n'apporte pas) cet intervalle.

1. D'après le cours, $\left[p - \frac{1}{\sqrt{1\,024}} ; p + \frac{1}{\sqrt{1\,024}}\right]$ est un intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence au seuil de 0,95 dans les échantillons de taille 1 024, et $\frac{1}{\sqrt{1\,024}} = 0,03125$, donc la probabilité de l'événement « $F \in [p - 0,03125 ; p + 0,03125]$ » est au moins 0,95.

2. $p - 0,03125 \leq F \leq p + 0,03125$ équivaut à :

$$F - 0,03125 \leq p \leq F + 0,03125,$$

donc $P(p \in [F - 0,03125 ; F + 0,03125]) \geq 0,95$.

3. a. $f = \frac{576}{1\,024} = 0,5625$.

b. $[f - 0,03125 ; f + 0,03125] = [0,53125 ; 0,59375]$: p n'appartient pas obligatoirement à cet intervalle.

4. a. La proportion p appartient à environ 95 % de ces intervalles.

b. Oui, c'est possible. La seule chose que l'on sait, c'est que p appartient à environ 95 % des intervalles de la forme $[f - 0,03125 ; f + 0,03125]$. L'échantillon du sondage ne fait pas obligatoirement partie de ces 95 % d'échantillons mentionnés plus haut.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 a. $n = 30$, $np = 6$ et $n(1-p) = 24$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

b. $n = 200$, $np = 2$ et $n(1-p) = 198$, donc la condition $np \geq 5$ n'est pas vérifiée.

c. $n = 50$, $np = 47,5$ et $n(1-p) = 2,5$, donc la condition $n(1-p) \geq 5$ n'est pas vérifiée.

d. $n = 10\,000$, $np = 10$ et $n(1-p) = 9\,990$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

2 $n = 100$, $np = 50$ et $n(1-p) = 50$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation est $[0,402 ; 0,598]$.

3 Voir livre p. 430.

4 $n = 1\,000$, $np = 710$ et $n(1-p) = 290$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation est $[0,68 ; 0,74]$, à 0,01 près.

5 $n = 100$, $np = 20$ et $n(1-p) = 80$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 0,95 est $[0,121 ; 0,279]$, à 0,001 près.

6 $n = 400$, $np = 160$ et $n(1-p) = 240$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 0,99 est $[0,33 ; 0,47]$, à 0,01 près.

7 $2 \times 1,96 \times \frac{0,5}{\sqrt{n}} = 0,049$, soit $\sqrt{n} = 40$, ce qui donne $n = 1\,600$.

8 1. $n = 900$, $np = 675$ et $n(1 - p) = 225$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation est $I = [0,72 ; 0,78]$, à 0,01 près.

2. Règle de décision : soit f la fréquence observée ; si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse au seuil de confiance 95 %, sinon on la rejette.

3. $f = \frac{550}{900} \approx 0,61$; $f \notin I$, donc on n'accepte pas l'hypothèse du président au seuil de confiance 95 %.

9 Voir livre p. 430.

10 $f = \frac{63}{350} = 0,18$; $n = 350$, $nf = 63$ et $n(1 - f) = 287$, donc les conditions de validité sont vérifiées.
Un intervalle de confiance est $[0,12 ; 0,24]$.

11 Voir livre p. 430.

12 $f = \frac{32}{400} = 0,08$; $n = 400$, $nf = 32$ et $n(1 - f) = 368$, donc les conditions de validité sont vérifiées.
Un intervalle de confiance est $[0,03 ; 0,13]$.

13 $f = \frac{28}{200} = 0,14$; $n = 200$, $nf = 28$ et $n(1 - f) = 172$, donc les conditions de validité sont vérifiées.
Un intervalle de confiance est $[0,06 ; 0,22]$.

14 $f = 0,77$; $n = 200$, $nf = 154$ et $n(1 - f) = 46$, donc les conditions de validité sont vérifiées.
Un intervalle de confiance est $[0,69 ; 0,85]$.

POUR S'ENTRAÎNER

15 $n = 100$, $np = 51$ et $n(1 - p) = 49$, donc les conditions de validité sont vérifiées.
Un intervalle de fluctuation est $[0,412 ; 0,608]$, à 10^{-3} près.

16 $n = 2\,000$, $np = 440$ et $n(1 - p) = 1\,560$, donc les conditions de validité sont vérifiées.
Un intervalle de fluctuation est $[0,201 ; 0,239]$, à 10^{-3} près.

18 Voir livre p. 430.

19 $n = 1000$, $np = 529$ et $n(1 - p) = 471$, donc les conditions de validité sont vérifiées.
Un intervalle de fluctuation est $[0,488 ; 0,570]$, à 10^{-3} près.

20 $n = 100$, $np = 60$ et $n(1 - p) = 40$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

a. On recherche d'abord $u_{0,2}$ tel que $P(-u_{0,2} \leq X \leq u_{0,2}) = 0,80$, où X suit $\mathcal{N}(0, 1)$.
On a alors $P(X \leq u_{0,2}) = 0,9$, et $u_{0,2} \approx 1,282$ avec la calculatrice.
Un intervalle de fluctuation au seuil 0,80 est $[0,537 ; 0,663]$, à 10^{-3} près.

b. On recherche d'abord $u_{0,1}$ tel que $P(-u_{0,1} \leq X \leq u_{0,1}) = 0,90$, où X suit $\mathcal{N}(0, 1)$. On a alors $P(X \leq u_{0,1}) = 0,95$ et $u_{0,1} \approx 1,645$ avec la calculatrice. Un intervalle de fluctuation au seuil 0,90 est $[0,519 ; 0,681]$, à 10^{-3} près.

21 $n = 100$, $np = 30$ et $n(1 - p) = 70$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

a. On recherche d'abord $u_{0,07}$ tel que :

$$P(-u_{0,07} \leq X \leq u_{0,07}) = 0,93, \text{ où } X \text{ suit } \mathcal{N}(0, 1).$$

On a alors $P(X \leq u_{0,07}) = 0,965$ et $u_{0,07} \approx 1,812$ avec la calculatrice.
Un intervalle de fluctuation au seuil 0,93 est $[0,216 ; 0,384]$, à 10^{-3} près.

b. On recherche d'abord $u_{0,02}$ tel que :

$$P(-u_{0,02} \leq X \leq u_{0,02}) = 0,98, \text{ où } X \text{ suit } \mathcal{N}(0, 1).$$

On a alors $P(X \leq u_{0,02}) = 0,99$ et $u_{0,1} \approx 2,326$ avec la calculatrice.
Un intervalle de fluctuation au seuil 0,98 est $[0,193 ; 0,407]$, à 10^{-3} près.

22 1. **a.** X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,9$, donc $np = 0,9n$ et $\sqrt{np(1-p)} = 0,3\sqrt{n}$.

$$D'où : Y_n = \frac{X_n - 0,9n}{0,3\sqrt{n}} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $P(-1,96 \leq Y_n \leq 1,96)$ est $P(-1,96 \leq X \leq 1,96)$, où X suit $\mathcal{N}(0, 1)$, soit environ 0,95.

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{X_n}{n} \in I_n &\Leftrightarrow 0,9n - 0,588\sqrt{n} \leq X_n \leq 0,9n + 0,588\sqrt{n} \\ &\Leftrightarrow -1,96 \leq \frac{X_n - 0,9n}{0,3\sqrt{n}} \leq 1,96 \\ &\Leftrightarrow -1,96 \leq Y_n \leq 1,96. \end{aligned}$$

Ainsi, la limite de $P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$ est $P(-1,96 \leq X \leq 1,96)$, où X suit $\mathcal{N}(0, 1)$, soit environ 0,95.

2. a. Un intervalle de fluctuation est $\left[0,9 - \frac{0,588}{\sqrt{n}} ; 0,9 + \frac{0,588}{\sqrt{n}}\right]$.

b. Les conditions de validité s'écrivent $n \geq 30$, $0,9n \geq 5$ et $0,1n \geq 5$, ce qui donne $n \geq 50$.

c. On doit avoir $0,9 - \frac{0,588}{\sqrt{n}} > 0,89$, ce qui donne $\sqrt{n} > 58,8$ et $n \geq 3\,458$.

23 Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

12_TS_exercice23.alg (AlgoBox).

1. Il calcule les bornes a et b d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 0,95.

2. On introduit l'instruction conditionnelle SI ... ALORS ... SINON : elle permet de tester si les conditions de validité sont respectées.

```

VARIABLES
- n EST_DU_TYPE NOMBRE
- p EST_DU_TYPE NOMBRE
- a EST_DU_TYPE NOMBRE
- b EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE n
LIRE p
SI (n >= 30 ET n*p >= 5 ET n*(1-p) >= 5) ALORS
- DEBUT_SI
- a PREND_LA_VALEUR p-1.96*sqrt(p*(1-p)/n)
- b PREND_LA_VALEUR p+1.96*sqrt(p*(1-p)/n)
- AFFICHER a
- AFFICHER b
- FIN_SI
SINON
- DEBUT_SINON
- AFFICHER "Les conditions ne sont pas vérifiées"
- FIN_SINON

```

- 24** 1. Algorithme, dans lequel F est la fonction telle que :
 $F(x) = u \Leftrightarrow P(X \leq u) = x$, où X suit $\mathcal{N}(0, 1)$.

Saisir n, p, α

u prend la valeur $F\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

a prend la valeur $p - u \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$

b prend la valeur $p + u \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$

Afficher a, b

2. Programmes sur calculatrice.

TEXAS	CASIO
<pre>PROGRAM: FLU :Prompt N,P,A :FracNormale(1-A :2)→U :P-U*sqrt((P-P^2)/N) :→B:P+U*sqrt((P-P^2)/ :N)→C :Disp B,C</pre>	<pre>=====FLU===== "N="?"→N:"P="?"→P:"A="?" →A InvNormCD(1-A÷2)→U P-U*sqrt((P-P^2)÷N)→B P+U*sqrt((P-P^2)÷N)→C </pre>

- 25** *Correctif : Il se peut que, dans certains manuels, il soit demandé si la proposition est vraie. Dans ce cas, ne pas tenir compte de cette question. L'exercice porte uniquement sur la réciproque de la proposition.*

Oui, parce que la contraposée de cette proposition est vraie ($p = p' \Rightarrow I = I'$).

- 26** FAUX : l'amplitude est $a = 2 \times 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

Si on double n , alors la nouvelle amplitude est $a' = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

- 27** 1. $n = 100$, $np = 40$ et $n(1-p) = 60$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation est $I = [0,303 ; 0,497]$, à 10^{-3} près.

2. Règle de décision : soit f la fréquence observée ; si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse au seuil de confiance 95 %, sinon on la rejette.

3. $f = \frac{31}{100} = 0,31 : f \in I$, donc on accepte l'hypothèse au seuil de confiance 95 % ; l'échantillon est représentatif de la population pour cette allergie.

- 28** Voir livre p. 430.

- 30** Puisque $n = 20$, on ne peut pas appliquer la méthode utilisant un intervalle de fluctuation asymptotique.

On fait l'hypothèse que le taux de réussite du joueur est 0,5. On définit X la variable aléatoire égale au nombre de penaltys réussis sur 20 penaltys tentés, supposés indépendants les uns des autres. Alors, X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,5. Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est 6, et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \leq 0,975$ est 14.

Un intervalle de fluctuation au seuil de risque 5 % est donc $I = [0,3 ; 0,7]$.

La fréquence observée est $f = \frac{15}{20} = 0,75$. Puisque $f \notin I$, on peut dire que ce joueur a un taux de réussite différent d'une chance sur deux, au seuil de risque 5 %.

- 31** 1. Ici, $p = 0,008$ et $n = 500$, donc $np = 4$: la condition $np \geq 5$ n'est pas remplie.

2. et 3. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de rouleaux jaunissant le papier dans un échantillon de 500 rouleaux : X suit la loi binomiale de paramètres 500 et 0,008.

Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est 1, et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est 8.

Un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 95 % est donc $I = [0,002 ; 0,016]$.

La fréquence observée est $f = \frac{6}{500} = 0,012$. Puisque $f \in I$, on peut dire que le grossiste n'a pas menti au client, au seuil de confiance 95 %.

- 32** 1. Si le générateur de nombres aléatoires du tableur fonctionne bien, alors la probabilité d'avoir 1 est $p = 0,5$.
 $n = 100$, $np = 50$ et $n(1-p) = 50$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 0,95 est $I = [0,4 ; 0,6]$.

La fréquence observée de 1 est $f = \frac{58}{100} = 0,58$.

Puisque $f \in I$, on accepte l'hypothèse au seuil 95 %.

2. $n = 1\,000$, $np = 500$ et $n(1-p) = 500$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 0,95 est $J = [0,46 ; 0,54]$.

La fréquence observée de 1 est $f' = \frac{580}{1\,000} = 0,58$.

Puisque $f' \notin J$, on rejette l'hypothèse au seuil 95 %.

- 33** $p = \frac{1}{6}$, $n = 240$, $np = 40$ et $n(1-p) = 200$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 0,99 est $I = [0,10 ; 0,23]$, à 0,01 près.

D'où la règle de décision : soit f la fréquence observée sur 240 lancers ; si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse selon laquelle le dé n'est pas truqué, sinon on la rejette.

Ici $f = \frac{52}{240} \approx 0,22 : f \in I$, donc, au seuil de risque 1 %, on rejette l'hypothèse selon laquelle le dé est truqué.

L'affirmation de l'énoncé est fausse.

- 34** $p = 0,5$, $n = 240$, $np = 120$ et $n(1-p) = 120$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 0,95 est $I = [0,43 ; 0,57]$, à 0,01 près.

D'où la règle de décision : soit f la fréquence observée sur 240 lancers ; si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse selon laquelle le dé n'est pas truqué, sinon on la rejette.

Ici $f = \frac{106}{240} \approx 0,44 : f \in I$, donc, au seuil de confiance 0,95, on accepte l'hypothèse selon laquelle le dé n'est pas truqué.

L'affirmation de l'énoncé est vraie.

35 1. $f = 0,89$; $n = 100$, $nf = 89$ et $n(1 - f) = 11$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $I = [0,79 ; 0,99]$, à 10^{-2} près.

2. Cette affirmation est fautive : p n'appartient pas obligatoirement à cet intervalle de confiance.

On sait seulement qu'au moins 95 % des intervalles de la forme $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contiennent p .

36 $f = 0,85$; $n = 100$, $nf = 85$ et $n(1 - f) = 15$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $I = [0,75 ; 0,95]$, à 10^{-2} près.

37 C'est faux : si on formait un très grand nombre d'échantillons de taille n , alors p appartiendrait à au moins 95 % des intervalles de confiance calculés à partir de ces échantillons.

38 Voir livre p. 430.

39 $f = 0,86$; $n = 100$, $nf = 86$ et $n(1 - f) = 14$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $I = [0,76 ; 0,96]$, à 10^{-2} près.

40 **Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :**

12_TS_exercice40.xlsx (Excel 2007),

12_TS_exercice40.xls (Excel 2003)

et 12_TS_exercice40.ods (Open Office).

1. La formule à saisir en C4 est **=C3+10**.

2. La formule à saisir en D3 est **=B\$2-1/RACINE(C3)**.

La formule à saisir en E3 est **=B\$2+1/RACINE(C3)**.

41 FAUX : l'amplitude de l'intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$ et elle diminue lorsque n croît.

42 FAUX : p appartient ou n'appartient pas à cet intervalle, puisque p est un nombre fixé (mais inconnu).

43 Si n est la taille de l'échantillon, on doit avoir $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,02$, soit $n \geq 2\,500$.

44 Si n est la taille de l'échantillon, on doit avoir $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,03$, soit $n \geq 1\,112$.

45 1. $f = 0,2$; $n = 200$, $nf = 40$ et $n(1 - f) = 160$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance pour p au seuil de confiance 95 % est $I = [0,129 ; 0,271]$, à 10^{-3} près.

2. Soit n le nombre d'opérations. Alors, on a $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,01$, soit $n \geq 10\,000$.

46 1. $f = 0,51$; $n = 100$, $nf = 51$ et $n(1 - f) = 49$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % pour la proportion de « Oui » est $I = [0,41 ; 0,61]$.

$f' = 0,49$; $n = 100$, $nf' = 49$ et $n(1 - f') = 51$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % pour la proportion de « Non » est $J = [0,39 ; 0,59]$.

2. Pour un échantillon de taille n , un intervalle de confiance au seuil 95 % pour la proportion de « Oui » est $I = \left[0,51 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,51 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et un intervalle de confiance au seuil 95 % pour la proportion de « Non » est $J = \left[0,49 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,49 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

I et J ne se recouvrent pas si $0,49 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,51 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui donne $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,01$, soit $n > 10\,000$ et $n \geq 10\,001$.

47 $f = 0,15$; $n = 100$, $nf = 15$ et $n(1 - f) = 85$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $I = [0,05 ; 0,25]$.

Au seuil de confiance 95 %, une fourchette pour le nombre de dossiers incomplets est $[500 ; 2\,500]$.

48 Voir livre p. 430.

49 1. $f = 0,12$; $n = 250$, $nf = 30$ et $n(1 - f) = 220$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $[0,056 ; 0,184]$.

2. On cherche n tel que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,03$, soit $n \geq \frac{1}{0,03^2}$.
D'où $n \geq 1\,112$.

50 $f = \frac{N}{300}$; $n = 300$; $nf = N$ et $n(1 - f) = 300 - N$.

Les conditions de validité imposent $N \geq 5$ et $300 - N \geq 5$, c'est-à-dire $5 \leq N \leq 295$.

Un intervalle de confiance au seuil 95 % est :

$$\left[\frac{N}{300} - \frac{1}{\sqrt{300}} ; \frac{N}{300} + \frac{1}{\sqrt{300}}\right].$$

Il ne contient pas 0,4 si $\frac{N}{300} - \frac{1}{\sqrt{300}} > 0,4$, soit $N > \sqrt{300} + 120$, soit $N \geq 138$.

L'affirmation de l'énoncé est fautive.

51 1. Pour les carpes : $p = \frac{150}{240} = 0,625$, $n = 40$, $np = 25$ et $n(1 - p) = 15$, donc les conditions de validité sont vérifiées. Un intervalle de fluctuation est $[0,474 ; 0,776]$, à 10^{-3} près.

2. Pour les tanches : $p' = \frac{40}{240} = \frac{1}{6}$; $n = 40$, $np' = \frac{20}{3} \approx 6,7$ et $n(1 - p') = \frac{100}{3} \approx 33,3$, donc les conditions de validité sont vérifiées. Un intervalle de fluctuation est $[0,051 ; 0,283]$, à 10^{-3} près.

52 On fait l'hypothèse que la proportion de clés USB défectueuses est $p = 0,03$; $n = 800$, $np = 24$ et $n(1 - p) = 776$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 0,95 de la proportion des clés USB défectueuses dans un échantillon de taille 800 est $I = [0,018 ; 0,042]$, à 10^{-3} près.

La fréquence observée de clés défectueuses dans l'échantillon est $f = \frac{36}{800} = 0,045$.

f n'appartient pas à I , donc le directeur des ventes n'acceptera pas le stock, au seuil de confiance 95 %.

53 $f = 0,6$; $n = 100$; $nf = 60$ et $n(1 - f) = 40$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $[0,5 ; 0,7]$.

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 430 et le site www.bordas-index.fr pour les corrigés détaillés.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

62 $n = 150$, $np = 9$ et $n(1 - p) = 141$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 0,95 est $[0,021 ; 0,099]$, à 10^{-3} près.

63 $n = 100$, $np = 35$ et $n(1 - p) = 65$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 0,99 est $[0,227 ; 0,473]$, à 10^{-3} près.

64 *Correctif : arrondir les bornes à 10^{-2} près.*

$f = 0,6$; $n = 1\,200$, $nf = 720$ et $n(1 - f) = 480$, donc les conditions de validité sont vérifiées. Un intervalle de confiance au seuil de confiance 0,95 est $[0,57 ; 0,63]$, à 10^{-2} près.

65 *Correctif : arrondir les bornes à 10^{-2} près.*

$f = \frac{5}{90} \approx 0,056$; $n = 90$, $nf = 5$ et $n(1 - f) = 85$, donc les conditions de validité sont vérifiées. Un intervalle de confiance au seuil de confiance 0,95 est $[0 ; 0,17]$, à 0,01 près.

► Comparaison de deux proportions

► Pour p_1 : $n = 300$, $f = 0,81$, $nf = 243$ et $n(1 - f) = 57$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Pour p_2 : $n = 200$, $f = 0,76$, $nf = 152$ et $n(1 - f) = 48$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance de p_1 au seuil 95 % est :

$$I_1 = [0,752 ; 0,868].$$

Un intervalle de confiance de p_2 au seuil 95 % est :

$$I_2 = [0,689 ; 0,831].$$

► $I_1 \cap I_2$ n'est pas vide, donc les deux tests ont un pouvoir de détection sensiblement égal, au seuil de confiance 95 %.

66 $f = \frac{65}{160} = 0,40625$; $n = 160$, $nf = 65$ et $n(1 - f) = 95$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $I = [0,327 ; 0,486]$, à 10^{-3} près.

$f' = \frac{100}{220} \approx 0,455$; $n = 220$, $nf' = 100$ et $n(1 - f') = 120$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $J = [0,387 ; 0,522]$, à 10^{-3} près.

I et J ont une intersection commune, donc on peut conclure que ces deux commerciaux ont la même efficacité au seuil de confiance 95 %.

67 *Correctif : il se peut que dans certains manuels il soit demandé par erreur un seuil de confiance de 99 %, l'exercice doit être fait avec un seuil de confiance de 95 %.*

$f = \frac{60}{100} = 0,6$; $n = 100$, $nf = 60$ et $n(1 - f) = 40$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $I = [0,5 ; 0,7]$.

$f' = \frac{140}{200} = 0,7$; $n = 200$, $nf' = 140$ et $n(1 - f') = 60$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $J = [0,629 ; 0,771]$, à 10^{-3} près.

I et J ont une intersection commune, donc on peut conclure qu'il n'y a pas de différence significative entre les durées de vie des ampoules fabriquées par les entreprises A et B au seuil de confiance 95 %.

68 $f = 0,03$; $n = 1\,000$, $nf = 30$ et $n(1 - f) = 970$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $I = [0 ; 0,062]$.

$f' = 0,05$; $n = 1\,000$, $nf' = 50$ et $n(1 - f') = 950$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $J = [0,018 ; 0,082]$, à 10^{-3} près.

I et J ont une intersection commune, donc on peut conclure qu'il n'y a pas de différence significative entre les deux groupes au seuil de confiance 95 %.

69 *Correctif : il se peut que dans certains manuels il soit demandé par erreur un seuil de confiance de 99 %, l'exercice doit être fait avec un seuil de confiance de 95 %.*

$f = 0,077$; $n = 3\,000$, $nf = 231$ et $n(1 - f) = 2\,769$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $I = [0,058 ; 0,096]$, à 10^{-3} près.

$f' = 0,059$; $n = 3\,000$, $nf' = 177$ et $n(1 - f') = 2\,823$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est $J = [0,040 ; 0,078]$, à 10^{-3} près.

I et J ont une intersection commune, donc on peut accepter l'hypothèse de l'absence de changement des habitudes de consommation au seuil de confiance 95 %.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Sondages à risques

L'objectif de ce TP est de justifier la phrase de Michel Lejeune, et ainsi de prendre conscience que des résultats de sondage ne peuvent pas être résumés uniquement par des nombres, mais par des intervalles. Le tableur, et plus particulièrement la simulation de plusieurs sondages de taille 1 000, va illustrer ce phénomène.

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 12_TS_TP1.xlsx (Excel 2007), 12_TS_TP1.xls (Excel 2003) et 12_TS_TP1.ods (OpenOffice).

A. Intervalles de confiance

1. Pour J. Chirac : $f = 0,18$, $n = 1\,000$, $nf = 180$ et $n(1 - f) = 820$, donc les conditions de validité sont respectées. Un intervalle de confiance au seuil 0,95 est $I = [0,148 ; 0,212]$.

Pour L. Jospin : $f = 0,17$, $n = 1\,000$, $nf = 170$ et $n(1 - f) = 830$, donc les conditions de validité sont respectées. Un intervalle de confiance au seuil 0,95 est $J = [0,138 ; 0,202]$.

Pour J.-M. Le Pen : $f = 0,145$, $n = 1\,000$, $nf = 145$ et $n(1 - f) = 855$, donc les conditions de validité sont respectées. Un intervalle de confiance au seuil 0,95 est $K = [0,113 ; 0,177]$.

2. On saisit **Chirac**, **Jospin** et **Le Pen** dans les cellules **A1**, **B1** et **C1**.

Puis on entre les valeurs **0,18**, **0,17** et **0,145** dans les cellules **A4**, **B4** et **C4**.

On saisit en **A2** la formule **=A4-1/RACINE(1000)** et en **A3** la formule **=A4+1/RACINE(1000)**.

On recopie ensuite ces formules vers la droite. On peut alors les représenter graphiquement.

Avec Excel 2007-2010

- Sélectionner la plage de cellules **A1:C4**.
- Dans le menu **Insertion**, choisir **Autres graphiques**, puis **Stock**, et le premier type de graphique de cette catégorie.
- Par un clic droit sur l'axe des ordonnées, choisir **Mise en forme de l'axe**, puis dans l'onglet **Options d'axe**, fixer le minimum à 0,1 et le maximum à 0,25.
- Par un clic droit sur une barre, choisir **Format des lignes haut – bas**, puis modifier la couleur de trait et le style de trait.

Avec Excel 1997-2003

- Sélectionner la plage de cellules **A1:C4**.
- Dans le menu **Insertion**, choisir **Graphiques** (ou alors utiliser l'icône **Assistant Graphique**), puis **Boursier**, et le premier type de graphique de cette catégorie, puis cliquer sur **Terminer**.
- Par un clic droit sur l'axe des ordonnées, choisir **Format de l'axe**, puis dans l'onglet **Echelle**, fixer le minimum à 0,1 et le maximum à 0,25.
- Par un clic droit sur une barre, choisir **Format des lignes haut – bas**, puis modifier la couleur de trait et le style de trait.

Avec OpenOffice

- Sélectionner la plage de cellules **A1:C4**.
- Dans le menu **Insertion**, choisir **Diagramme** (ou alors utiliser l'icône **Diagramme**), puis sélectionner **Cours**, et le premier type de graphique de cette catégorie. Cliquer sur **Suivant**, sélectionner **Séries de données en lignes** et **Première ligne comme étiquette**, puis cliquer sur **Terminer**.
- Par un clic droit sur l'axe des ordonnées, choisir **Formater l'axe**, puis régler l'échelle.
- Par un clic droit sur une barre, choisir

Formater les séries de données puis dans l'onglet **Ligne**, modifier la couleur et la largeur.

3. Ces intervalles de confiance se recouvrent deux à deux partiellement, donc on ne peut pas prévoir l'ordre des trois candidats lors de l'élection.

B. Fluctuation des sondages

1. On saisit en **A2** la formule **=ALEA.ENTRE.BORNES(1;10000)**.

2. a. $X = 3\,607$ car $1\,988 + 1\,618 = 3\,606$ et $Y = 5\,293$, car $3\,606 + 1\,686 = 5\,292$.

b. On saisit en **B2** la formule :

=SI(A2<1989;1;SI(A2<3607;2;SI(A2<5293;3;4))).

3. a. On saisit en **E4** la formule **=NB.SI(B2:B1001;1)/1000**, puis en **F4** la formule **=NB.SI(B2:B1001;2)/1000** et en **G4** la formule **=NB.SI(B2:B1001;3)/1000**.

b. On saisit en **E2** la formule **=E4-1/RACINE(1000)**, puis en **E3** la formule **=E4+1/RACINE(1000)**.

On recopie ensuite ces formules vers la droite.

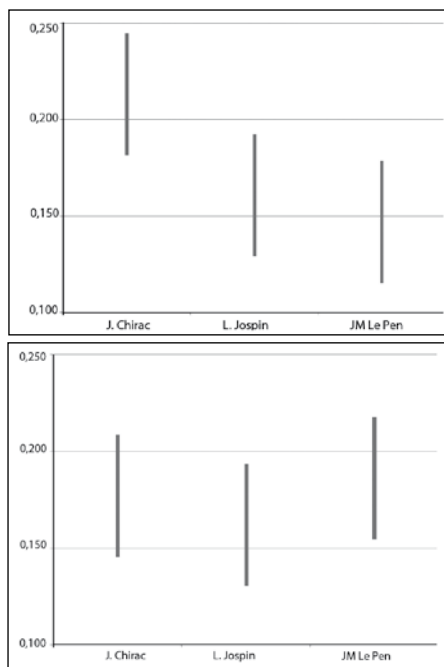
4. On opère comme dans la partie A.

5. a. Pour simuler plusieurs sondages de taille 1 000, on utilise la touche **F9** sur Excel et la combinaison de touches **Maj Ctrl F9** avec OpenOffice (et non pas **Alt Ctrl F9** comme il est indiqué dans certains manuels).

b. Les diverses simulations indiquent qu'on ne peut pas prévoir l'ordre des candidats le jour de l'élection.

C. Synthèse

Deux simulations représentées ci-dessous montrent que des échantillons semblables (de même taille) conduisent à des résultats très différents sur l'ordre des candidats.



La critique principale que l'on peut faire à ce sondage, c'est qu'il donne des résultats figés, alors que l'on aurait dû donner des fourchettes d'intentions de vote pour chacun des candidats. Il y a certainement une différence entre les sondages réalisés et les simulations sur tableur, car les échantillons choisis ne le sont pas tout à fait au hasard, et ensuite les résultats des sondages sont souvent « redressés » par les instituts selon des critères qu'ils ne communiquent pas !

TP 2 Méthode de l'ellipse pour les intervalles de confiance

La formule donnée dans le cours pour les intervalles de confiance résulte d'une grande approximation. L'objectif de ce TP est de présenter une méthode graphique permettant d'obtenir un intervalle de confiance avec une très grande précision. L'utilisation du logiciel GeoGebra permet d'obtenir l'intervalle par lecture directe dans la fenêtre Algèbre.

Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 12_TS_TP2.ggb (GeoGebra).

A. Étude théorique et calculatrice

1. a. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des jetons rouges dans les échantillons de taille 100 est $[p - 0,196\sqrt{p(1-p)}; p + 0,196\sqrt{p(1-p)}]$.

b. On doit avoir $100p \geq 5$ et $100(1-p) \geq 5$, ce qui donne $p \geq 0,05$ et $p \leq 0,95$. D'où $I = [0,05; 0,95]$.

2. C'est une conséquence de la question 1.a.

$$3. a. \phi'(x) = 1 - 0,098 \times \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

$$\phi''(x) = \frac{0,049}{x(1-x)\sqrt{x(1-x)}}.$$

b. $\phi''(x) > 0$ pour tout réel x de I , donc ϕ' est strictement croissante sur I .

$\phi'(0,05) \approx 0,59$ et ϕ' est croissante sur I , donc $\phi'(x) > 0$ sur I .

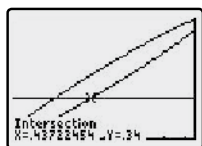
c. On en déduit que ϕ est strictement croissante sur I .

$$4. \Psi'(x) = 2 - \phi'(x).$$

Puisque ϕ' est croissante : $\phi'(x) \leq \phi'(0,95)$, et $\phi'(0,95) \approx 1,4$. On en déduit que $\phi'(x) < 2$, donc $\Psi'(x) > 0$, et ainsi Ψ est strictement croissante sur I .

5. a. On saisit les deux expressions dans Y1 et Y2 et on prend comme fenêtre $[0,05; 0,95] \times [0; 1]$.

b. On saisit **Y3=0.34** puis on lit les abscisses des deux points d'intersection. À 10^{-3} près, on trouve $[0,254; 0,438]$.



c. La formule du cours donne $[0,240; 0,440]$.

L'amplitude de l'intervalle trouvé est plus petite.

B. Utilisation d'un grapheur

1. On a $-0,196\sqrt{p-p^2} \leq F-p \leq 0,196\sqrt{p-p^2}$, ce qui équivaut à : $(F-p)^2 \leq 0,196^2(p-p^2)$.

2. Avec GeoGebra, on entre dans le champ de saisie :

$$(y-x)^2 - 0,196^2 \cdot (x-x^2) = 0.$$

3. On crée un curseur e : on le fait varier de 0 à 1 avec un incrément de 0,01.

4. On entre **y=0,34** dans le champ de saisie.

Puis on construit les points d'intersection A et B de cette droite ainsi tracée avec la représentation graphique précédente (avec le menu des **Points** : **Intersection entre deux objets**). On lit les coordonnées de A et B dans la fenêtre Algèbre : les abscisses de ces points donnent les bornes de l'intervalle de confiance cherché.

a. L'intervalle trouvé est : $[0,0775; 0,2099]$, en arrondissant à 10^{-4} près.

b. On trouve $[0,4721; 0,6627]$.

c. On trouve $[0,7671; 0,9070]$.

5. Pour retrouver les courbes représentatives des fonctions ϕ et ψ , on trace les droites verticales d'équations respectives $x = 0,05$ et $x = 0,95$. La partie « basse » de la courbe délimitée par ces deux droites est celle de la fonction ϕ , la partie « haute » est celle de la fonction Ψ .

CAP VERS LE BAC

Sujet A

1. $f = \frac{435}{900} \approx 0,483$; $n = 900$, $nf = 435$ et $n(1-f) = 465$, donc les conditions de validité sont remplies.

Un intervalle de confiance au seuil 0,95 est $[0,45; 0,52]$.

2. Oui, car malgré une proportion inférieure à 0,5 dans l'échantillon, le candidat A peut être élu : en effet, l'intervalle de confiance au seuil 0,95 contient 0,5.

Sujet B

1. Réponse a.

$f = \frac{60}{300}$; $n = 300$, $nf = 60$ et $n(1-f) = 240$, donc les conditions de validité sont remplies. L'intervalle de confiance à 0,95 est $[0,142; 0,258]$.

2. Réponse b.

Correctif : il se peut que dans certains manuels il soit demandé par erreur un seuil de confiance 0,99, l'exercice doit être fait avec un seuil de confiance de 0,95.

Réponse avec un seuil de confiance 0,95 :

Le centre de l'intervalle est 0,335.

$$\text{On a } 0,335 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,335 \times 0,665}}{\sqrt{n}} = 0,36$$

$$\text{soit } n = \frac{1,96^2 \times 0,335 \times 0,665}{0,025^2} \approx 1\,370, \text{ à l'unité près.}$$

Réponse avec un seuil de confiance 0,99 : 2 373.

Sujet C

1. a. X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,9$.

b. Correctif : il faut lire

« Si $I_n = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$, avec $p = 0,9$,

montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = L$, avec $L \approx 0,95$ » et non pas

« Si $I_n = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$, montrer que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 0,95$ ».

$$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow np - 1,96 \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + 1,96 \sqrt{np(1-p)}$$

$$\Leftrightarrow -1,96 \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 1,96$$

$$\Leftrightarrow -1,96 \leq Z_n \leq 1,96, \text{ avec } Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $P(-1,96 \leq Z_n \leq 1,96)$ est $P(-1,96 \leq X \leq 1,96)$, où X suit la loi normale centrée réduite, et :

$$P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95.$$

2. a. $P(X > 300) \approx 0,0002$, soit 0 à 0,001 près.

b. $P(X > 300) \approx 0,840$. Dans ce cas, la probabilité de surbooking est 0,84.

3. a. $p = 0,9$, $np = 0,9n$ et $n(1-p) = 0,1n$.

On doit avoir $0,9n \geq 5$ et $0,1n \geq 5$, soit $n \geq 50$.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % dans un échantillon de taille n est :

$$\left[0,9 - \frac{0,588}{\sqrt{n}} ; 0,9 + \frac{0,588}{\sqrt{n}} \right].$$

b. Puisque le nombre d'acheteurs ne doit pas dépasser 300, la proportion d'acheteurs ne doit pas dépasser $\frac{300}{n}$ au seuil 0,95,

soit $0,9 + \frac{0,588}{\sqrt{n}} \leq \frac{300}{n}$ et $0,9n + 0,588\sqrt{n} \leq 300$.

c. On a $0,9N^2 + 0,588N - 300 \leq 0$.

Pour ce trinôme du second degré : $\Delta \approx 1\,080,35$ et les racines sont $N_1 \approx -18$ et $N_2 \approx 17,93$.

Ce trinôme est négatif ou nul pour $N_1 \leq N \leq N_2$, soit ici $0 \leq N \leq N_2$, et ainsi $n \leq N_2^2$.

Puisque $N_2^2 \approx 321,6$, la valeur maximale de n pour limiter le risque est 321.

Sujet D

1. Le sac contient un très grand nombre de billes, donc le nombre de billes est suffisamment grand pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise.

2. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des billes rouges dans les échantillons de taille 100 est $\left[p - 0,196 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 0,196 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$.

3. D'après la question précédente :

$$p - 0,196 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + 0,196 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

$$4. p - 0,196 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq 0,8 \leq p + 0,196 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow -0,196 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq 0,8 - p \leq 0,196 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow (0,8 - p)^2 \leq 0,196^2 (p - p^2)$$

$$\Leftrightarrow 0,64 - 1,6p + p^2 \leq 0,038416p - 0,038416p^2$$

$$\Leftrightarrow 1,038416p^2 - 1,638416p + 0,64 \leq 0.$$

5. On résout l'inéquation précédente.

Les racines du trinôme sont, à 10^{-4} près : $p_1 \approx 0,7112$ et $p_2 \approx 0,8666$. D'où l'intervalle, à 10^{-3} près : $[0,711 ; 0,867]$.

Cet intervalle n'est pas centré en 0,8, contrairement à celui vu en cours.

Sujet E

1. Correctif : On recherche un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95 % (cette précision ne figure pas dans certains manuels).

$p = 0,16$; $n = 100$, $np = 16$ et $n(1-p) = 84$, donc les conditions de validité sont respectées.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % est $I = [0,08 ; 0,24]$, en arrondissant les bornes à 0,01 près.

2. Règle de décision : si la fréquence observée f dans un échantillon de taille 100 appartient à I , on accepte l'hypothèse du médecin, sinon on la rejette.

3. $f = 0,22$ donc $f \in I$: on accepte cette hypothèse au seuil 95 %.

70 $p = \frac{1}{6}$; $n = 80$, $np \approx 13,3$ et $n(1-p) \approx 66,7$, donc les conditions de validité sont remplies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au niveau 0,95 est $[0,08 ; 0,25]$, à 0,01 près.

71 Correctif : il faut déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique (et non pas un intervalle de confiance, comme il peut être écrit dans certains manuels).

$p = 0,7$; $n = 50$, $np \approx 35$ et $n(1-p) \approx 15$, donc les conditions de validité sont remplies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au niveau 0,95 est $[0,57 ; 0,83]$, à 0,01 près.

72 On doit avoir $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,01$, soit $n \geq 10\,000$.

$f = \frac{5}{9}$, $n = 900$, $nf = 500$ et $n(1-f) = 400$, donc les conditions de validité sont remplies. Un intervalle de confiance au seuil de 95 % est $[0,52 ; 0,53]$, à 0,01 près.

73 1. $p = 0,4$; $n = 100$, $np = 40$ et $n(1-p) = 60$, donc les conditions de validité sont remplies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,99 est $[0,27 ; 0,53]$, à 0,01 près.

2. On doit avoir $2,58 \times \frac{\sqrt{0,4 \times 0,6}}{\sqrt{n}} \leq 0,05$, ce qui donne $n \geq 640$.

POUR ALLER PLUS LOIN

74 1. $n = 100$, $np = 13$ et $n(1 - p) = 87$, donc les conditions de validité sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 0,95 est $I = [0,064 ; 0,196]$, à 0,001 près.

2. La fréquence observée des jeunes ayant eu une crise d'asthme est $f = 0,19$. Puisque $f < 0,196$, il n'est pas utile de mettre en place une investigation plus complète.

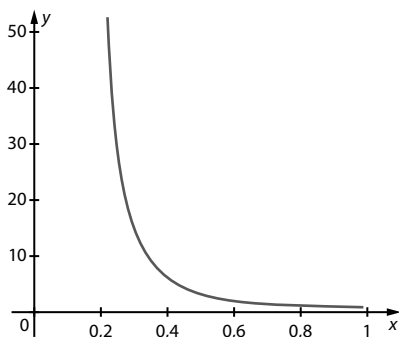
3. On cherche n tel que $0,13 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,1131}}{\sqrt{n}} < 0,19$,

c'est-à-dire $\sqrt{n} > \frac{1,96 \times \sqrt{0,1131}}{0,06}$, soit $n \geq 121$.

4. a. $p_s - 0,13 = 1,96 \frac{\sqrt{0,13 \times 0,87}}{\sqrt{n}}$, d'où :

$$n = \frac{0,13 \times 0,87 \times 1,96^2}{p_s - 0,13} = \frac{0,43448496}{p_s - 0,13}$$

b. $n = \phi(p_s)$, avec $p_s > 0,13$: ϕ est décroissante sur $]0,13 ; 1]$.



75 Voir livre page 430.

76 Pour retrouver les résultats du tableau, on utilise l'autre forme de l'intervalle de confiance donnée dans le cours :

$$\left[f - 1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} ; f + 1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \right]$$

La « marge d'erreur » décrite dans le texte est donc égale à :

$$1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{1\,000}}$$

On obtient successivement, à 0,01% près :

1,35 (pour 1,4) ; 1,86 (pour 1,8) ; 2,48 (pour 2,5) ;

2,84 (pour 2,8) ; 3,04 (pour 3,0) ; 3,10 (pour 3,1).

77 $p = 0,8$; $n = 870$, $np = 456$ et $n(1 - p) = 414$, donc les conditions de validité sont remplies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de personnes d'origine mexicaine dans les échantillons de taille 870 au seuil de confiance 99 % est $I = [0,76 ; 0,84]$, à 0,01 près.

La fréquence observée est $f = \frac{339}{870} \approx 0,39$. Puisque $f \notin I$, on peut dire, au seuil de risque 1 %, que les Américains d'origine mexicaine sont sous-représentés dans les jurys populaires de ce comté (c'est aussi vrai au seuil de risque un pour mille).

78 $n = 1\,000$; $p = 0,01$, $np = 10$ et $n(1 - p) = 990$, donc les conditions de validité sont remplies.

Sous l'hypothèse $p = 0,01$, un intervalle de fluctuation au seuil de confiance 95 % est $I = [0,0038 ; 0,0162]$, à 10^{-4} près.

$0,016 \in I$, donc on ne peut pas affirmer que la machine est défectueuse au seuil 95 %.

Remarque : il est plus indiqué ici de faire un test unilatéral. On teste alors l'hypothèse « $p = 0,01$ » contre l'hypothèse « $p > 0,01$ ». Alors, au seuil de confiance 0,95, on obtient l'intervalle $I' = [0 ; 0,0152]$, et dans ce cas on considère la machine comme défectueuse au seuil 95 %.

79 1. a. X suit la loi binomiale de paramètres 5 000 et 0,62.

D'où $E(X) = 3\,100$ et $\sigma(X) = \sqrt{1\,178} \approx 34,3$.

b. $E(F) = \frac{3\,100}{5\,000} = 0,62$ et $V(F) = \frac{1\,178}{5\,000^2} \approx 5 \times 10^{-5}$,

donc F suit la loi normale $\mathcal{N}(0,62 ; 5 \times 10^{-5})$.

c. La probabilité que Gallup se trompe est $P(F \leq 0,5) \approx 0$.

2. $n = 5\,000$; $p = 0,62$, $np = 3\,100$ et $n(1 - p) = 1\,900$, donc les conditions de validité sont remplies. Un intervalle de fluctuation de la proportion des électeurs votant pour Roosevelt, dans un échantillon de taille 5 000, au seuil 99 %, est $[0,60 ; 0,64]$, à 0,01 près. On constate que Gallup n'avait quasiment aucune chance de se tromper.

3. L'échantillon choisi par le magazine était de très grande taille, mais absolument pas aléatoire car il ne prenait en compte que des lecteurs de ce magazine.

80 1. On sait qu'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 99 % est $\left[p - 2,58 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2,58 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$.

Comme dans le cours, on utilise le fait que $p(1 - p) \leq 0,25$ et donc $\sqrt{p(1 - p)} \leq 0,5$. De la même façon que dans la propriété de la page 362, il existe un entier n_0 tel que, si $n \geq n_0$, alors :

$$P\left(p - 2,58 \frac{0,5}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2,58 \frac{0,5}{\sqrt{n}}\right) > 0,99,$$

et on obtient un intervalle de confiance au seuil 0,99 :

$$\left[p - \frac{1,29}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1,29}{\sqrt{n}} \right].$$

2. On détermine u tel que $P(-u \leq X \leq u) = 0,999$, où X suit $\mathcal{N}(0, 1)$. On a $u \approx 3,29$. D'où un intervalle de confiance au seuil 0,999 : $\left[p - \frac{1,65}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1,65}{\sqrt{n}} \right]$.

3. Au niveau de confiance $1 - \alpha$, on obtient $\left[p - \frac{u_\alpha}{2\sqrt{n}} ; p + \frac{u_\alpha}{2\sqrt{n}} \right]$.

81 1. a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,15$.

b. $E(X) = 500 \times 0,15 = 75$.

$\sigma(X) = \sqrt{500 \times 0,15 \times 0,85} \approx 7,98$.

2. a. $P(X > 200) \approx 0$.

b. $P(X < 10) \approx 5 \times 10^{-24}$.

c. $P(50 \leq X \leq 100) \approx 0,9986$.

3. Sous l'hypothèse $p = 0,15$, un intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence des personnes contaminées dans les échantillons de taille 500 est $[0,118 ; 0,182]$.

La fréquence observée est ici $f = \frac{45}{500} = 0,09$. Puisque $f \notin I$, on rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes contaminées est 15 %.

4. L'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % est telle que :

$$2 \times 1,96 \times \frac{\sqrt{0,15 \times 0,85}}{\sqrt{n}} \leq 0,02$$

soit $\sqrt{n} \geq 196 \sqrt{0,1275}$ et $n \geq 4\,899$.

82 Lorsque IC est inférieur à 1, il y a moins de guérisons dans le groupe traité que dans le groupe placebo, donc on ne peut pas juger le traitement efficace.

Seul l'essai n° 1 est positif, car il y a moins de 5 % de chance qu'il y ait moins de guérisons dans le groupe traité que dans le groupe placebo.

L'essai n° 3 est négatif, mais avec une estimation relativement précise.

L'essai n° 4 montre que le traitement a un effet important, car IC dépasse 1 dans près de 95 % des cas, mais l'essai reste négatif, car l'intervalle de confiance contient 1 : un tel résultat incite à refaire l'étude avec plus de malades.

83 1. $p = 0,512$; $n = 132$, $np \approx 67$ et $n(1-p) \approx 64$, donc les conditions de validité sont respectées.

Un intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion des garçons au seuil 0,95 est $I = [0,42 ; 0,60]$, à 0,01 près.

2. La fréquence observée est $f = \frac{46}{132} \approx 0,35$.

f n'appartient pas à I , donc la différence observée est significative au seuil 0,95.

84 **Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :**

12_TS_exercice84.xlsx (Excel 2007),

12_TS_exercice84.xls (Excel 2003)

et 12_TS_exercice84.ods (Open Office).

1. Si on fait l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée, alors $p = 0,5$ et la variable aléatoire X comptant le nombre de « FACE » obtenus suit $\mathcal{B}(100 ; 0,5)$.

Alors, la probabilité de rejeter l'hypothèse quand elle est vraie est $1 - P(40 \leq X \leq 60)$, soit $0,035$ à 10^{-3} près.

2. On accepte l'hypothèse.

3. a. *Correctif : f est une fréquence théorique, elle n'est pas observée dans un échantillon de 100 jets.*

Ici, X suit $\mathcal{B}(100 ; 0,7)$. La probabilité cherchée est :

$$P(40 \leq X \leq 60) \approx 0,021.$$

b. On trouve alors $P(40 \leq X \leq 60) \approx 0,538$.

4. a. Pour entrer les valeurs de f , on saisit **0,05** dans la cellule **A2**, puis la formule **=A2+0,01** dans la cellule **A3**, et on recopie cette formule vers le bas.

Puis on saisit dans la cellule **B2** la formule :

=LOI.BINOMIALE(60;100;A2;1)

-LOI.BINOMIALE(39;100;A2;1)

et on la recopie vers le bas.

On complète aussi la colonne **C** en calculant $1 - \beta$ par la formule **=1-B2** saisie en **C2**.

b. Le nombre $1 - \beta$ est la probabilité de refuser l'hypothèse que la pièce est équilibrée sous une hypothèse $f = f_0$: en particulier, si f est éloigné de 0,5, ce nombre doit être grand.

c. Avec Excel 2007-2010

- Sélectionner les plages de cellules **A1:A92** et **C1:C92** (sélectionner chaque plage en gardant appuyée la touche **Ctrl**).

- Dans le menu **Insertion**, choisir **Nuage de points**, et le premier type de graphique de cette catégorie.

- Par un clic droit sur le nuage de points, choisir

Mettre en forme une série de données, puis dans l'onglet

Options de marqueur, choisir le type de marqueur prédéfini et diminuer la taille du marqueur (3 ou 4).

Avec Excel 1997-2003

- Sélectionner les plages de cellules **A1:A92** et **C1:C92** (sélectionner chaque plage en gardant appuyée la touche **Ctrl**).

- Dans le menu **Insertion**, choisir **Graphiques** (ou alors utiliser l'icône **Assistant Graphique**), puis **Nuage de points**, et le premier type de graphique de cette catégorie, puis cliquer sur **Terminer**.

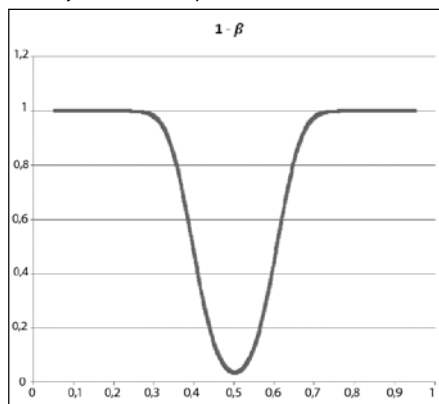
- Par un clic droit sur le nuage de points, on peut choisir **Format de la série de données**, puis modifier certains éléments avec l'onglet **Motifs**.

Avec OpenOffice

- Sélectionner les plages de cellules **A1:A92** et **C1:C92** (sélectionner chaque plage en gardant appuyée la touche **Ctrl**).

- Dans le menu **Insertion**, choisir **Diagramme** (ou alors utiliser l'icône **Diagramme**), puis sélectionner **XY**, et le premier type de graphique de cette catégorie, soit **Points seuls**. Enfin, cliquer sur **Terminer**.

- Par un clic droit sur le nuage de points, choisir **Formater les séries de données**, puis on peut modifier la largeur et la hauteur du symbole, ainsi que sa couleur.



85 A. 1. $I_1 = [20 ; 40]$. $P(X \in I_1) \approx 0,979$, à 10^{-3} près.

2. $I_2 = [21 ; 39]$. $P(X \in I_2) \approx 0,963$, à 10^{-3} près.

3. I_3 est aussi un intervalle de fluctuation au seuil 0,95 car $P(X \in I_3) \approx 0,9502$, à 10^{-4} près.

B. 1. $P(X < 1,65) \approx 0,95053$ et $P(-2,576 \leq X \leq 1,696) \approx 0,95006$ à 10^{-5} près, donc ce sont bien des intervalles de fluctuation au seuil 0,95.

2. a. $F(t) = 2 \int_0^t f(x) dx$, où f est la fonction densité de la loi normale centrée réduite. D'où $F'(x) = 2f(x)$.

Puisque $f(x) > 0$ sur \mathbb{R} , $F'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$ et F est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

b. F prend ses valeurs sur $[0; 1]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel a tel que $F(a) = 0,95$. Ce réel a est la valeur minimale telle que $[-a; a]$ soit un intervalle de fluctuation de X au seuil 0,95.

On trouve $a \approx 1,96$.

3. a. $G(t) = \int_{-2+t}^{-2} f(x) dx$, donc $G'(x) = f(-2+x)$. On en déduit que $G'(x) > 0$, donc G est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

b. $G(4) = P(-2 \leq X \leq 2) \approx 0,954$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un unique réel b de $[0; 2]$ tel que $G(b) = 0,95$.

c. $G(b) = \int_{-2}^{-2+b} f(x) dx + \int_{-2}^a f(x) dx + \int_a^{-2+b} f(x) dx$.

Or $G(b) = \int_{-2}^a f(x) dx = 0,95$,

donc $\int_a^{-2+b} f(x) dx = - \int_{-2}^{-a} f(x) dx$.

Or $\int_{-2}^{-a} f(x) dx > 0$, donc $\int_a^{-2+b} f(x) dx < 0$, et ainsi $a > -2 + b$, soit $b < a + 2$.

d. $G(b) = 0,95 \Leftrightarrow P(X \leq -2 + b) = 0,95 - P(X < -2)$

$$\Leftrightarrow -2 + b \approx 1,92$$

$$\Leftrightarrow b \approx 3,92 \text{ (à } 0,01 \text{ près)}.$$

4. L'amplitude de l'intervalle trouvé à la question 2. est $2a$, soit 3,9199 (à 10^{-4} près), et celle de l'intervalle trouvé à la question 3. est b , soit 3,9228 (à 10^{-4} près).

5. $P(-1 \leq X \leq -1 + c) = P(-1 \leq X \leq 0) + P(0 < X \leq -1 + c)$.

$P(-1 \leq X \leq 0) < 0,35$, car $P(-1 \leq X \leq 0) \approx 0,341$.

$P(0 < X < -1 + c) < 0,5$, car $P(X > 0) = 0,5$.

D'où $P(-1 \leq X \leq -1 + c) < 0,85$: il n'existe donc pas de réel c tel que $P(-1 \leq X \leq -1 + c) = 0,95$. Il n'existe pas d'intervalle de fluctuation au seuil 95 % de la forme $[-1; -1 + c]$.

86 1. C'est la formule vue en cours dans laquelle :

$$\sigma = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

2. Cela est dû à l'équivalence :

$$p - u_\alpha \sigma \leq F_n \leq p + u_\alpha \sigma \Leftrightarrow F_n - u_\alpha \sigma \leq p \leq F_n + u_\alpha \sigma.$$

3. a. $F_n - u_\alpha \sigma \leq p \leq F_n + u_\alpha \sigma \Leftrightarrow -u_\alpha \leq \frac{p - F_n}{\sigma} \leq u_\alpha$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p - F_n}{\sigma} \right)^2 \leq u_\alpha^2 \quad (2).$$

b. (2) $\Leftrightarrow F_n^2 - 2pF_n + p^2 \leq \sigma^2 u_\alpha^2$

$$\Leftrightarrow F_n^2 - 2pF_n + p^2 \leq \frac{p - p^2}{n} u_\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow nF_n^2 - 2npF_n + np^2 \leq pu_\alpha^2 - p^2u_\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow (n + u_\alpha^2)p^2 - (2nF_n + u_\alpha^2)p + nF_n^2 \leq 0 \quad (3).$$

4. a. On calcule le discriminant Δ de ce trinôme :

$$\Delta = 4nu_\alpha^2F_n(1 - F_n) + u_\alpha^4.$$

$\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$p_1 = \frac{2nF_n + u_\alpha^2 - \sqrt{\Delta}}{2(n + u_\alpha^2)} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{2nF_n + u_\alpha^2 + \sqrt{\Delta}}{2(n + u_\alpha^2)}.$$

b. Correctif : il se peut que dans certains manuels il soit noté

$$\frac{(2nF_n + u_\alpha^2) - \sqrt{4nu_\alpha^2F_n(1 - F_n) + u_\alpha^4}}{2(n + u_\alpha^2)}, \text{ il faut lire :}$$

$$\frac{(2nF_n + u_\alpha^2) - \sqrt{4nu_\alpha^2F_n(1 - F_n) + u_\alpha^4}}{2(n + u_\alpha^2)}.$$

Avec la règle du signe du trinôme :

$$(3) \Leftrightarrow p_1 \leq p \leq p_2.$$

5. a. Une réalisation de F_n est f , d'où un intervalle de confiance

$$\text{de } p \text{ au seuil } 1 - \alpha : \left[\frac{2nf + u_\alpha^2 - \sqrt{\delta}}{2(n + u_\alpha^2)} ; \frac{2nf + u_\alpha^2 + \sqrt{\delta}}{2(n + u_\alpha^2)} \right]$$

où $\delta = \Delta = 4nu_\alpha^2f(1 - f) + u_\alpha^4$.

b. Correctif : il se peut que dans certains manuels il soit noté

$$f + \frac{u_\alpha^2}{2n} - \sqrt{\frac{u_\alpha^2 f(1-f)}{n} + \frac{u_\alpha^2}{4n^2}}, \text{ il faut lire :}$$

$$f + \frac{u_\alpha^2}{2n} - u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n} + \frac{u_\alpha^2}{4n^2}}.$$

En divisant numérateur et dénominateur par $2n$, on obtient :

$$p_1 = \frac{f + \frac{u_\alpha^2}{2n} - \frac{1}{2n} \sqrt{u_\alpha^2(4nf(1-f) + u_\alpha^2)}}{1 + \frac{u_\alpha^2}{n}},$$

$$\text{soit :} \quad p_1 = \frac{f + \frac{u_\alpha^2}{2n} - u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n} + \frac{u_\alpha^2}{4n^2}}}{1 + \frac{u_\alpha^2}{n}}.$$

$$\text{c. On obtient} \quad p_2 = \frac{f + \frac{u_\alpha^2}{2n} + u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n} + \frac{u_\alpha^2}{4n^2}}}{1 + \frac{u_\alpha^2}{n}}.$$

d. On obtient le deuxième intervalle de confiance du cours en

négligeant les termes $\frac{u_\alpha^2}{2n}$, $\frac{u_\alpha^2}{4n}$ et $\frac{u_\alpha^2}{n}$.

6. Intervalles de confiance au seuil 0,95 :

– formule du cours : $[0,129; 0,271]$;

– seconde formule du cours : $[0,144; 0,256]$;

– formule de la question 5. : $[0,150; 0,261]$.

87 Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

12_TS_exercice87.xlsx (Excel 2007),

12_TS_exercice87.xls (Excel 2003)

et 12_TS_exercice87.ods (Open Office).

1. b. Correctif : on entre dans la plage **A4:A103** les proportions observées de 1 % à 100 % (et pas de 0 % à 100 %).

On entre 1 % dans la cellule **A4**, puis on saisit en **A5** la formule

=A4*001 . On recopie ensuite cette formule vers le bas.

2. a. On saisit en **B4** la formule **=A4-1/RACINE(C\$1)**.

De même, on saisit en **C4** la formule **=A4+1/RACINE(C\$1)**.

b. Certaines valeurs sont négatives et d'autres dépassent 100 %.

3. a. On saisit en **B4** la formule :

=SI(A4-1/RACINE(C\$1)<0;0;A4-1/RACINE(C\$1)).

b. On saisit en **C4** la formule :

=SI(A4+1/RACINE(C\$1)>1;1;A4+1/RACINE(C\$1)).

c. Quand on augmente la taille de l'échantillon, on remarque que l'amplitude de l'intervalle diminue.

Avec Excel 2007-2010 :

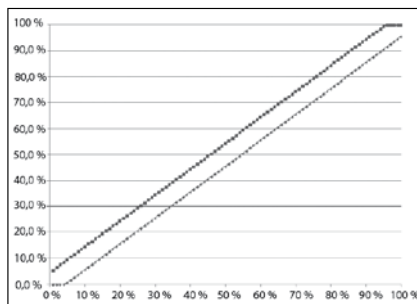
- Sélectionner la plage de cellules **A4:C103**.
- Dans le menu **Insertion**, choisir **Nuage de points**, et le premier type de graphique de cette catégorie.
- Par un clic droit sur le premier nuage de points, choisir **Mettre en forme une série de données**, puis dans l'onglet **Options de marqueur**, choisir le type de marqueur prédéfini et diminuer la taille du marqueur (3 ou 4).
Opérer de même pour l'autre nuage de points.

Avec Excel 1997-2003 :

- Sélectionner la plage de cellules **A4:C103**.
 - Dans le menu **Insertion**, choisir **Graphiques** (ou alors utiliser l'icône **Assistant Graphique**), puis **Nuage de points**, et le premier type de graphique de cette catégorie, puis cliquer sur **Terminer**.
 - Par un clic droit sur le nuage de points, on peut choisir **Format de la série de données**, puis modifier certains éléments avec l'onglet **Motifs**.
- On peut faire de même avec le second nuage de points.

Avec OpenOffice :

- Sélectionner la plage de cellules **A4:C103**.
- Dans le menu **Insertion**, choisir **Diagramme** (ou alors utiliser l'icône **Diagramme**), puis sélectionner **XY**, et le premier type de graphique de cette catégorie, soit **Points seuls**. Enfin, cliquer sur **Terminer**.



- Par un clic droit sur le nuage de points, choisir

Formater les séries de données, puis on peut modifier la largeur et la hauteur du symbole, ainsi que sa couleur.
Opérer de même avec le second nuage de points.

88 1. $p = 0,54$; $n = 460$, $np = 248,4$ et $n(1 - p) = 211,6$, donc les conditions de validité sont respectées.

On trouve $I = [0,494 ; 0,586]$, à 0,001 près.

2. $f = \frac{260}{460} \approx 0,565$, donc $f \in I$.

3. $p = 0,2$; $n = 460$, $np = 92$ et $n(1 - p) = 368$, donc les conditions de validité sont remplies.

On trouve $I' = [0,163 ; 0,237]$.

4. $f' = \frac{108}{460} \approx 0,235$, donc $f' \in I'$.

5. L'échantillon est bien représentatif de la population pour cette information.

6. $f'' = 0,295$; $n = 460$, donc $nf'' = 135,7$ et $n(1 - f'') = 324,3$, donc les conditions de validité sont remplies.

Un intervalle de confiance au seuil 95 % est $[0,248 ; 0,342]$.

Prises d'initiatives

89 La première série de lancers fournit l'intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % : $I_1 = [0,08 ; 0,23]$.

La seconde série de lancers donne l'intervalle de confiance au seuil 95 % : $I_2 = [0,11 ; 0,23]$.

I_1 et I_2 ont une intersection non vide, donc, au seuil de risque 5 %, on peut dire que la proportion de 6 est restée constante d'une expérience à l'autre.

90 La première série de naissances fournit l'intervalle de confiance au seuil 95 % : $I_1 = [0,48 ; 0,55]$.

La seconde série de naissances donne l'intervalle de confiance au seuil 95 % : $I_2 = [0,48 ; 0,53]$.

I_1 et I_2 ont une intersection non vide, donc, au seuil de risque 5 %, on peut dire que la proportion d'individus de sexe masculin est restée constante d'une génération à l'autre.

91 Le premier lot de chocolats donne l'intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % : $I_1 = [0 ; 0,14]$.

Le second lot de chocolats donne l'intervalle de confiance au seuil 95 % : $I_2 = [0,02 ; 0,14]$.

I_1 et I_2 ont une intersection non vide, donc, au seuil de risque 5 %, on peut considérer qu'il n'y a pas de différence significative entre les deux processus.

Ensembles

Raisonnement logique

1 $E = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Les propositions vraies sont celles numérotées 1, 3 et 5.

2 Le meilleur encadrement est : $-3 < x < -1$.

3 La seule proposition vraie est la proposition 1.

4 $A \in \mathcal{C}_f$; $B \notin \mathcal{C}_f$.

5 a. 1, 2, 4, 12, 15, 25, 31 sont des entiers pairs **ou** supérieurs à 10.

b. 2, 3, 6, 9, 12, 15, 18 sont des entiers multiples de 3 **ou** inférieurs à 20.

c. 3, 6, 12, 18 sont des entiers divisibles par 3 **et** par 2.

6 1. Farid fait partie des groupes B, C, E.

Katia fait partie des groupes A, C, E.

Léo fait partie des groupes A, B, C, D.

2. Myriam ne fait pas automatiquement partie du groupe des adhérents au judo.

7 1. $I \cap J =]1; 2]$; $I \cup J = [-1; 3]$.

2. $I \cap J =]-2; 2]$; $I \cup J =]-\infty; 3]$.

8 1. C'est faux. Contre-exemple : $x = 3$.

2. C'est faux. Contre-exemple : l'entier 2.

3. C'est faux. Il suffit de construire un quadrilatère tel que $AD = BC$ avec (AD) non parallèle à (BC) , par exemple un trapèze isocèle de bases $[AD]$ et $[BC]$.

4. C'est vrai. Par exemple, le réel $\frac{2\pi}{3}$ convient.

5. C'est faux. La suite (u_n) telle que $u_{n+1} = 2n - 100$ est croissante, mais elle n'est pas positive.

9 1. Cet énoncé est vrai.

Énoncé réciproque : « si le discriminant de P est strictement négatif, alors $P(x)$ est strictement positif pour tout réel x ».

Cet énoncé est faux : le polynôme P tel que $P(x) = -x^2 + x - 1$ a un discriminant strictement négatif ($\Delta = -3$), et $P(x)$ est strictement négatif pour tout réel x .

Il n'y a donc pas équivalence.

2. Cet énoncé est faux (voir le cours).

Énoncé réciproque : « si f est dérivable en a , alors elle est continue en a ».

Cet énoncé réciproque est vrai ; il n'y a pas équivalence.

3. Énoncé faux. Un contre-exemple est donné par la fonction f telle que $f(x) = x^3 + 1$.

Énoncé réciproque : « si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$ ».

Cet énoncé réciproque est vrai ; il n'y a pas équivalence.

4. Cet énoncé est vrai.

Énoncé réciproque : « si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ».

Cet énoncé réciproque est vrai ; il y a bien équivalence.

5. Cet énoncé est vrai.

Énoncé réciproque : « si $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ».

Cet énoncé réciproque est faux, car les droites (AB) et (CD) peuvent être non coplanaires et donc non perpendiculaires ; il n'y a pas équivalence.

10 1. (P2) « Si les diagonales d'un quadrilatère ne sont pas de même longueur, alors ce quadrilatère n'est pas un carré ».

(P3) « Si les diagonales d'un quadrilatère sont de même longueur, alors ce quadrilatère est un carré ».

(P4) « Si un quadrilatère n'est pas un carré, alors ses diagonales ne sont pas de même longueur ».

(P1) et (P2) sont vrais ; (P3) et (P4) sont faux.

2. (P2) « Si l'entier n est impair, alors n^2 est impair ».

(P3) « Si l'entier n est pair, alors n^2 est pair ».

(P4) « Si n est un entier tel que n^2 est impair, alors n est impair ».

(P1), (P2), (P3) et (P4) sont vrais.

3. (P2) « Si, pour tout réel a , $f'(a) \neq 0$, alors f ne change pas de sens de variation ».

(P3) « S'il existe un réel a tel que $f'(a) = 0$, alors f change de sens de variation ».

(P4) « Si f ne change pas de sens de variation, alors, pour tout réel a , $f'(a) \neq 0$ ».

(P1), (P2), (P3) et (P4) sont faux.

(P1) et (P2) seraient vrais si on rajoutait l'hypothèse « f dérivable ».

4. (P2) « Si une suite n'est pas convergente, alors elle n'est pas bornée ».

(P3) « Si une suite est convergente, alors elle est bornée ».

(P4) « Si une suite n'est pas bornée, alors elle n'est pas convergente ».

(P1) et (P2) sont faux, (P3) et (P4) sont vrais.

11 1. Supposons que cet ensemble soit fini, et soit n_0 son plus grand élément. Alors, $n_0 + 1$ est aussi un entier et il est plus grand que n_0 , ce qui est impossible. Donc, l'ensemble des nombres entiers est infini.

2. Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Alors, il s'écrit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p entier, q entier naturel non nul et p et q premiers entre eux.

On obtient : $p^2 = 2q^2$.

Ainsi : p^2 est pair. Ceci entraîne que p est pair, car si p était impair, alors p^2 serait aussi impair.

Donc : $p = 2p'$ avec p' entier, et ainsi $q^2 = 2p'^2$.

De la même façon que plus haut, q^2 est pair, donc q est pair.

Ceci est impossible, car p et q ne peuvent être pairs tous les deux, puisqu'ils sont premiers entre eux.

Donc, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3. On note a le plus petit de ces trois nombres et on suppose que $a \geq 1$.

On a donc $b \geq a \geq 1$ et $c \geq a \geq 1$.

D'où : $a + b + c \geq 3$.

On a : $\frac{1}{a} \leq 1$, $\frac{1}{b} \leq 1$ et $\frac{1}{c} \leq 1$, donc $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$.

D'où : $3 \leq a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$, ce qui est impossible, donc le plus petit de ces nombres est strictement inférieur à 1.

12 1. On distingue quatre cas :

– Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \geq 0$: $|x| = x$, $|y| = y$ et $|xy| = xy$, d'où l'égalité.

– Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \leq 0$: $|x| = x$, $|y| = -y$ et $|xy| = -xy$, d'où l'égalité.

– Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \leq 0$: $|x| = -x$, $|y| = y$ et $|xy| = -xy$, d'où l'égalité.

– Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \geq 0$: $|x| = -x$, $|y| = -y$ et $|xy| = xy$, d'où l'égalité.

2. Soit un triangle ABC isocèle en A et ayant un angle de 60° .

– Si l'angle de 60° est \widehat{BAC} , alors la somme des autres angles est 120° , et comme ils sont égaux, chacun des deux angles vaut 60° : le triangle est équilatéral.

– Si l'angle de 60° est l'angle \widehat{ABC} , alors on a aussi $\widehat{ACB} = 60^\circ$, et donc le troisième angle $\widehat{BAC} = 60^\circ$: le triangle est équilatéral.

– On fait de même si l'angle de 60° est l'angle \widehat{ACB} .

3. On a : $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$.

Le reste de la division de n par 3 peut être égal à 0, 1 ou 2.

– Si ce reste est 0, alors n est un multiple de 3, donc $n(n-1)(n+1)$ aussi.

– Si ce reste est 1, $n-1$ est un multiple de 3, donc $n(n-1)(n+1)$ aussi.

– Si ce reste est 2, $n+1$ est un multiple de 3, donc $n(n-1)(n+1)$ aussi.

Ainsi, $n^3 - n$ est un multiple de 3 pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

4. On raisonne selon l'entier x .

– Si $x < -1$, alors $x^2 > 1$ et $x^2 + y^2 > 1$: il n'y a pas de solution.

– Si $x = -1$, alors $y^2 = 0$, soit $y = 0$.

– Si $x = 0$, alors $y^2 = 1$, soit $y = -1$ ou $y = 1$.

– Si $x = 1$, alors $y^2 = 0$, soit $y = 0$.

– Si $x > 1$, alors $x^2 > 1$ et $x^2 + y^2 > 1$: il n'y a pas de solution.

Il y a donc quatre couples solutions :

$(-1 ; 0)$, $(0 ; -1)$, $(0 ; 1)$ et $(1 ; 0)$.

T^{erm}
S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Divisibilité et nombres premiers

A Le programme

L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme.

Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif. L'étude des situations envisagées dans le cadre de cet enseignement conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche.

Les thèmes abordés sont particulièrement propices à l'utilisation des outils informatiques (logiciels de calcul, tableur) et à la mise en œuvre d'algorithmes.

Le niveau d'approfondissement des notions est guidé par les besoins rencontrés dans la résolution des problèmes traités.

Exemples de problèmes	Contenus
Problèmes de codage (codes barres, code ISBN, clé du RIB, code INSEE)	<ul style="list-style-type: none"> • Divisibilité dans \mathbb{Z} • Division euclidienne • Congruences dans \mathbb{Z} • Nombres premiers • Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers
Questionnement sur les nombres premiers : infinitude, n répartitions, tests de primalité, nombres premiers particuliers (Fermat, Mersenne, Carmichael)	

B Notre point de vue

L'objectif du chapitre est l'introduction des notions de base de l'arithmétique : divisibilité, division euclidienne, nombres premiers, congruence. Deux types de problèmes introductifs sont utilisés : certains permettent de découvrir et démontrer une propriété du cours, d'autres ont plutôt pour objectif d'introduire une notion par le traitement d'une situation illustrant son utilité.

Les savoir-faire exposent les raisonnements usuels de l'arithmétique élémentaire et sont largement exploités dans les exercices de la partie Pour s'entraîner.

Les problèmes de la partie Pour aller plus loin reprennent les thèmes des problèmes introductifs et du cours ; ils illustrent naturellement les questionnements cités dans le programme : infinité des nombres premiers, nombres premiers particuliers, problèmes de codage. Le double intérêt, théorique et pratique, des notions du chapitre est ainsi mis en évidence.

Le cours et les exercices des parties Pour démarrer et Pour s'entraîner permettent de travailler l'algorithmique dans des cas simples. La partie Pour aller plus loin présente quelques exercices d'algorithmique plus ouverts qui permettront de souligner auprès des élèves le fait que les questions d'algorithmique, de programmation et de mathématiques s'entremêlent : ce sera l'occasion pour l'enseignant de souligner l'interaction de ces disciplines dans le monde de la recherche et de l'ingénierie.

Les notions abordées dans le chapitre 1

1. Divisibilité et division euclidienne
2. Les nombres premiers
3. Congruence et critères de divisibilité

C Avant de commencer

Voir livre page 140 et le site www.bordas-index.fr pour les corrections détaillées.

Correctif : la correction de l'exercice 12 peut être erronée dans le manuel car l'énoncé indique que k appartient à \mathbb{Z} , pas \mathbb{Q} (voir le site).

D Problèmes

Problème 1 Diviseurs d'un entier

L'objectif est de découvrir quelques propriétés importantes des diviseurs d'un entier par le biais de la résolution d'un problème de géométrie élémentaire, et d'illustrer une idée importante en arithmétique : une recherche exhaustive par programmation est une démonstration lorsque l'on sait que le nombre de cas possibles est fini.

Partie A

1. Avec Pythagore, $x^2 - y^2 = 36$ ou $(x - y)(x + y) = 36$.
2. Les diviseurs positifs de 36 : 1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36.
3. Les couples (1 ; 36), (36 ; 1), (2 ; 18), (18 ; 2), (4 ; 9), (9 ; 4), (3 ; 12), (12 ; 3), (6 ; 6).
4. L'unique couple $(x ; y)$ solution : (10 ; 8).

Partie B

1. Pour $n = 36$, les affichages sont : 1,36 - 2,18 - 3,12 - 4,9 - 6,6. Pour $n = 38$, les affichages sont : 1,38 - 2,19.
3. « $\frac{N}{j} = E\left(\frac{N}{j}\right)$ » équivaut à « $\frac{N}{j}$ est entier ».
4. $0 \leq a \leq b$ donc $aa \leq ab$, soit $a \leq \sqrt{n}$. De même, $ab \leq bb$, soit $\sqrt{n} \leq b$. Lorsqu'on recherche le plus petit diviseur de n dans un couple $(a ; b)$ tel que $ab = n$, on peut donc arrêter la recherche à \sqrt{n} .
5. Ce qui précède montre que le nombre de diviseurs positifs de n est majoré par $2\sqrt{n}$.

Problème 2 Le code-barres

Il s'agit ici de mettre en œuvre les propriétés essentielles de la divisibilité et de la division euclidienne par l'étude de l'un des thèmes qui font l'importance actuelle de l'arithmétique dans ses applications : les codes détecteurs d'erreurs.

1. $S = 3 \times 25 + 35 = 110$.
2. $S = 3 \times 24 + 31 + c = 103 + c$ d'où $c = 7$.
3. **Correctif :** l'énoncé peut être erroné dans certains manuels, il faut lire « Dans la suite, on notera r le reste de la division de $S - c$ par 10 où c est la clé. Vérifier que $c = 10 - r$ dans le cas de la question 2 ».
- $S - c = 103$, $r = 3$ et $c = 7 = 10 - r$.
4. **a.** Les valeurs possibles sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- b.** Pour $r = 0$, on ne peut prendre $c = 10 - r$. Dans ce cas, $c = 0$.
- c.** Si r est un chiffre entre 1 et 9, alors $c = 10 - r$ est un chiffre entre 1 et 9. $S - c$ s'écrit $10q + r$ et en prenant $c = 10 - r$, on obtient $S = 10q + r + c = 10(q + 1)$ multiple de 10.
5. Si $S = 3 \sum_{i=1}^6 a_{2i} + \sum_{i=0}^5 a_{2i+1} + c$ et $S' = 3 \sum_{i=1}^6 a_{2i} + \sum_{i=0}^5 a_{2i+1} + c'$ sont multiples de 10, alors $S - S' = c - c'$ est multiple de 10, or c et c' sont des chiffres, d'où $c = c'$.
6. Oui, par exemple 4971850187820 et 4971850177920 ont la même clé.

7. a. b_2 et a_2 sont des chiffres donc $-9 \leq b_2 - a_2 \leq 9$.

b. $S - S' = 3(a_2 - b_2)$. $S - S'$ est donc un multiple de 3 compris entre -27 et 27. Le seul multiple de 10 entre -27 et 27 qui soit multiple de 3 est 0, or $a_2 \neq b_2$.

c. S est multiple de 10, donc S' ne l'est pas (sinon $S - S'$ le serait).

8. Dans ce cas $S - S' = a_i - b_i$, le raisonnement est analogue.

9. Les deux codes corrects donnés à la réponse 6. ne diffèrent que par deux chiffres.

Problème 3 Le calendrier

Ce travail sur les notions de quotient et de reste dans une division euclidienne est une préparation aux idées du calcul sur les congruences.

1. **a.** Entre le 1^{er} janvier 00 h 00 et le 1^{er} mai 2013 00 h 00 s'écoulent 120 jours.
- b.** $120 = 7 \times 17 + 1$. Le nombre de semaines complètes est 17.
- c.** $r = 1$ et $n = 7q + r$.
- d.** Le 1^{er} mai 2013 est donc un mercredi.
2. $n' = 314 = 7 \times 44 + 6$.
3. Le 11 novembre 2013 est donc un lundi.

Problème 4 Le crible de Matissevititch

On étudie ici un premier crible sur les nombres premiers.

Fichier associé sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 01_TSspe_probleme4.ggb (GeoGebra).

1. **a.** Les ordonnées des points de l'axe des ordonnées appartenant à l'un des segments verts semblent être des nombres composés, tandis que ceux qui ne sont pas sur un segment vert semblent être premiers.
- b.** Le coefficient directeur est $\frac{i^2 - j^2}{i + j} = i - j$.
- c.** La droite $(P_i N_j)$ a pour équation $y = (i - j)x + p$. Et $P_i(j ; i^2)$ étant sur cette droite : $i^2 = (i - j)i + p$ d'où $p = ij$.
2. Les ordonnées des points de l'axe des ordonnées se trouvant sur l'une des droites $(P_i N_j)$ sont les nombres de la forme ij , c'est-à-dire les nombres composés. On en déduit les nombres premiers.
3. Les nombres composés inférieurs à 100 ont au moins un diviseur inférieur ou égal à 10 et leurs diviseurs sont d'au plus 50.

Problème 5 Test de primalité et infinité des nombres premiers

On établit ici la propriété « le plus petit diviseur au moins égal à 2 d'un entier naturel $n \geq 2$ est premier » et on en déduit l'infinité des nombres premiers par l'étude des sorties d'un algorithme.

1. **a.** Sortie : 11.
- b.** Sortie : 2.

2. a. Si un diviseur J de N est trouvé entre 2 et \sqrt{N} alors il est affiché, sinon N est affiché.

b. C'est le plus petit des diviseurs de N (parmi les diviseurs au moins égaux à 2) qui est affiché. Ce plus petit diviseur J est premier, sinon il s'écrit $J = ki$ avec i et k (au moins égaux à 2) divisant J donc N et on contredit le fait que J est le plus petit diviseur.

c. Tout entier N non premier admet au moins un diviseur a avec $a \leq \sqrt{N}$ (cf. problème 1 question B. 4.). Le plus petit de ceux-là est premier d'après la question précédente.

3. La sortie est identique à l'entrée si, et seulement si, l'entrée est un nombre premier.

4. a. Le reste est 1.

b. Si l'affichage était l'un des p_i , cet entier p_i serait diviseur de N , or le reste de la division de N par p_i est égal à 1.

c. On a, avec les questions précédentes, établi par l'absurde l'infinité des nombres premiers.

Problème 6 Les nombres de Fermat

On soulève ici quelques difficultés de l'étude des grands nombres à l'aide de nombres « historiques ». On établit ensuite une deuxième démonstration de l'infinité des nombres premiers.

2. Il faudrait environ 231 jours pour écrire F_{30} .

3. $2^{(2^n)}$ est pair donc F_n est impair.

4. $F_0 = 2$ et $F_1 = 4$ donc $F_0 = F_1 - 2$ et si $F_0 F_1 \dots F_{n-1} = F_n - 2$ alors $F_0 F_1 \dots F_{n-1} F_n = (F_n - 2) F_n = (2^{(2^n)} - 1)(2^{(2^n)} + 1)$ soit $F_0 F_1 \dots F_{n-1} F_n = 2^{2 \times (2^n)} - 1 = F_{n+1} - 2$.

5. Si d divise F_n et F_m avec $m \leq n$ alors d divise $F_n - F_0 F_1 \dots F_{m-1} F_m \dots F_{n-1} = 2$. Comme les nombres de Fermat sont impairs, on a : $d = 1$.

6. De la question précédente, on déduit que deux nombres de Fermat distincts n'ont aucun facteur premier commun. L'infinité des nombres de Fermat implique celle des nombres premiers.

Problème 7 Deux traitements pour une même sortie

On établit une double caractérisation de la congruence de deux entiers modulo m en conjecturant que deux algorithmes distincts ont le même effet.

1. Non.

2. a. Le triplet $(A, B, M) = (2, 2, 2)$ par exemple est tel que A est congru à B modulo M . Le triplet $(A, B, M) = (2, 3, 3)$ est tel que A est non congru à B modulo M .

b. Dire que A et B sont congrus modulo M est équivalent à ce que $A - B$ soit divisible par M .

3. a. R contient le reste de la division euclidienne de A par M .

b. « Oui » est renvoyé lorsque $j = \frac{B - R}{M}$ est entier, c'est-à-dire lorsque $B - R$ est multiple de M .

c. $B - R$ est multiple de M signifie qu'il existe un entier k tel que $B = kM + R$. Comme R est compris entre 0 et $M - 1$, R est aussi le reste de la division de B par M lorsque $B - R$ est multiple de M . Par contre, lorsque le programme renvoie « non », cela signifie que $B - R$ n'est pas multiple de M , donc que l'on ne peut pas écrire B sous la forme $kM + R$ et R n'est pas le reste de B dans la division par M .

d. Cf. la démonstration du premier théorème du cours page 22.

Problème 8 Puissances d'un entier modulo m

On conjecture puis établit une propriété des congruences par un travail sur les TICE qui guide vers une propriété de factorisation. Cette même propriété des congruences sera établie dans le cours par une autre méthode.

Fichier associé sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium : 01_TSspe_probleme8.xws (Xcas).

1. On ouvre une feuille du tableur Xcas par le raccourci **Alt + T** ou en utilisant le menu **Tableur Nouveau tableur**.

Pour entrer les entiers 1, 2, 3... en colonne **B**, on entre 1 en cellule **B0** puis la formule **=B0+1** en cellule **B1** et on copie vers le bas cette formule en utilisant le raccourci **Alt + D** ou en utilisant le menu du tableur **Edit Remplir Copier vers le bas**.

2. Pour tout entier k , l'entier mk est congru à 0 modulo m . **Bi+m*hasard** est donc congru à Bi modulo m , Bi désignant ici l'entier contenu dans la cellule **Bi**.

3. En cellule **D0**, on entre la formule **=irem(E0^p,m)**. Les colonnes **C** et **D** ont alors des contenus identiques, et ce pour toutes valeurs de m et p . On conjecture la propriété suivante : si a et b sont des entiers tels que $a \equiv b(m)$ alors $a^p \equiv b^p(m)$.

$$4. a^n - b^n = (a - b) \times \left(\sum_{j=1}^n a^{j-1} b^{n-j} \right).$$

5. La conjecture résulte immédiatement de la factorisation précédente. On en propose une démonstration par récurrence dans le cours page 22.

Problème 9 La preuve par neuf

On découvre ici comment établir un critère de divisibilité. La preuve par neuf est ensuite étudiée : au-delà de son intérêt historique dans l'enseignement, le parallèle peut être fait avec le principe des codes détecteurs d'erreurs.

$$1. 10 - 1 = 3 \times 3.$$

$$2. 10^k \equiv 1^k(3).$$

$$3. a_i \times 10^i \equiv a_i(3) \text{ d'où le résultat par sommation.}$$

4. n est congru à la somme s de ses chiffres modulo 3. n et s ont donc même reste dans la division par 3.

5. Même démarche compte tenu de : $10 \equiv 1(9)$.

6. a. On a $p \equiv AB(m)$ et $q \equiv ab \equiv AB(m)$. Comme p et q sont compris entre 0 et $m - 1$, on a $p = q$.

b. $m = 9$: on peut déterminer les restes en déterminant les sommes des chiffres (en recommençant au besoin sur la somme obtenue) : $a = 8, b = 2, q = 7, p = 4, p \neq q$ donc le calcul de Max est faux.

c. Avec $m = 3 : a = 2, b = 2, q = 4, p = 4$. On ne détecte pas l'erreur.

d. Si le produit erroné obtenu est congru modulo 9 au produit exact, l'erreur n'est pas détectée.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 Les éléments de \mathbb{N} sont les entiers positifs ou nuls. \mathbb{Z} contient également les opposés des entiers positifs.

2 Les diviseurs positifs de 36 : 1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36.

De 49 : 1, 7, 49.

De 126 : 1, 2, 3, 6, 9, 18, 7, 14, 21, 42, 63, 126.

3 Aux listes explicitées à l'exercice **2**, on ajoute les opposés.

4 *Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :*

01_TSspe_exercice4.ods (OpenOffice),

01_TSspe_exercice4.xlsx (Excel 2007)

et **01_TSspe_exercice4.xls** (Excel 2003)

Voir livre page 140.

5 (A), (D) d'une part, (B), (C), (E), (F), (G) d'autre part.

6 Voir livre page 140.

7 De deux entiers consécutifs, l'un est toujours pair. Le produit l'est donc aussi.

8 Trois entiers consécutifs peuvent s'écrire sous la forme $n, n + 1, n + 2$ et la somme $s = 3(n + 1)$ est multiple de 3.

9 $(2k + 1) + (2k' + 1) = 2(k + k' + 1)$.

10 On aurait 14 divise m et m divise 100, donc 14 diviserait 100, ce qui est faux.

11 $n = 2k$ et $A = 2k(4k^2 + 20) = 8k(k^2 + 5)$.

12 Voir livre page 140.

13 Oui. Si $b = ak$ et $c = ak'$ alors $bc = a^2kk'$.

14 1. $a - 2b = 5$.

2. Si d divise a et b , d divise $a - 2b$. d vaut donc 1 ou 5 ou -1 ou -5.

15 Oui. Soit $d(n)$ le nombre de ses diviseurs positifs. Alors le nombre de ses diviseurs dans \mathbb{Z} est $2d(n)$.

16 1. L'entier b peut être égal à l'entier a . Par exemple : $n = 25, a = 5, b = 5$.

2. S'il n'est pas possible que $a = b$, le raisonnement de Pierre est correct. Par contre, s'il est possible que $a = b$, c'est-à-dire si n peut s'écrire comme le carré d'un entier, le nombre de diviseurs positifs est impair.

17 Voir livre page 140.

18 1. Sortie : 6.

2. $aaa = 111a = 3 \times 37a$. La sortie est a .

19 1. $a = 2\,013 ; b = 7$: quotient = 287, reste = 4.

2. $a = -2\,013 ; b = 7$: quotient = -288, reste = 3.

3. $a = 7 ; b = 2\,013$: quotient = 0, reste = 7.

4. $a = -7 ; b = 2\,013$: quotient = -1, reste = 2 006.

20 Pour les entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

21 Pour les entiers n multiples de 7.

22 Pour les entiers n multiples de 7.

23 1. Sortie : 2.

2. Sortie : 3.

3. R est le reste de la division euclidienne de A par B .

24 Le reste de la division euclidienne d'un entier par 4 est 0, 1, 2 ou 3.

25 113 et 227 sont premiers. Les autres ne le sont pas.

26 On vérifie qu'aucun entier entre 2 et la racine carrée de l'entier n n'est diviseur de n .

27 Voir livre page 140.

28 $45 = 3^2 \times 5 ; 1\,400 = 2^3 \times 5^2 \times 7 ; 735 = 3 \times 5 \times 7^2$.

29 Un programme de décomposition en facteurs premiers est donné dans le cours page 18.

30 $\frac{76}{24} = \frac{2^2 \times 19}{2^3 \times 3} = \frac{19}{2 \times 3}$.

$\frac{13\,650}{1\,785} = \frac{2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 13}{3 \times 5 \times 7 \times 17} = \frac{2 \times 5 \times 13}{17}$.

31 Les entiers 0 et 1 ne sont ni premiers, ni composés.

32 Le nombre de diviseurs positifs de a est $(2 + 1) \times (7 + 1) = 24$. Celui de b est $(1 + 1) \times (3 + 1) = 8$.

33 1. 2 et 3.

2. Non. L'un au moins des trois est pair strictement plus grand que 2.

34 $128 - 15 = 10 \times 11 + 3$. 128 et 15 ne sont donc pas congrus modulo 11.

35 $2\,013 = 287 \times 7 + 4$. Donc $r = 4$.

36 $2\,017 = 201 \times 10 + 7$. $r = 7$.

37 $r = -3$.

38 On cherche les entiers de la forme $2\,012 + 11k$ (k entier) tels que $-2\,000 \leq 2\,012 + 11k \leq 2\,000$, donc tels que $-364 \leq k \leq -2$. Il y en a 363.

39 Il s'agit des entiers naturels m tels que m divise 22, soit 1, 2, 11, 22.

40 Ce reste est aussi celui de 100 par 11, soit 1.

41 Voir livre page 140.

42 Oui, tout entier est congru à son reste modulo 4 et $3 \equiv -1$ (4).

43 Oui, car 7, 8, 9 sont respectivement congrus à 1, 2, 0 modulo 3.

44 Oui, car $-3 \equiv 0$ (3), $28 \equiv 1$ (3), $137 \equiv 2$ (3).

45 Tous. $n^2 - 3n$ est toujours multiple de n .

46 $1\,000 - 1 = 27 \times 37$.

De $10^3 \equiv 1$ (37), on déduit $(10^3)^k \equiv 1$ (37).

47 1. Avec l'entrée $A = 3$, la sortie est -4.

Avec l'entrée $A = 4$, la sortie est -3.

Avec $A = 7$, la sortie est 0 et avec $A = 8$, la sortie est 1.

2. Les sorties possibles : -4, -3, -1, 0, 1, 2.

3. La sortie est obtenue en enlevant un multiple de 7 à l'entrée. Entrée et sortie sont donc congrus modulo 7.
4. Il suffit de remplacer le symbole \geq par le symbole $>$ dans le test d'arrêt de la boucle.
- 5.

TEXAS	CASIO
<pre> :Prompt A :While A>3 :A-7→A :End :While A<-3 :A+7→A :End :Disp A </pre>	<pre> "A":?→A# While A>3# A-7→A# WhileEnd# While A<-3# A+7→A# WhileEnd# A </pre>

POUR S'ENTRAÎNER

- 48 Pour n entier : 7 divise $n + 54$ si, et seulement si, il existe k entier tel que $n = 7k - 54$.
Les entiers naturels répondant à la question sont obtenus pour $k \geq 8$.
- 49 Soit n tel que n divise $n + 12$. Comme n divise n , n divise $(n + 12) - n = 12$. Réciproquement un diviseur de 12 divise $n + 12$. Les entiers solutions sont donc les diviseurs de 12.
- 50 Les entiers solutions sont les diviseurs de 7.
- 51 $(3n + 4) - 3(n + 7) = -17$.
Les entiers solutions sont les diviseurs de 17.
- 52 $(2n + 9) - 2(n + 11) = -13$.
Les entiers solutions sont les diviseurs de 13.
- 53 a divise $(n + 2)(n - 1) - (n^2 + n + 3) = -5$.
- 55 $(n - 2)(n + 2) - (n^2 + 2) = -6$.
Réciproquement, si $n + 2$ divise 6 alors $n + 2$ divise $6 + (n - 2)(n + 2) = n^2 + 2$. Les entiers solutions sont donc les entiers n tels que $n + 2$ divise 6 : $-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4$.
- 56 1. 2 divise $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$.
2. 3 divise $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3$.
- 57 1. $2(3n + 7) - 6(n + 1) = 8$
2. Pour tout entier n , si $n + 1$ divise $3n + 7$, alors $n + 1$ divise $2(3n + 7) - 6(n + 1) = 8$.
3. Non. Contre-exemple : $n = 7$.
- 58 Les couples d'entiers solutions sont les couples d'entiers solutions de $(x - y)(x + y) = 17$.
 $(x - y; x + y)$ peut *a priori* prendre les valeurs $(1; 17), (-1; -17), (17; 1), (-17; -1)$. On vérifie ainsi que les couples $(x; y)$ solutions sont $(9; 8), (-9; -8), (9; -8), (-9; 8)$.
- 59 Les couples solutions sont solutions de $(x - 3y)(x + 3y) = 7$. Cela mène aux solutions : $(4; -1), (-4; 1), (4; 1), (-4; -1)$.
- 60 Voir livre page 140.
- 61 Faux. Contre-exemple : $d = 3, m = n = 3, a = b = 2$.
- 62 1. Pour tout entier n , on a $u_{n+1} = 8 \times 2^{3n} - 1$, d'où $u_{n+1} = 8 \times u_n + 7$. La suite construite par le programme satisfait cette relation de récurrence et le premier terme (terme d'indice 0) est le même pour les deux suites : elles sont donc égales.
2. Initialisation : $u_0 = 0 = 7 \times 0$.
Hérédité : si $u_n = 7k$ alors $u_{n+1} = 7(8 \times k + 1)$ avec la relation de récurrence mise en évidence à la question précédente.
- 63 Pour n entier naturel, on pose $u_n = 4^{2n} - 2^n$.
On vérifie alors que, pour tout entier naturel n , on a :
 $u_{n+1} = 16u_n + 14 \times 2^n$. L'hérédité de la propriété en résulte.

64 Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

01_TSspe_exercice64.ods (OpenOffice),
01_TSspe_exercice64.xlsx (Excel 2007),
01_TSspe_exercice64.xls (Excel 2003) et
01_TSspe_exercice64.xws (Xcas).

1. On vérifie que pour tout entier naturel n , on a la relation :
 $u_{n+1} = 4u_n + 9n$. Ceci explique la construction de la feuille de calcul.
2. La relation de récurrence établie ci-dessus permet d'établir l'hérédité.
- 65 FAUX. Contre-exemple : $a = 2, c = 3, b = 4, d = 9$.
- 66 VRAI. Si $b = ak$ (k entier), alors $b^2 = (kka)a$.
- 67 VRAI. $(2k + 1) + (2(k + 1) + 1) = 4(k + 1)$.
- 68 FAUX. Contre-exemple : $a = 3, b = 5$.
- 69 1 789 = $bq + 497$. b et q sont donc diviseurs « complémentaires » de 1 292, avec $b > 497$.
On a donc $(b; q) = (646; 2)$ ou $(b; q) = (1\ 292; 1)$.
- 70 $225 = bq + 4$. b est un diviseur de 221 avec $b > 4$. b peut valoir 13, 17 ou 221.
- 71 Voir livre page 140.
- 72 n s'écrit $4q$ ou $4q + 1$ ou $4q + 2$ ou $4q + 3$. Les carrés, dans chacun des cas, s'écrivent $4k$ ou $4k + 1$ en développant et regroupant les termes multiples de 4.
- 73 Si n est de la forme $5q$ alors le facteur $n - 55$ est divisible par 5. Si n est de la forme $5q + 1$, le facteur $n - 11$ est divisible par 5. Si n est de la forme $5q + 2$, le facteur $n - 22$ est divisible par 5. Si n est de la forme $5q + 3$, le facteur $n - 33$ est divisible par 5. Si n est de la forme $5q + 4$, le facteur $n - 44$ est divisible par 5.
- 74 On développe le second membre de l'égalité.
 $n + 2 > n - 3 \geq 0$ pour tout $n \geq 3$: $n - 3$ est le reste pour $n \geq 3$. On traite les cas $n = 0, 1$ ou 2 part.
- 75 $7n + 3 = 3(2n - 1) + (n + 6)$. $n + 6$ est le reste cherché pour les entiers n tels que $2n - 1 > n + 6$, c'est-à-dire pour $n \geq 8$. On traite les premières valeurs de n une à une.
- 76 1. Avec $a = 24$, la sortie est « OUI ». Avec $a = 25$, la sortie est « NON ».
2. q est le quotient de la division de a par 7. $a - 7q$ est le reste de la division de a par 7. Les entrées donnant la sortie OUI sont donc les entiers tels que le quotient de la division de a par 7 est égal au reste. L'égalité $a - 7q = q$ permet de les trouver : ce sont les entiers $8q$ où q prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- 3.

TEXAS	CASIO
<pre> :Prompt A :Q→Q# :7→M# :While M≤A# :Q+1→Q# :M+7→M# :End# :If A-7×Q=Q# :Then# :Disp "OUI"# :Else# :Disp "NON"# :End# </pre>	<pre> "A":?→A# Q→Q# 7→M# While M≤A# Q+1→Q# M+7→M# WhileEnd# If A-7×Q=Q# Then "OUI"# Else "NON"# IfEnd# </pre>

- 77 FAUX. Contre-exemple : $a = 10, b = 7$.
- 78 VRAI. Exemple : $a = 5, b = 2$.
- 79 FAUX. Contre-exemple : $a = a' = 13, b = 7$.
- 80 VRAI. $a = bq + r, a' = bq' + r'$. $aa' = b(bqq' + qr' + q'r) + rr'$.
Si $rr' = bq'' + r''$, on obtient $aa' = b(bqq' + qr' + q'r + q'') + r''$.

- 81** $\sqrt{1789} < 43$. On vérifie qu'aucun des entiers premiers inférieurs à 43 ne divise 1 789.
- 82** 1. $f(n) = (n+7)(n+11)$ est produit d'entiers supérieurs strictement à 1.
2. $f(-12) = 5$ est premier.
- 83** Voir livre page 140.
- 85** $x^2 - px + q$ s'écrit sous la forme $(x-n)(x-m)$ où n et m sont des entiers naturels. D'où $p = n+m$ et $q = nm$. Comme q est premier, on a par exemple $n = 1$ et $m = q$. On a alors $p = 1+q$. Or les seuls nombres premiers consécutifs sont 2 et 3.
- 86** 1. Si $n = 2$, alors $n+7 = 9$ est non premier. Et si $n > 2$ et n premier, alors n est impair et $n+7$ est pair donc $n+7$ est non premier.
2. La réciproque est fausse. Contre-exemple : $n = 8$.
3. L'implication est fausse. Contre-exemple : $n = 2$.
- 87** 2. On remarque que tous les nombres premiers se situent dans la colonne 2 et la colonne 6. Conjecture : tout nombre premier est de la forme $6q+1$ ou de la forme $6q+5$. Pour justifier cette conjecture, on explicite des diviseurs non triviaux (le facteur 2 ou le facteur 3) dans chacun des autres cas : $6q$, $6q+2$, $6q+3$, $6q+4$.
3. Si $p = 6q+1$ alors $p^2 - 1 = 12q(3q+1)$. Si q n'est pas pair, $3q+1$ l'est et $p^2 - 1$ est divisible par 24. On raisonne de même si $p = 6q+5$: $p^2 - 1 = 12q(3q+5) + 24$.
- 88** 1. Si p est de la forme $3k+1$ alors $8p^2 + 1 = 3(24k^2 + 16k + 3)$, et si p est de la forme $3k+2$ alors $8p^2 + 1 = 3(24k^2 + 32k + 11)$. Dans les deux cas, $8p^2 + 1$ est composé.
2. La réciproque est fausse. Contre-exemple : $p = 4$.
- 89** Une telle somme s'écrit :
 $(2q+1) + (2(q+1)+1) = 4q+4 = 4(q+1)$.
Soit $q = 0$ et la somme est égale à 4, non premier. Soit $q > 0$ et la somme est produit de deux entiers strictement supérieurs à 1.
- 90** 1. Voir cours.
2. $n = pg$ où p est le plus petit diviseur de n entre 2 et $n-1$ et g le plus grand. Comme p est premier, n est produit de deux nombres premiers.
- 91** Voir livre page 140.
- 92** 1. On doit avoir $f(0)$ premier, soit b premier.
2. $f(b) = ab + b = b(a+1)$. $f(b)$ premier implique $a = 0$. f est donc constante.
- 93** FAUX. Contre-exemple : 2.
94 FAUX. Contre-exemple : 9.
95 FAUX. $P(41)$ n'est pas premier.
96 $f(p-1) = (p-1)^2 + p - 1 + p = p^2$, non premier.
97 $231 = 3 \times 7 \times 11$. Un arbre permet de lister facilement les 8 diviseurs positifs.
98 1. $1, p, p^2$.
2. Les carrés de nombres premiers.
99 $4 \times 7 \times 2 \times 11 \times 6 = 3\,696$.
101 p^{14} ou $p^2 q^4$ où p et q sont premiers.
102 Voir livre page 140.
103 VRAI. S'ils étaient tous premiers, on aurait deux décompositions en facteurs premiers d'un même entier.
104 FAUX. 4 a trois diviseurs positifs et n'est pas premier.

- 105** FAUX. 2^3 , puissance d'un nombre premier, a 4 diviseurs positifs.
- 106** 1. Ce sont les entiers de la forme $-1 + 5k$.
2. 104.
107 1.
- | | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|
| $x \bmod 5$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $3x \bmod 5$ | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
- Les entiers solutions sont les entiers $4 + 5k$, k entier.
- 2.
- | | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|
| $x \bmod 5$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $3x \bmod 5$ | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
- Les entiers solutions sont les entiers $4 + 5k$, k entier.
- 108** 1. $7^6 \equiv 1 (9)$ d'où $(7^6)^k \equiv 1 (9)$.
2. Réciproque : « Pour tout naturel n , si $7^n \equiv 1 (9)$ alors $n \equiv 0 (6)$ ». Faux. Contre-exemple : $n = 3$.
- 109** $57 \equiv 1 (7)$. Le reste de la division de 57^{2018} par 7 est donc 1. $83 \equiv 6 (7)$ et $6^2 \equiv 1 (7)$ d'où $6^{2k+1} \equiv 6 (7)$. Le reste de la division de 83^{2019} par 7 est donc 6.
 $2\,018 \equiv 2 (7)$ et $2^6 \equiv 1 (7)$, d'où $2^{336 \times 6 + 2} = 4 \times (2^6)^{336} \equiv 4 (7)$ et le reste de la division de $2\,018^{2018}$ par 7 vaut 4.
- 110** 1. Si m divise $a-b$, alors m divise $c(a-b)$.
2. Réciproque : « Pour tous entiers a, b, c et tout entier $m \geq 2$, si $ac \equiv bc (m)$ alors $a \equiv b (m)$ ». Faux. Contre-exemple : $a = 7$, $b = 8$, $m = 2$, $c = 2$.
- 111** $3^2 \equiv 2 (7)$, d'où $(3^2)^n \equiv 2^n (7)$.
112 Pour $n \geq 3$, $a_n \equiv 1 + 3^n (8)$, soit $a_n \equiv 2 (8)$ ou $a_n \equiv 4 (8)$ suivant la parité de n . Ainsi a_n n'est pas multiple de 2^3 , donc non multiple de 1 000.
113 Voir livre page 140.
114 $3^2 \equiv 1 (8)$. D'où $3^n \equiv 1 (8)$ pour n pair et $3^n \equiv 3 (8)$ pour n impair.
115 Voir livre page 140.
116 Lorsqu'un vert rencontre un brun, la différence d'effectifs entre ces deux couleurs est inchangée :
$$v' - b' = (v-1) - (b-1) = v - b.$$
Lorsqu'un vert rencontre un orange :
$$v' - b' = (v-1) - (b+2) = v - b - 3.$$
Lorsqu'un brun rencontre un orange :
$$v' - b' = (v+2) - (b-1) = v - b + 3.$$
On montre ainsi que les différences d'effectifs entre deux couleurs sont invariantes modulo 3. Les différences sont au départ $(v-b, v-0, b-0) = (-2, -4, -2)$ soit $(1, 2, 1)$ modulo 3. On ne pourra pas obtenir deux populations égales puisqu'alors la différence serait de 0 modulo 3.
117 FAUX. Contre-exemple : $m = 8$, $a = 7$.
118 VRAI. $19 \equiv 3 (8)$ et $3^2 \equiv 1 (8)$ d'où $3^{2k} \equiv 1 (8)$.
119 FAUX. Contre-exemple : $a = 2$, $b = 4$, $m = 4$.

120

$n \bmod 6$	0	1	2	3	4	5
$8n + 1 \bmod 6$		3			3	
$13n + 1 \bmod 6$		2	3	4		0
$n \bmod 6$	0		2	3	4	
$N \bmod 6$	0	0	0	0	0	0

121 $7^2 \equiv 10(13)$ et $23 \equiv 10(13)$, d'où $7^{2n} - 23^n \equiv 0(13)$.

122 1. Si $n \equiv 1(7)$ alors $n^3 + n - 2 \equiv 1 + 1 - 2(7)$, d'où le résultat.

2. Réciproque : « Pour tout naturel n , si $f(n) \equiv 0(7)$ alors $n \equiv 1(7)$ ». Faux. Contre-exemple : $n = 3$.

123 Vrai car $7 \equiv 3(4)$ et $3^2 \equiv 1(4)$ d'où $7^{2n} \equiv 1(4)$.

125 La somme des chiffres est $7 + 1 + x + 4$, c'est-à-dire x modulo 3. x peut donc valoir 0, 3, 6 ou 9.

126 $2y$ est divisible par 4 pour $y = 0, 4$ ou 8. La somme des chiffres est $x + y + 2$ modulo 3.

Pour $y = 0$, on peut prendre $x = 1, 4$ ou 7.

Pour $y = 4$, on peut prendre $x = 0, 3, 6$ ou 9.

Pour $y = 8$, on peut prendre $x = 2, 5$ ou 8.

127 Voir livre page 140.

128 1. $100 \equiv 10(45)$. Si $10^n \equiv 10(45)$ alors $10^{n+1} \equiv 100(45)$, soit $10^{n+1} \equiv 10(45)$. D'où la propriété par récurrence.

2. Un entier $n = \sum_{j=0}^p a_j \times 10^j$ est multiple de 45 si, et seulement

si, $s = a_0 + 10 \sum_{j=1}^p a_j$ est multiple de 45.

3. Pour $a = 20\,152\,016$, on a $s = 6 + 10(2 + 0 + 1 + 5 + 2 + 0 + 1) = 116$ et $s' = 6 + 10(1 + 1) = 26$. Donc a n'est pas multiple de 45.

Pour $b = 20\,152\,035$, $s = 5 + 10(2 + 0 + 1 + 5 + 2 + 0 + 3) = 135$, $s' = 5 + 10(1 + 3) = 45$. b est multiple de 45.

129 Un entier est toujours congru à la somme de ses chiffres modulo 9 (car les puissances de 10 sont congrues à 1 modulo 9). La différence de deux entiers ayant les mêmes chiffres est donc congrue à 0 modulo 9.

130 FAUX. Contre-exemple : $a = 3, b = 6, m = 3$.

131 VRAI. Un entier N s'écrit $100A + 10d + u$ (où d et u sont les chiffres des dizaines et des unités). Comme 100 est congru à 0 modulo 25, N est congru à $10d + u$ modulo 25.

132 FAUX. Soit $N = 9...9$ où le nombre de chiffres 9 est égal à 11 111 111 111.

La somme des chiffres est $s = 9 \times 11\,111\,111\,111 = 99\,999\,999\,999$.

La somme des chiffres de s est $s' = 11 \times 9 = 99$ et la somme des chiffres de s' est $18 \neq 9$.

133 VRAI d'après le critère usuel de divisibilité par 9.

134 Si $n + 3$ divise $n^2 + 1$ alors $n + 3$ divise :

$$(n^2 + 1) - (n - 3)(n + 3) = 10.$$

Réciproquement, si $n + 3$ divise 10, alors $n + 3$ divise $10 + (n - 3)(n + 3) = n^2 + 1$. Les entiers n solutions sont donc les entiers n tels que $n + 3$ divise 10 : $-2, -1, 2, 7, -4, -5, -8, -13$.

135 En raisonnant modulo 5, on constate que pour toute valeur de n , au moins l'un des six entiers est multiple de 5. Pour qu'ils soient tous premiers, l'entier multiple de 5 doit donc être égal à 5. Cet entier ne peut être que $n + 1$ ou $n + 3$. $n = 4$ est la seule solution.

136 49 et 335 sont congrus à 10 modulo 13. Donc pour tout entier naturel n , l'entier $7^{2n} - 335^n$ est congru à 0 modulo 13.

137

$n \bmod 5$	0	1	2	3	4
$g(n) \bmod 5$	2	0	2	0	1

138

Entrée : N entier naturel non nul, p nombre premier

Traitement : Affecter la valeur 0 à A

Tant que p divise N :

Affecter la valeur $A + 1$ à A

Affecter la valeur $\frac{N}{p}$ à N

Sortie : A

139

Entrée : N entier naturel

Traitement :

Tant que $N > 10$:

Affecter à $N - 21$ à N

Sortie : N

140 $7^3 \equiv 1(9)$. Si $n = 3q$, le reste est 1. Si $n = 3q + 1$, le reste est 7. Si $n = 3q + 2$, le reste est celui de 7^2 c'est-à-dire 4.

Comme $2\,014 \equiv 7(9)$ et $2\,012 \equiv 2(3)$, le reste de la division euclidienne de $2\,014^{2012}$ par 7 est 4.

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 140 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

Correctif : Il se peut qu'il manque le mot « petit » dans l'énoncé de l'exercice 144 de certains manuels : « n est le plus petit entier positif ayant... ».

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Le nombre de zéros de $n!$

On étudie ici quelques algorithmes pour la découverte du nombre de 0 terminant l'écriture décimale de $n!$: c'est l'occasion de faire travailler les notions de diviseurs et de facteurs premiers d'un entier et de manipuler des grands nombres en arithmétique.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

01_TSspe_TP1.xws et 01_TSspe_correctionTP1.xws (Xcas).

A. Découvrir la notation factorielle

1. $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $10! = 3\,628\,800$.

B. Le nombre de zéros de $n!$

1. On ouvre l'éditeur de programme par le raccourci **Alt** + **P** ou par le menu **Prg** **Nouveau programme**.

```
nbZero(n):={
local compteur,q;
compteur:=0;
q:=n/10;
tantque q==floor(q) faire
compteur:=compteur+1;
q:=q/10;
ftantque;
retourne compteur;;
```

2. Second programme :

```
nbZ(n):={
local c,p;
c:=1;
p:=10^c;
tantque irem(n,p)==0 faire
c:=c+1;
p:=10^c;
ftantque;
retourne c-1 };;
```

3. Après quelques essais, on peut aboutir à la conjecture suivante : il semble que le nombre de 0 dans $n!$ soit l'exposant du facteur 5 dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers. Pour faciliter les observations, on pourra ouvrir une feuille de tableur (raccourci **Alt** + **T**), remplir la colonne **A** par les premiers entiers naturels, la colonne **B** par la décomposition en facteurs premiers de la factorielle de l'entier (instruction **=factoriser_entier((A0)!)**) puis la colonne **C** par le nombre de zéros de la factorielle de l'entier (instruction **=nbZ((A0)!)**).

C. Vers une étude théorique

1. Fonction déterminant l'exposant du facteur 5 :

```
nbCinq(n):={
local compteur, q;
compteur:=0;
q:=n/5;
tantque q==floor(q) faire
compteur+=1;
q/=5;
ftantque;
retourne compteur;
};;
```

2. Avec l'instruction (séquence pour les valeurs de $n = 1$ à $n = 100$) : **=seq(nbCinq(n!)-nbZero(n!),n,1,100)** on obtient l'affichage d'une séquence de 0.

3. Dans le produit $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$, si un facteur $5^k \times a_1 \times a_2 \times \dots \times a_p$ intervient, alors le facteur $2^k \times a_1 \times a_2 \times \dots \times a_p$ apparaît aussi (puisque c est un entier plus petit) et cette correspondance est clairement injective.

4. Résulte immédiatement de la question précédente.

D. Un autre algorithme

2. Le nombre de multiples non nuls de m inférieurs à a est égal à la partie entière de $\frac{a}{m}$ puisque $0 < mj \leq a$ équivaut à $0 < j \leq \frac{a}{m}$ donc $0 < j \leq E\left(\frac{a}{m}\right)$.

3. L'algorithme calcule la somme $E\left(\frac{n}{5}\right) + E\left(\frac{n}{5^2}\right) + \dots + E\left(\frac{n}{5^k}\right)$ où k est tel que $E\left(\frac{n}{5^{k+1}}\right) = 0$ (c'est-à-dire $n < 5^{k+1}$). Cette somme est égale à : nombre de multiples de 5 inférieurs à n + nombre de multiples de 25 inférieurs à n + ...

On compte ainsi les multiples de 25 deux fois, les multiples de 125 trois fois... et chaque facteur 5 dans la décomposition en facteurs premiers de l'entier $n!$ est donc compté une fois exactement.

4. a. $(n+1)! = n! \times (n+1)$. La décomposition de $(n+1)!$ contient donc au moins autant de facteurs 2 et de facteurs 5 que la décomposition de $n!$ donc u_{n+1} est supérieur ou égal à u_n .

b. On peut par exemple utiliser la fonction suivante :

```
f(z):={
local k,s,j;
s:=0;j:=0;
tantque s!=z faire
j:=j+1;
s:=s+nbCinq(j);
fpour;
return j};;
```

$f(1000)$ renvoie 4 005 : les entiers n , tels que $n!$ se termine par 1 000 zéros, sont donc les entiers 4 005, 4 006, 4 007, 4 008, 4 009.

TP 2 Table de multiplication modulo 7

On résout dans ce TP quelques équations sur les congruences.

La lecture d'une table de multiplication modulo un entier est la clef de ces résolutions.

Fichiers associés sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

01_TSspe_TP2.xlsx (Excel 2007),

01_TSspe_TP2.xls (Excel 2003) et

01_TSspe_TP2.ods (OpenOffice).

A. Construction et utilisation d'une table

2. La formule qui convient :

=MOD(\$A2*B\$1;7)

4. En regardant la ligne du 2 dans la feuille du tableur (c'est-à-dire la ligne 4 sur la copie d'écran de l'énoncé), on constate que $2x \equiv 5(7)$ équivaut à $x \equiv 6(7)$.

5. La ligne du 3 donne : $3x \equiv x(7) \Leftrightarrow x \equiv 0(7)$.

6. La diagonale donne : $x^2 \equiv 1(7) \Leftrightarrow x \equiv 1(7)$ ou $x \equiv 6(7)$.

7. $5n + 3 \equiv 0(7) \Leftrightarrow 5n \equiv 4(7)$.

La ligne du 5 donne : $5n + 3 \equiv 0(7) \Leftrightarrow n \equiv 4(7)$.

B. Une autre table

$3x \equiv 1(26) \Leftrightarrow x \equiv 9(26)$. Et $x^2 \equiv 5(26)$ n'a aucune solution.

TP 3 Alignement de restes

Des conjectures à l'aide d'un graphique obtenu sur tableur permettent ici d'exprimer quotient et reste dans la division d'un polynôme A par un polynôme B . L'observation d'un « début » de graphe « irrégulier » permet de revenir sur la condition $0 < r < b$ définissant un reste.

Fichiers associés sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

01_TSspe_TP3.xlsx (Excel 2007),

01_TSspe_TP3.xls (Excel 2003) et

01_TSspe_TP3.ods (OpenOffice).

A. Un premier cas

1. Les formules de la feuille de calcul :

	A	B	C	D	E
1	Entiers	A(n)	B(n)	q(n)	r(n)
2	0	=A2*2+5*A2-7	=A2+3	=ENT(B2/C2)	=B2-C2*D2
3	=A2+1	=A3*2+5*A3-7	=A3+3	=ENT(B3/C3)	=B3-C3*D3
4	=A3+1	=A4*2+5*A4-7	=A4+3	=ENT(B4/C4)	=B4-C4*D4
5	=A4+1	=A5*2+5*A5-7	=A5+3	=ENT(B5/C5)	=B5-C5*D5
6	=A5+1	=A6*2+5*A6-7	=A6+3	=ENT(B6/C6)	=B6-C6*D6
7	=A6+1	=A7*2+5*A7-7	=A7+3	=ENT(B7/C7)	=B7-C7*D7
8	=A7+1	=A8*2+5*A8-7	=A8+3	=ENT(B8/C8)	=B8-C8*D8
9	=A8+1	=A9*2+5*A9-7	=A9+3	=ENT(B9/C9)	=B9-C9*D9
10	=A9+1	=A10*2+5*A10-7	=A10+3	=ENT(B10/C10)	=B10-C10*D10
11	=A10+1	=A11*2+5*A11-7	=A11+3	=ENT(B11/C11)	=B11-C11*D11

2. On sélectionne la colonne **A** puis la colonne **D** en maintenant la touche **Ctrl** enfoncée. Avec OpenOffice, on clique sur l'icône **Diagramme** et on choisit **XY-dispersion** pour la représentation.
3. et 4. Les points obtenus semblent alignés pour $n \geq 10$.
On conjecture puis on démontre que, pour $n \geq 10$:
- $$q(n) = n + 1 \text{ et } r(n) = n - 10.$$

B. Un second cas

On conjecture cette fois que les points $(n; q(n))$ se situent sur la parabole d'équation $y = x^2 + 3x + 1$ et que les points $(n; r(n))$ se trouvent sur la droite d'équation $y = x + 3$.
On vérifie alors facilement que $q(n) = n^2 + 3n + 1$ et $r(n) = n + 3$ pour tout entier naturel n .

CAP VERS LE BAC

Sujet A

Correctif : il faut lire « on se propose de déterminer les couples $(n; m)$ d'entiers... » et non $(m; n)$.

1. Pour $m = 1, 2, 3, 4$ respectivement, l'équation s'écrit $7^n = 7, 7^n = 13, 7^n = 25, 7^n = 49$. Deux solutions : $(1; 1), (2; 4)$.
2. a. Pour $m > 4$, on a $2^m \equiv 0 (32)$.
- b. $7^4 \equiv 1 (32)$ d'où $7^n \equiv 1 (32)$ pour $n \equiv 0 (4), 7^n \equiv 7 (32)$ pour $n \equiv 1 (4), 7^n \equiv 17 (32)$ pour $n \equiv 2 (4), 7^n \equiv 23 (32)$ pour $n \equiv 3 (4)$.
- c. Si $(n; m)$ vérifie **(F)** alors $n \equiv 0 (4)$ d'après la question précédente. Or $7^4 \equiv 1 (5)$, donc $7^n \equiv 1 (5)$.
- d. Si on avait $7^n - 3 \times 2^m = 1$ avec $m > 4$, on aurait $7^n - 1 = 3 \times 2^m$ et 3×2^m serait multiple de 5.
3. L'ensemble se réduit aux couples déterminés à la question 1.

Sujet B

1.

$a \bmod 3$	0	1	2
$a^2 \bmod 3$	0	1	1

$x^2 + y^2$ n'est donc pas multiple de 3 lorsque x et y ne sont pas tous deux congrus à 0 modulo 3.

2. Vrai, l'entier s'écrit $k(2 \times 3 \times \dots \times (k-1) \times (k+1) \times \dots \times n+1)$, produit de deux entiers strictement supérieurs à 1.
3. $11^3 \equiv 1 (7)$ d'où $11^{670 \times 3 + 1} \equiv 11 (7)$ et $11 \equiv 4 (7)$.
4. Faux, contre-exemple : $n = 9$.
5. Vrai. L'équation s'écrit $(9x - y)(9x + y) = 17$. x et y étant positifs, pour une solution $(x; y)$: $0 < 9x - y < 9x + y$. D'où $9x - y = 1$ et $9x + y = 17$ et l'unique solution $(x; y) = (1; 8)$.

Sujet C

1. $u(1) = 31, u(2) = 331, u(3) = 3331$.
2. a. $3u(0) = 3 = 10 - 7$. Et si $3u_n = 10^{n+1} - 7$ alors $3u_{n+1} = 30u_n + 63 = 10 \times 10^{n+1} - 70 + 63$.
- b. $10^{n+1} - 7$ s'écrit 99...93 avec n chiffres 9 et $u(n)$ s'écrit 33...31 avec n chiffres 3.
3. On vérifie qu'aucun des entiers entre 2 et $18 = \lfloor \sqrt{331} \rfloor$ n'est diviseur de 331.

4. $u(n)$ se termine par 1 donc n'est divisible ni par 2, ni par 5. La somme des chiffres est congrue à 1 modulo 3, donc $u(n)$ n'est pas multiple de 3.
5. a. Il suffit de remarquer que $-7 \equiv 4 (11)$ et $10 \equiv -1 (11)$.
- b. Si on avait $u_n = 0 (11)$, alors on aurait $3u_n \equiv 0 (11)$, ce qui est faux d'après la question précédente.
6. a. Le reste est 4.
D'où $(10^4)^4 \equiv 4^4 (17)$ et $4^4 = 16 \times 16 \equiv (-1)(-1) \pmod{17}$.
- b. $3u_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7 \equiv 10^9 - 7 \equiv 0 (17)$.

Sujet D

- A. Voir cours.
- B. 1. Il suffit de remarquer que $11 \equiv 1 (5)$ et $7 \equiv 2 (5)$.
- 2.

$x \bmod 5$	0	1	2	3	4
$x^2 \bmod 5$	0	1	4	4	1

$y \bmod 5$	0	1	2	3	4
$2y^2 \bmod 5$	0	2	3	3	2

3. Les restes sont lus dans les tableaux précédents.
4. D'après les tableaux précédents et la question 1, si $(x; y)$ est solution, alors x et y sont congrus à 0 modulo 5.
5. Si x et y sont multiples de 5, alors $x = 5a$ et $y = 5b$ et l'équation **(F)** implique $11 \times 5a^2 - 7 \times 5b^2 = 1$, le membre de gauche vaut $0 \bmod 5$ et le membre de droite vaut 1.
- (F)** n'a donc aucune solution.

Sujet E

- A. 2. $629 = 17 \times 37$.
- B. 1. P_1 a pour équation $z = 5$. Les points de P_1 vérifiant $xy = 5$ sont les points de coordonnées $(1; 5; 5), (5; 1; 5), (-1; -5; 5), (-5; -1; 5)$.
2. $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = n^4 + 4$.
3. On montre que les deux facteurs sont strictement plus grands que 1 pour $n > 1$.
4. 8 points avec $(x; y) = (1; n^2 + 4)$ ou $(n^2 + 4; 1)$ et les « opposés », $(n^2 - 2n + 2; n^2 + 2n + 2), (n^2 + 2n + 2; n^2 - 2n + 2)$ et les « opposés ».
5. Avec la décomposition donnée en A. 2. et la question B. 4, on a les huit points qui répondent à la question.

POUR ALLER PLUS LOIN

- 159** 1. p^α divise a et b donc divise $a + b$. Et $p^{\alpha+1}$ ne divise pas $a + b$, sinon il diviserait $(a + b) - b = a$.
2. La réciproque est fautive. Avec $a = b = 3 \times 7, p = 3$, on a $\alpha = \beta = 1$ et $a + b = 2 \times 3 \times 7$, l'exposant dans la somme est égal à α .

160 1.

$n \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \bmod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

2. Si l'on ajoute trois carrés, la somme peut être congrue modulo 8 à 0, 3, 4, 2, 1, 5, 6 (faire un arbre).

161 1. 2 et 5 puisqu'un rep-unit ne se termine jamais par un chiffre pair ou par 5.

2. $N_3 = 3 \times 37$, $N_4 = 11 \times 101$ et $N_5 = 41 \times 271$.

3. a. Un rep-unit a pour chiffre des unités 1, donc est congru à 1 modulo 10.

On conclut avec le tableau suivant :

$n \bmod 10$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \bmod 10$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

b. Si $n = 1 + 10k$ alors $n^2 = 1 + 20k(1 + 5k)$ et si $n = 9 + 10k$ alors $n^2 = 1 + 20(4 + 9k + 5k^2)$.

c. N_2 n'est pas un carré. Et pour $k \geq 3$, on peut écrire N_k sous la forme $11 + 100 \times N_{k-2} \equiv 11 \pmod{20}$. Un rep-unit n'est jamais congru à 1 modulo 20.

162 2. A est congru à -1 modulo p_i pour i entre 1 et n . Les facteurs premiers de A sont donc à chercher dans les p_j avec $j \geq n + 1$. Notons p_j l'un des facteurs premiers de A. On a $p_j \leq A$, c'est-à-dire $p_j \leq p_1 p_2 \dots p_n - 1$ et a fortiori $p_{n+1} < p_j < p_1 p_2 \dots p_n$.

163 1. $c = g(0)$ doit être premier.

2. $g(kc) = c(ak^2c + bk + 1)$ nombre composé puisque $c > 1$ et $ak^2c + kb + 1 > 1$ pour $k \neq 0$.

164 1. Correctif : il se peut qu'il manque une précision dans l'énoncé : $r + 1$ est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de d . On a $A + d - B \equiv B + (d - B) \pmod{d}$ donc $A + d - B$ est multiple de d et $d - B$ s'écrivant avec au plus $r + 1$ chiffres, le nombre $A + d - B$ s'écrit sous la forme $\overline{10a_r a_{r-1} \dots a_0}$.

2. d divise $\overline{a_r a_{r-1} \dots a_0} 10$ et $\overline{a_r a_{r-1} \dots a_0} 01$, donc divise leur différence qui vaut 9.

3. Un tel critère vérifierait la propriété de symétrie précédente. d serait donc nécessairement égal à 3 ou 9. Et on vérifie que ces deux entiers ne satisfont pas cette propriété.

165 Correctif : il faut lire $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ et non pas $F_n = 2^{(2n)} + 1$.

1. $(F_n - 1)^{2^k} = (2^{(2^n)})^{2^k} = 2^{2^n \times 2^k} = 2^{2^{n+k}} = F_{n+k} - 1$.

2. $F_{n+k} \equiv (-1)^{2^k} + 1 \equiv 2 \pmod{F_n}$.

3. Si d est un diviseur commun de F_n et de F_{n+k} , d divise les combinaisons linéaires de ces deux nombres, donc divise 2. Donc d est égal à 1 ou à 2. Et d ne peut pas être égal à 2 car les nombres de Fermat sont impairs.

4. Pour tout entier naturel n , la décomposition de F_n fait intervenir un nombre premier qui n'est pas encore apparu dans les décompositions des nombres de Fermat précédents.

166 1. 2 et 3. Les autres nombres premiers ne peuvent pas être congrus modulo 6 à 0 ou 2 ou 3 ou 4, donc sont congrus à 1 ou 5.

2. a. On a $A \equiv -1 \pmod{p_i}$ pour $i \leq f$. Donc les nombres p_i avec $i \leq f$ ne divisent pas A.

b. $p_1 p_2 = 6$ donc $p_1 p_2 \dots p_f \equiv 0 \pmod{6}$ et $A \equiv -1 \pmod{6}$. Si tous les facteurs premiers de A étaient égaux à 1 modulo 6, leur produit, c'est-à-dire A, serait congru à 1 modulo 6.

c. Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini f de nombres premiers de la forme $6n + 5$. Le nombre $A = p_1 p_2 \dots p_{f-1}$ n'aurait alors pas de facteur premier congru à -1 modulo 6, ce qui contredit ce qui précède.

167 On note $S = \sum_{j=2}^{10} j \times a_{1-j}$.

1. $\sum_{j=2}^{10} j \times a_{1-j} = 182 \equiv 6 \pmod{11}$. $K = 5$.

2. Soit r le reste de $\sum_{j=2}^{10} j \times a_{1-j}$ par 11. $K = 11 - r$ si r non nul et $K = 0$ si r est nul.

3. Avec une erreur sur la clef, la contrainte $K + \sum_{j=2}^{10} j \times a_{1-j} \equiv 0 \pmod{11}$ n'est plus satisfaite. Une erreur sur la clef se détecte donc.

Si un chiffre a_{1-i} est remplacé par un chiffre b , la somme $\sum_{j=2}^{10} j \times a_{1-j}$ est remplacée par $ib - ia_{1-i} + \sum_{j=2}^{10} j \times a_{1-j}$.

La différence entre ces sommes est $ib - ia_{1-i} = i(b - a_{1-i})$. Le produit de i (entier entre 2 et 10) et de $b - a_{1-i}$ (entier non nul entre -9 et 9) ne vaut jamais 0 modulo 11. Avec un seul changement sur les nombres a_p la clef ne conviendra donc plus.

4. Si l'on permute a_{1-i} et $a_{1-(i+1)}$, la différence entre la somme initiale S et la nouvelle somme S' est :

$$(i+1)a_{1-i} + ia_{1-(i+1)} - ia_{1-i} - (1+i)a_{1-(i+1)},$$

c'est-à-dire $a_{1-i} - a_{1-(i+1)}$ et la somme est donc modifiée modulo 11 (sauf si les deux chiffres sont égaux, mais ceci ne change pas le code ISBN).

168 2. $10^6 \equiv 27 \pmod{97}$, donc $A \equiv 27H + L \pmod{97}$.

3.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$10^n \bmod 97$	10	3	30	9	90	27	76	81	34	49	5	50

4. Si K est modifiée, K n'est plus égale à $97 - r$ et l'erreur est détectée. Si un chiffre a est changé en b dans L , la différence entre les identifiants A et A' est congrue à une différence $(a - b) \times 10^k$ modulo 97. Or, 97 étant premier, cette différence $(a - b) \times 10^k$ ne peut valoir 0 modulo 97. On raisonne de même pour le dernier cas.

169 1. $r = 85$, $K = 12$.

$100A = 16\,945\,004\,000\,458\,155\,381\,100 = 10^{12}a + 10^6b + c$ où $a = 16\,945\,004\,000$, $b = 458\,155$, $c = 381\,100$. Comme $100 \equiv 3 \pmod{97}$, on a $10^{12} \equiv 10^{2 \times 6} \equiv 3^6 \pmod{97}$, soit $10^{12} \equiv 50 \pmod{97}$ et $10^6 \equiv 27 \pmod{97}$. Ainsi $100A \equiv 50a + 27b + c$. Les nombres obtenus peuvent maintenant être réduits modulo 97 avec les modèles les plus communs des calculatrices.

2.

n	1	2	3	4	5	6	7
$10^n \bmod 97$	10	3	30	9	90	27	76

n	8	9	10	11	12
$10^n \bmod 97$	81	34	49	5	50

n	13	14	15	16	17	18	19	20
$10^n \bmod 97$	15	53	45	62	38	89	17	73

3. Si l'erreur est dans la clef, le calcul de la clef la détecte.

Dans les autres cas : écrivons $A = \sum_{j=0}^{20} a_j \times 10^j$. Si l'erreur est sur le chiffre a_i changé en b alors A est changé en A' avec $A - A' = 10^i(a_i - b)$. Et $100A - 100A' \equiv 3 \times 10^i((a_i - b))$ et cet entier n'est pas 0 modulo 97 : l'erreur est détectée.

4. On procède comme ci-dessus en constatant que $A - A'$ ne peut être congru à 0 modulo 97.

170 1.

TEXAS	CASIO
<pre>:Prompt N,K :Disp PartEnt(N/ K)-PartEnt((N-1) /K)■</pre>	<pre>"N"?>N:"K"?>K# Ints (N+K)-Ints ((N-1) +K)</pre>

$g_n(k) = 1$ si k divise n , $g_n(k) = 0$ si k ne divise pas n . Si $n = kq + r$ alors $\frac{n}{k} = q + \frac{r}{k}$ et $\frac{n-1}{k} = q + \frac{r-1}{k}$. Les deux parties entières sont égales à q pour r non nul. La première est égale à q et la seconde à $q - 1$ si $r = 0$.

2.

TEXAS	CASIO
<pre>:Prompt N :0→S :For(K,1,N) :S+PartEnt(N/K)- PartEnt((N-1)/K) →S :End :Disp S</pre>	<pre>"N"?>N# 0→S# For 1→K To N# S+Ints (N+K)-Ints ((N-1) +K)→S# Next# S#</pre>

d_n est le nombre de diviseurs de n .

3. a. On modifie la dernière ligne du programme précédent :

TEXAS	CASIO
<pre>:Disp N+PartEnt(1/(-1+S))■</pre>	<pre>N×Ints (1+(-1+S))■</pre>

b. $u_n = 0$ lorsque n n'est pas premier, $u_n = n$ sinon.

4.

TEXAS	CASIO
<pre>:Prompt N :0→S :For(K,1,N) :S+K*(PartEnt(N/ K)-PartEnt((N-1) /K))→S :End :Disp S</pre>	<pre>"N"?>N# 0→S# For 1→K To N# S+K*(Ints (N+K)-Ints ((N-1)+K))→S# Next# S#</pre>

L'affichage est la somme des diviseurs de l'entier n .

171 1. Algorithme :

Entrée : N entier naturel
Traitement : Affecter à A la valeur 0
Tant que 23 divise N :
 Affecter $A+1$ à A
 Affecter $\frac{N}{23}$ à N
Sortie : N

TEXAS	CASIO
<pre>PROGRAM:EXY00 :Prompt N :0→A :While PartEnt(N /23)≠N/23 :A+1→A :N/23→N :End :Disp A</pre>	<pre>"N":?>N# 0→A# While Ints (N+23)=N+3 # A+1→A# N/23→N# WhileEnd# A</pre>

2. Le programme précédent ne peut être utilisé tel quel car 2 013! dépasse les capacités de la calculatrice. On peut, par exemple, traiter un à un les entiers de 2 à 2 013.

TEXAS	CASIO
<pre>:0→A :For(J,2,2013) :J→N :While PartEnt(N /23)≠N/23 :A+1→A :N/23→N :End :End :Disp A</pre>	<pre>0→A# For 2→J To 2013# J→N# While Ints (N+23)=N+2 # A+1→A# N/23→N# WhileEnd# Next# A#</pre>

3. Les facteurs 23 qui apparaissent sont donnés par les multiples de 23 : ce sont les nombres $23k$ avec $23k \leq 2013$, soit $1 \leq k \leq 87$. Certains de ces multiples font intervenir deux facteurs 23 : les nombres $23 \times 23k$ pour $k = 1, 2, 3$. On obtient donc 90 facteurs 23 dans la décomposition de 2 013!

172 Algorithme :

Entrée : un naturel A , un naturel $N \geq 1$ et un naturel $M \geq 2$.
Traitement :
Affecter à R le reste de la division de A par M
Affecter à B la valeur R
Pour i allant de 2 à N :
 Affecter à B la valeur de $B \times R$
 Affecter à B le reste de la division de B par M
Fin Pour
Sortie : Afficher B

TEXAS	CASIO
<pre>:Prompt A,N,M■ :A-M*PartEnt(A/M) →R R→B :For(J,2,N) :B×R→B :B-M*PartEnt(B/M) →B :For(J,2,N) :B×R→B :B-M*PartEnt(B/M) →B :End :Disp B</pre>	<pre>"A,M,N"?>A:?"M":?>M# A-M×Ints (A÷M)→R# R→B# For 2→J To N# B×R→B# B-M×Ints (B÷M)→B# Next# B</pre>

173 1.

TEXAS	CASIO
<pre>:Prompt N,B :While N≠0 :PartEnt(N/B)→Q :N-B×Q→R :Disp R :Q→N :End</pre>	<pre>"N":?>N:"B":?>B# While N≠0# Ints (N÷B)→Q# N-B×Q→R# R# Q→N# WhileEnd#</pre>

2. Le programme affiche les chiffres de N . La première valeur de R est en effet le reste dans la division par 10 de l'entier N , c'est-à-dire son chiffre des unités. On « tronque » ensuite ce chiffre des unités et on recommence.

3. Si N est non nul, l'écriture $N = BQ + R$ permet d'affirmer $Q < N$. La suite des quotients est une suite strictement décroissante d'entiers naturels. 0 est donc atteint, sinon on a une infinité d'entiers entre 0 et N .

4. On suppose que $B = 2$ et $N < 10^3$.

a. $10^3 \leq 2^{10}$.

b. $N = 2Q_1 + R_1 = 2(2Q_2 + R_2) + R_1 = 2^2Q_2 + 2R_2 + R_1$... et ainsi de suite.

$12 = 2^3 + 2^2$ et $901 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^2 + 1$.

174 1.

TEXAS	CASIO
<pre>:Prompt N :While N≥10 :PartEnt(N/10)→Q :N-10×Q→R R→S:Q→N :While N≠0 :PartEnt(N/10)→Q :N-10×Q→R :4×R+S→S:Q→N :End S→N :End :Disp N</pre>	<pre>"N"?>N# While N≥10# Ints (N÷10)→Q# N-10×Q→R# R→S:Q→N# While N≠0# Ints (N÷10)→Q# N-10×Q→R# 4×R+S→S# Q→N# WhileEnd# S→N# WhileEnd# N</pre>

2. Le nombre $S = a_0 + 10 \times (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ est remplacé par le nombre $S = a_0 + 4 \times (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ qui lui est strictement plus petit tant que $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ est non nul, c'est-à-dire tant que N est supérieur à 10. L'algorithme s'arrête donc (principe de descente infinie).

3. On vérifie (récurrence) que $10^n \equiv 4 \pmod{6}$ pour $n \geq 1$, S est donc congru à N modulo 6 à toute étape. Le résultat affiché est donc multiple de 6 si, et seulement si, N l'est.

175 1. $M_1 = 1, M_2 = 3, M_3 = 7$ et $M_4 = 15$.

2. $a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$. Si $a^n - 1$ est premier, alors $a - 1 = 1$ et $a = 2$.

3. Si $n = dk$ alors $2^n - 1 = 2^{dk} - 1 = (2^d)^k - 1$, ce qui s'écrit sous la forme $(2^d - 1)(1 + 2^d + 2^{2d} + \dots + 2^{2d(k-1)})$, donc M_d divise M_n .

4. Conséquence de la question précédente.

5. Contraposée : « Pour tout entier $n \geq 2$, si M_n est premier alors n est premier ».

Réciproque : « Pour tout entier $n \geq 2$, si M_n est composé alors n est composé ». Cette réciproque est fausse car M_{11} est composé.

6. $a = bq + r$.

$$2^a - 1 = 2^{bq} \times 2^r - 1 = (2^{bq} - 1)2^r + 2^r - 1 \\ = 2^r(2^b - 1)(1 + 2^b + 2^{2b} + \dots + 2^{(q-1)b}) + 2^r - 1.$$

176 1. Forme $4n - 1 : 3 ; 7 ; 11 ; 19 ; 23$.

Forme $4n + 1 : 5 ; 13 ; 17 ; 29 ; 37$.

2. Si p est premier distinct de 2, alors p est de la forme $4n - 1$ ou de la forme $4n + 1$. En effet, tout entier est de l'une des formes $4n$ ou $4n + 1$ ou $4n + 2$ ou $4n - 1$ et les formes $4n$ et $4n + 2$ sont des nombres composés pour $n > 1$. Comme il y a une infinité de nombres premiers, l'une des deux formes au moins est prise par une infinité de nombres premiers.

3. a. A est impair et $A \geq 4 \times 3 \times 7 \times 11 \times 19 \times 23 \times 27 - 1 \geq 658\,811$.

b. $A \equiv -1 \pmod{4}$ et A impair : les facteurs premiers de A sont donc de la forme $4n + 1$ et A , produit de nombres premiers congrus à 1 modulo 4, vérifie $A \equiv 1 \pmod{4}$.

c. La formule définissant A montre que $A \equiv -1 \pmod{4}$ d'où une contradiction.

Prises d'initiatives

177 200 et 320 sont des contre-exemples.

178 $n^5 - n = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$.

On vérifie qu'il y a toujours l'un des facteurs pairs et un autre multiple de 5.

179 Un entier peut être de trois « types » : 0, 1 ou 2 modulo 3. Si, parmi les 5 entiers choisis, on a (modulo 3) un 0, un 1 et un 2, leur somme est multiple de 3.

Sinon, seuls deux des types sont présents.

Mais, alors, l'un des deux types est présent au moins 3 fois et la somme de ces trois-là est multiple de 3.

180 Si $(x; y)$ solution alors $x^2 \equiv 5 \pmod{7}$ et ceci n'est pas possible (disjonction des cas).

181 Un calcul sur les premiers entiers mène à la conjecture d'une suite périodique : **5, 3, 1, 7, 5, 3, 1, 7, 5, 3...** On vérifie aisément que $f(n + 4) = 2\,014(n + 4) + 2\,015 \equiv n \pmod{8}$, ce qui permet de justifier la périodicité.

182 Si $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ alors $nb^2 = a^2$. Les facteurs de la décomposition du membre de droite apparaissent tous avec un exposant pair, donc à gauche aussi par unicité.

Comme ils apparaissent avec un exposant pair dans b^2 , ils apparaissent nécessairement avec un exposant pair dans n . Mais, alors, n est un carré d'entier.

183 Si $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c\sqrt{2} + d\sqrt{3}$, alors $(a - c)\sqrt{2} = (d - b)\sqrt{3}$ et $2(a - c)^2 = 3(d - b)^2$. Supposons $a - c$ et $d - b$ non nuls. Le facteur premier 2 apparaît alors avec un exposant impair dans l'entier $2(a - c)^2$ et un exposant pair dans l'entier $3(d - b)^2$.

184 Soit n un entier dont l'écriture décimale est de longueur m . Les entiers compris entre $9\,876\,543\,210 \times 10^k + 1$ et $9\,876\,543\,210 \times 10^k + n$ avec $k \geq m$ s'écrivent en utilisant tous les chiffres. Comme ce sont n entiers consécutifs, l'un est multiple de n . En changeant k , les entiers sont modifiés... Il y a bien une infinité de multiples de n satisfaisant la contrainte.

Problèmes de chiffrement

A Le programme

Exemples de problèmes	Contenus
Problèmes de chiffrement (chiffrement affine, chiffrement de Vigenère, chiffrement de Hill).	<ul style="list-style-type: none"> • PGCD de deux entiers. • Entiers premiers entre eux. • Théorème de Bézout • Théorème de Gauss
Sensibilisation au système cryptographique RSA.	

B Notre point de vue

La notion de PGCD de deux entiers est essentielle dans ce chapitre. On découvre des algorithmes de calcul du PGCD de deux entiers et notamment l'algorithme d'Euclide lors des problèmes 2, 3 et 4. Cette notion va permettre de présenter deux grands théorèmes de l'arithmétique, le théorème de Bézout et le théorème de Gauss à l'aide de la notion de nombres premiers entre eux.

La résolution d'équations diophantiennes va permettre de chiffrer et de déchiffrer des messages codés à l'aide d'un chiffrement affine comme dans le problème 5, d'un chiffrement à clé publique abordé dans le problème 6 ou du chiffrement de Vigenère présenté dans le problème 7.

Le chiffrement de Hill n'est pas abordé dans ce chapitre car il est nécessaire de connaître le calcul matriciel, notion vue dans le chapitre suivant.

On introduit ensuite le PPCM de deux entiers dans les problèmes 8 et 9. On aborde le petit théorème de Fermat dans le problème 10. Le problème 11 propose une démonstration du petit théorème de Fermat pour la valeur particulière 31 et aborde le chiffrement par exponentiation.

Le TP3 ainsi que quelques exercices de la rubrique « Pour aller plus loin » reprennent ces différentes situations de chiffrement.

Les savoir-faire sont des applications directes du cours qui doivent aider les élèves dans la résolution des exercices simples et classiques de l'arithmétique proposés dans la rubrique « Pour démarrer » et dans la rubrique « Pour s'entraîner ». Des exercices plus variés sont proposés dans la rubrique « Pour s'entraîner » : des exercices de logique, de programmation ou d'utilisation de TICE, des restitutions organisées de connaissances.

Les exercices de « Cap vers le bac » sont des exercices ou parties d'exercices d'épreuves récentes de baccalauréat.

Les notions abordées dans le chapitre 2

1. Plus grand diviseur commun de deux entiers
2. Entiers premiers entre eux
3. PPCM et petit théorème de Fermat

C Avant de commencer

Voir livre page 140 et le site www.bordas-index.fr pour les corrections détaillées.

Correctif :  Réponses B et C.

Problème 1 Un panneau publicitaire

Dans ce problème, on aborde la notion de plus grand diviseur commun de deux entiers à travers un problème concret.

Partie A

Le nombre de carrés nécessaires pour recouvrir le panneau étant un nombre entier, la longueur d du côté du carré doit diviser la longueur et la largeur du panneau.

Partie B

1. $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$ et $180 = 5 \times 2^2 \times 3^2$.

$D(450) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 15; 18; 25; 30; 45; 50; 75; 90; 150; 225; 450\}$.

$D(180) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20; 30; 36; 60; 90; 180\}$.

2. $D(180) \cap D(450) = \{1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 15; 18; 30; 90\}$.

3. $d = \text{PGCD}(180; 450) = 90$.

4. $\text{PGCD}(180; 450) = 2 \times 3^2 \times 5$.

Problème 2 Algorithme des différences

Dans ce problème, on découvre certaines propriétés du plus grand diviseur commun de deux entiers, propriétés qui vont permettre la mise en œuvre d'un algorithme de calcul du PGCD.

Partie A

1. $D(110) = \{-110; -55; -22; -11; -10; -5; -2; -1; 1; 2; 5; 10; 11; 22; 55; 110\}$.

$D(66) = \{-66; -33; -22; -11; -6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6; 11; 22; 33; 66\}$.

2. a. $\text{PGCD}(110; 66) = 22$.

b. $\text{PGCD}(-110; 66) = 22$.

c. $\text{PGCD}(-66; 110) = 22$.

d. Correctif : il faut lire $\text{PGCD}(-110; -66)$

et non pas $\text{PGCD}(-110; 66)$.

$\text{PGCD}(-110; -66) = 22$.

Partie B

1. Comme d divise a et b , il divise aussi la combinaison linéaire $a - b$.

2. Comme d' divise $a - b$ et b , il divise aussi la combinaison linéaire $a - b + b = a$.

3. Les diviseurs de a et b sont les mêmes que les diviseurs de $a - b$ et de b . $D(a) \cap D(b)$ et $D(a - b) \cap D(b)$ ont le même plus grand élément donc $\text{PGCD}(a - b; b) = \text{PGCD}(a; b)$.

4. d divise x et y et divise $3x - 4y = b$ et divise $2x - 3y = a$.

d divise a et b donc d divise x et y .

Donc $D(a) \cap D(b) = D(x) \cap D(y)$ et $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(x; y)$.

Partie C

1. On effectue des différences successives et d'après la propriété précédente, on obtient le PGCD de a et de b .

2. Programmes sur calculatrice :

TEXAS	CASIO
<pre>PROGRAM:DIFF :Promet A,B :While A#B : max(A,B)→C : min(A,B)→B : C-B→A :End :Disp A</pre>	<pre>=====DIFF===== "A="?"A:"B="?"B# While A#B# Max(A,B)→C# Min(A,B)→B# C-B→A:WhileEnd# A</pre>

Problème 3 Algorithme d'Euclide

On découvre ou on redécouvre l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de deux entiers à l'aide de divisions euclidiennes successives.

1. a. $a = bq + r$. Soit d un diviseur commun de a et de b alors d divise la combinaison linéaire $a - bq$ donc d divise r .

b. Soit d' un diviseur commun de b et r alors d' divise la combinaison linéaire $bq + r$ donc d' divise a .

c. $D(a; b) \subset D(b; r)$ et $D(b; r) \subset D(a; b)$ donc $D(a; b) = D(b; r)$. D'où les deux ensembles $D(a; b)$ et $D(b; r)$ ont le même plus grand élément : $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r)$.

2. $\text{PGCD}(260; 91) = \text{PGCD}(91; 78) = \text{PGCD}(78; 13) = \text{PGCD}(13; 0) = 13$.

3. a. $\text{PGCD}(123; 95) = 1$.

b. $\text{PGCD}(715; 55) = 55$.

c. $\text{PGCD}(616; 52) = 4$.

Problème 4 Pavage d'un rectangle

Ce problème va permettre de visualiser géométriquement la mise en œuvre de l'algorithme d'Euclide. On fera appel à l'utilisation du tableur pour déterminer le PGCD de deux entiers.

Fichiers disponibles sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

02_TSspe_probleme4.xlsx (Excel 2007),

02_TSspe_probleme4.xls (Excel 2003)

et 02_TSspe_probleme4.ods (OpenOffice).

1. a. a divise 15 et a divise 21 donc a divise $21 - 15 = 6$. Donc a divise les dimensions de R_1 .

b. a divise 6 et 15 donc a divise $15 - 2 \times 6 = 3$ et a divise les dimensions de R_2 .

c. 3 est la dimension maximale a des carrés. Comme a divise 21 et 15, alors ces carrés conviennent.

d. $6 = 2 \times 3 + 0$.

2. $21 = 2 \times 10 + 1$

$10 = 1 \times 10 + 0$

donc le pavage se fera avec des carrés de côté 1.

3. a. $210 = 188 \times 1 + 22$

$188 = 22 \times 8 + 12$

$22 = 12 \times 1 + 10$

$12 = 10 \times 1 + 2$

$10 = 2 \times 5 + 0$

donc 2 est le côté des carrés qui conviennent pour le pavage.

b. Voir les fichiers.

4. Voir les fichiers.

Problème 5 Chiffrement affine

À travers un problème de chiffrement affine, on découvre la notion de nombres premiers entre eux.

On utilise dans la partie B un tableur et les fonctions **CODE** et **CAR** qui permettent de chiffrer et de déchiffrer les messages plus efficacement.

Fichiers disponibles sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

02_TSspe_probleme5.xlsx (Excel 2007),

02_TSspe_probleme5.xls (Excel 2003)

et 02_TSspe_probleme5.ods (OpenOffice).

Partie A

1. KHNYC.

2. a. On associe 12 à M et on obtient l'équation :

$$15x + 8 = 12 \quad (26).$$

Il existe y entier tel que $15x - 26y = 12 - 8 = 4$.

b. Correctif : il faut lire $y = \frac{15x - 4}{26}$ et non pas $y = \frac{15x - 42}{6}$.

Pour x allant de 0 à 26, on cherche dans la table quelle est la valeur de x pour laquelle y est une valeur entière.

On trouve $x = 2$, soit la lettre C.

c. CODAGE.

Partie B

1. On écrit le texte à coder sur la première ligne du tableur.

2. En **A2**, on entre la formule **=CODE(A1)** qui permet de transformer la lettre en nombre en fournissant le code ASCII de la lettre écrite.

3. En **A3**, on entre la formule **=A2-65** : on retrouve ainsi un entier compris entre 0 et 25.

4. En **A4**, on entre la formule **=MOD(15*A3+8;26)** qui donne le reste de la division euclidienne de $15x + 8$ par 26, où x est l'entier de la cellule **A3**.

5. En **A5**, on entre la formule **=CAR(A4+65)** qui permet de transformer un nombre en une lettre, par l'intermédiaire du code ASCII.

On recopie ensuite ces formules vers la droite.

Partie C

1. Les nombres de la ligne 5 sont tous impairs.

2. Il existe q entier tel que $2x + 7 = z + 26q$, d'où $2x - 26q = z - 7$.

3. $z = 2 \times (x - 13q + 3) + 1$ donc z est impair.

4. Lorsque $a = 2$ et $b = 8$, alors les nombres de la ligne 5 sont tous pairs.

Lorsque $a = 13$ et $b = 8$, alors les nombres de la ligne 5 sont 8 ou 21.

Problème 6 Chiffrement à clé publique

Il s'agit d'une version simplifiée d'un chiffrement asymétrique appelé aussi chiffrement à clé publique. Dans la question 2, on aborde la relation de Bézout.

Correctif : il faut lire $e = cM + a$ et non pas $e = CM + a$.

$$1. ef - 1 = (cM + a)(dM + b) - 1$$

$$= M(cdM + ad + bc) + ab - 1 = M(cdM + ad + bc + 1)$$

et $ef - 1$ est divisible par M .

n est donc un entier et $n = cdM + ad + bc + 1$.

Comme a, b, c et d sont supérieurs ou égaux à 3 et $M \geq 8$, alors $n \geq 3 \times 3 \times 8 + 9 + 9 + 1 \geq 25$.

2. Soit $d = \text{PGCD}(e; n)$ alors d divise e et n et la combinaison linéaire $ef - Mn$ donc d divise 1 et $d = 1$.

3. a. $M = 11$; $e = 58$ et $f = 70$ et $n = 369$.

b. Comme $e = 58$ et $n = 369$, alors $p \equiv 58m \pmod{369}$.

$$c. 58 \times 70 - 11 \times 369 = 1.$$

$$58 \times 70m - 11 \times 369m = m.$$

$$11 \times 369 \equiv 0 \pmod{369} \text{ d'où } 70p \equiv m \pmod{369}.$$

$$d. 116 - 0 - 111 - 116.$$

e. OK.

Problème 7 Chiffrement de Vigenère

Il s'agit de découvrir le chiffrement de Vigenère, et d'utiliser un tableur pour le chiffrement et le déchiffrement de messages.

Fichiers disponibles sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

02_TSspe_probleme7.xlsx (Excel 2007),

02_TSspe_probleme7.xls (Excel 2003)

et 02_TSspe_probleme7.ods (OpenOffice).

1. a. Voir fichier.

b. **MOD(CODE(A1)+CODE(A2)-2*65;26)** donne le reste de la division euclidienne par 26 de la somme des lettres écrites en **A1** et en **A2**.

La fonction **CAR** donne la lettre codée.

c. VIGNERE devient HIZLEKL.

2. a. Soit x la valeur de la lettre à déchiffrer : $x + 12 \equiv 4 \pmod{26}$ soit $x \equiv -8 \pmod{26}$, il existe q entier tel que $x + 26q = -8$.

$$b. -8 \equiv 18 \pmod{26}.$$

c. Voir fichier.

Problème 8 Satellites

C'est une situation classique qui permet d'aborder la notion de plus petit multiple commun de deux entiers.

$$1. 68 = 2^2 \times 17 \text{ et } 200 = 2^3 \times 5^2.$$

$$2. \text{PPCM}(68; 200) = 2^3 \times 5^2 \times 17 = 3\,400.$$

3. On retrouvera la même configuration à 10 h + 3 400 h plus tard soit 142 jours et 2 h plus tard soit le 21 mai à 12 h.

Problème 9 Remplissage d'une boîte

Dans ce problème, on relie la notion de plus grand diviseur commun et la notion de plus petit multiple commun. On utilise la décomposition en nombres premiers.

$$1. a. a = \text{PGCD}(882; 945) = 63.$$

Les valeurs possibles pour a sont les diviseurs de 63 soit :

$$1; 3; 7; 9; 21 \text{ et } 63.$$

b. $V = 77\,760 = L \times \ell^2$. 12 est le PGCD de L et de ℓ , il existe donc deux entiers premiers entre eux tels que $L = 12L'$ et $\ell = 12\ell'$.

$$V = 12^3 L' \times \ell'^2; \text{ on obtient : } L' \times \ell'^2 = 45 \text{ soit } \ell' = 1 \text{ ou } \ell' = 3.$$

Les deux boîtes ont pour dimensions :

$$12 \times 12 \times 540 \text{ et } 36 \times 36 \times 60.$$

2. a. Comme le nombre de boîtes à placer dans cette caisse cubique est un nombre entier, le nombre c est un multiple de L et de ℓ donc un multiple de L et ℓ .

b. PPCM(882 ; 945) = 13 230 et c est un multiple de 13 230.

3. a. $15\,435 = 3^2 \times 5 \times 7^3$ et $105 = 3 \times 5 \times 7$.

b. Les dimensions sont $\ell = 21$ et $L = 35$.

Problème 10 Nombres de Carmichael

Ce problème sur les nombres de Carmichael permet d'aborder le corollaire du petit théorème de Fermat.

1. a. Il s'agit de la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison a donc :

$$1 + a + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \text{ pour } a \neq 1.$$

b. $P(a) = (a - 1)k$ où $k = 1 + a + \dots + a^{n-1}$.

2. a. Pour $n = 280$ et en prenant a^2 à la place de a dans l'égalité de la question 1., on a $(a^2)^{280} = k(a^2 - 1)$ avec k entier.

En multipliant les deux membres de l'égalité par a , on obtient :

$$a^{561} - a = ka(a^2 - 1).$$

b. Si $a \equiv 0 \pmod{3}$, alors $a^{561} - a \equiv 0 \pmod{3}$.

Si $a \equiv 1 \pmod{3}$, alors $a^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ et $a^{561} - a \equiv 0 \pmod{3}$.

Si $a \equiv 2 \pmod{3}$, alors $a^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ et $a^{561} - a \equiv 0 \pmod{3}$.

Donc $a^{561} - a$ est divisible par 3.

3. a. Pour $n = 28$ et a^{10} à la place de a dans l'égalité de la question 1. a., puis en multipliant les deux membres par a on obtient l'égalité.

b. En raisonnant par disjonction des cas modulo 11, on montre que $a^{561} - a$ est divisible par 11.

4. Même démarche que dans la question 2. et la question 3.

5. Comme 3, 11 et 17 sont premiers entre eux, et comme $3 \times 11 \times 17 = 561$, d'après le corollaire 1 du théorème de Gauss, le nombre $a^{561} - a$ est divisible par 561.

6. 561 est un nombre de Carmichael car il n'est pas premier et pour tout entier a , 561 divise $a^{561} - a$.

Problème 11 Chiffrement par exponentiation

Dans ce problème, on découvre la démonstration du petit théorème de Fermat dans le cas particulier où $p = 31$. Cette démonstration permet d'utiliser la relation de congruence liée au petit théorème de Fermat dans un exemple de chiffrement par exponentiation.

Fichier disponible sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

02_TSspe_probleme11.xws (Xcas).

Partie A

1. Comme 31 est un nombre premier, il est premier avec tous les entiers naturels qui lui sont strictement inférieurs. De plus a n'est pas divisible par 31. Donc 31 est premier avec tous les éléments de $M(a)$.

2. a. Supposons que, pour $k \neq k'$, on ait $r_k = r_{k'}$. $a(k - k')$ est un multiple de 31 compris entre $-30a$ et $30a$. Le seul multiple qui convient est 0 et ainsi $k = k'$. Donc $r_k = r_{k'}$.

b. Réciproquement si $r_k \neq r_{k'}$ alors $a(k - k')$, compris entre $-30a$ et $30a$, n'est pas un multiple de a . Donc $k - k' \neq 0$ et $k \neq k'$.

Tous les restes sont différents et appartiennent à l'ensemble $\{1; 2; \dots; 30\}$.

3. Le produit des restes est égal au produit des éléments de $\{1; 2; \dots; 30\}$.

Comme $ka \equiv r_k \pmod{31}$, alors :

$$30 \times 29 \times \dots \times 2 \times 1 \times a^{30} \equiv 30 \times 29 \times \dots \times 2 \times 1 \pmod{31}.$$

4. $30 \times 29 \times \dots \times 2 \times 1 \times a^{30} - (30 \times 29 \times \dots \times 2 \times 1) \equiv 0 \pmod{31}$.

Donc $30 \times 29 \times \dots \times 2 \times 1 \times (a^{30} - 1)$ est un multiple de 31. Comme 31 est premier avec le produit $30 \times 29 \times \dots \times 2 \times 1$ alors $(a^{30} - 1)$ est un multiple de 31 et $a^{30} - 1 \equiv 0 \pmod{31}$ soit $a^{30} \equiv 1 \pmod{31}$.

Partie B

1. Comme 7 et 30 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers d et v tels que :

$$7d + 30v = 1.$$

Par exemple $d = 13$ et $v = -3$ répondent à la question.

2. B n'est pas divisible par 31.

D'après la partie A, $B^{30} \equiv 1 \pmod{31}$.

$7d = 1 - 30v$ d'où $B^{7d} = B^{1 - 30v} = B \times (B^{30})^{-v}$ avec $-v$ positif.

Donc $B^{7d} \equiv B \pmod{31}$.

3. $C^d = B^{7d} \equiv B \pmod{31}$.

4. YAH?.

5. Voir fichier.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 $\frac{630}{546} = \frac{15}{13}$.

2 $1\,456 = 58 \times 7 + 50$.

2. Les diviseurs communs de 456 et de 58 sont aussi des diviseurs de $456 - 7 \times 58$ donc de 50.

$D_{50} = \{1; 2; 5; 10; 25; 50\}$. Par élimination, les diviseurs communs de 456 et 58 sont 1 et 2.

3 **2.** Comme $123\,456 - 789 \times 156 = 372$, les diviseurs com-

muns de 123 456 et de 7 789 sont aussi des diviseurs de 372.

4 Voir livre page 140.

5 **1.** $D_{145} = \{1; 5; 29; 145\}$ et $D_{30} = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$.

2. $D_{145} \cap D_{30} = \{1; 5\}$.

3. $D_{870} \cap D_{180} = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$.

6 **a.** $D_{56} \cap D_{72} = \{1; 2; 4; 8\}$.

b. $D_{56n} \cap D_{72n} = \{1; 2; 4; 8; n; 2n; 4n; 8n\}$ pour n entier premier différent de 2.

7 **1.** $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ et $154 = 2 \times 7 \times 11$.

2. PGCD(140 ; 154) = 14.

8 $7\,980 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 19$ et $19\,800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$.

$\text{PGCD}(7\,980; 19\,800) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

9 Voir livre page 141.

10 $\text{PGCD}(656; 321) = 1$ donc le seul diviseur commun positif de ces deux entiers est 1.

11 $\text{PGCD}(151\,782; 698\,394) = 246$.

$151\,782 = 246 \times 617$ et $698\,394 = 246 \times 2\,839$.

$\frac{151\,782}{698\,394} = \frac{617}{2\,839}$.

12 Soit d le PGCD de $n+2$ et de 2 , d est un diviseur de 2 et $d \in \{1; 2\}$. Si n est pair : $d = 2$, si n est impair : $d = 1$.

13 Soit d le PGCD de $n+1$ et de 3 , d est un diviseur de 3 et $d \in \{1; 3\}$. $d = 3$ pour tout n tel que $n+1 \equiv 0 \pmod{3}$ soit pour tout $n \equiv 2 \pmod{3}$ et $d = 1$ dans les autres cas.

14 Voir livre page 141.

15 1. $\text{PGCD}(A; 3) \in \{1; 3\}$.

2. $\text{PGCD}(A; 3) = 3$ lorsque A est divisible par 3 , c'est-à-dire lorsque $2n$ est divisible par 3 , donc pour tout n multiple de 3 . $\text{PGCD}(A; 3) = 1$ dans les autres cas.

16 1. $2A - 3B = 6n + 10 - 6n + 3 = 13$.

2. $\text{PGCD}(A; B) \in \{1; 13\}$.

17 Voir livre page 141.

18 a et b ont pour PGCD 26 , donc il existe a' et b' premiers entre eux tels que $a = 26a'$ et $b = 26b'$.

$a \times b = 26^2 a' \times b' = 6\,084$ et $a'b' = 9 = 1 \times 9 = 3 \times 3 = 9 \times 1$.

On obtient les couples $(26; 234)$, $(243; 26)$ et $(78; 78)$.

19 $240 = 12 \times 20$.

L'autre entier peut être $12 \times 1 = 12$ ou $12 \times 5 = 60$ ou

$12 \times 7 = 84$ ou $12 \times 11 = 132$ ou $12 \times 13 = 156$ ou $12 \times 17 = 204$ ou $12 \times 19 = 228$.

20 $\frac{315}{35} = 9$ Les entiers cherchés sont des multiples de 35 , donc de la forme $35k$ avec k entier compris entre 0 et 8 et $\text{PGCD}(9; k) = 1$. On en conclut :

$n \in \{35; 70; 140; 175; 245; 280\}$.

21 $252 = 10 + kp$ et $547 = 8 + k'p$ avec k et k' entiers.

$252 - 10 = 242$ et $547 - 8 = 539$ sont divisibles par p .

$\text{PGCD}(242; 539) = 11$, donc $p = 1$ ou $p = 11$.

22 $1\,234 = 2 + kp$ et $5\,678 = 22 + k'p$ avec k et k' entiers.

$1\,234 - 2 = 1\,232$ et $5\,678 - 22 = 5\,656$ sont divisibles par $\text{PGCD}(1\,232; 5\,656) = 56$, donc $p \in \{1; 2; 4; 7; 8; 14; 28; 56\}$.

23 a. 855 et 57 ne sont pas premiers entre eux :

$\text{PGCD}(855; 57) = 57$.

b. 171 et 99 sont divisibles par 9 .

c. $322\,647$ et $38\,160$ sont premiers entre eux.

d. $535\,075$ est divisible par $1\,259$.

24 a. Non. b. Non. c. Oui. d. Oui.

25 Voir livre page 141.

26 $N = 7 + 52q = 7 + 64q'$ avec q et q' entiers.

$52q = 64q' \Leftrightarrow 13q = 16q'$. Comme $\text{PGCD}(21; 13) = 1$, d'après le théorème de Gauss q est divisible par 16 et q' par 13 . Le plus petit entier q est 16 et $N = 839$.

27 1. $P = n(n+1)(n+2)$; parmi les trois entiers consécutifs un au moins est pair et N est divisible par 2 . Parmi les trois entiers consécutifs, un est divisible par 3 et N est divisible par 3 .

2. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, alors N est divisible par leur produit 6 .

28 Voir livre page 141.

29 1. $x \equiv 2 \pmod{7} \Leftrightarrow$ il existe k entier tel que $x = 7k + 2$.

$x \equiv 2 \pmod{3} \Leftrightarrow$ il existe k' entier tel que $x = 3k' + 2$.

On obtient l'équation $7k = 3k'$ (E) et comme 7 et 3 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 3 divise k' et 7 divise k . On obtient $k = 7q$ et $k' = 3q'$ avec q et q' entiers. En remplaçant dans l'équation (E), on a $q = q'$.

D'où $x = 21q + 2$ ou $x - 2 = 21q$ soit $x - 2$ est un multiple de 21 .

2. Les entiers cherchés sont $2, 3, 44, 65, 86, 107, 128, 149, 170$ et 191 .

30 1. Comme $\text{PGCD}(m; n) = 7$, il existe deux entiers naturels m' et n' premiers entre eux tels que $m = 7m'$ et $n = 7n'$.

Comme $m \times n = 588$, on a $49m' \times n' = 580$ soit $m' \times n' = 12$.

2.

m'	1	3	4	12
n'	12	4	3	1
m	7	21	28	84
n	84	28	21	7

31 Il existe m' et n' deux entiers premiers entre eux tels que

$m = 5m'$ et $n = 5n'$ et $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} = \frac{3}{4}$. D'où $m' = 4$ et $n' = 3$.

Donc $m = 20$ et $n = 15$.

32 a. $(3; 24), (6; 21); (9; 18), (12; 15), (15; 12), (18; 9), (21; 6)$ et $(24; 3)$.

b. $(5; 50), (10; 25), (25; 10)$ et $(50; 5)$.

c. $(16; 9)$.

33 $(3; -5)$.

34 $(3; 1)$.

35 1. $(2; 1)$.

2. $x = 2 + 3k$ et $y = 1 + 2k$, avec k entier.

36 1. $(5; -8)$.

2. $x = 5 + 13k$ et $y = -8 - 21k$, avec k entier.

37 1. $(9; -3)$.

2. $x = 9 + 5k$ et $y = -3 - 2k$, avec k entier.

38 Voir livre page 141.

39 1. $\text{PGCD}(2\,045; 65) = 1$.

2. Le théorème de Bézout assure l'existence d'au moins une solution de (E).

3. $(21; 671)$ est une solution particulière d'où $x = 21 + 64k$ et $y = 671 + 2\,045k$ avec k entier.

4. $x = 147 + 64k$ et $y = 4\,697 + 2\,045k$ avec k entier.

40 $A - 2B = 1$, donc d'après le théorème de Bézout A et B sont premiers entre eux.

41 1. $A = 2n + 3$ et $B = 3n + 4$ et $3A - 2B = 1$.

2. D'après le théorème de Bézout, A et B sont premiers entre eux.

42 a. PPCM $(108; 144) = 432$.

b. PPCM $(128; 230) = 14\,720$.

c. PPCM $(1\,848; 1\,950) = 600\,600$.

d. PPCM $(480; 735) = 23\,520$.

e. PPCM $(876; 1\,028) = 225\,132$.

43 Voir livre page 141.

- 44** PGCD(35 ; 24) = 1 donc PPCM(35 ; 24) = $35 \times 24 = 840$.
- 45** PGCD(24 ; 36) = 12 donc PPCM(24 ; 36) = $\frac{24 \times 36}{12} = 72$.
- 46** PPCM(n ; 25) = 3×25 donc $n = 3$ ou $n = 75$.
- 47** PGCD(x ; y) = $\frac{650}{130} = 5$.
- (5 ; 130), (10 ; 65), (130 ; 5) et (65 ; 10) sont les couples d'entiers cherchés.
- 48** Voir livre page 141.
- 49** 541 est un nombre premier ne divisant pas 123, donc d'après le petit théorème de Fermat : $123^{540} \equiv 1 \pmod{541}$. Ainsi, le reste est 1.
- 50** 1. Comme 307 est un nombre premier d'après le corollaire du petit théorème de Fermat, on a $n^{307} \equiv (307) \pmod{n}$ pour tout n .
2. Il faut que n ne soit pas divisible par 307.
- 51** 1. Les entiers n qui vérifient $n^{10} \equiv n \pmod{11}$ sont les entiers non divisibles par 11.
2. Les entiers n qui vérifient $n^6 \equiv n \pmod{7}$ sont les entiers non divisibles par 7.
3. Comme 7 et 11 sont premiers entre eux, les entiers n qui vérifient $n^{60} \equiv n \pmod{77}$ sont les entiers non divisibles par 11 et non divisibles par 7.

POUR S'ENTRAÎNER

- 52** $d = \text{PGCD}(A ; B)$ divise $A - 5B = 23$ donc $d \in \{1 ; 23\}$.
Si $d = 23$, alors $B \equiv 0 \pmod{23}$ et $n \equiv 4 \pmod{23}$. $d = 1$ dans les autres cas.
- 53** $d = \text{PGCD}(A ; B)$ divise $A - 2B = -3$ donc $d \in \{1 ; 3\}$. Si $d = 3$, alors $B \equiv 0 \pmod{3}$ et $2n \equiv -11 \pmod{23}$ soit $2n \equiv 1 \pmod{3}$ soit $n \equiv 2 \pmod{3}$.
 $d = 1$ dans les autres cas.
- 54** Soit d un diviseur commun de x et y alors d divise $x - 2y = -b$ donc d divise b .
 d divise $2x - 5y = -a$ donc d divise a .
 $D(x ; y) \subset D(a ; b)$.
Les diviseurs communs de a et de b divisent toutes les combinaisons linéaires de a et de b donc divisent x et y .
 $D(a ; b) \subset D(x ; y)$.
 $D(a ; b) = D(x ; y)$ et $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(x ; y)$.
- 55** Soit d un diviseur commun de x et y alors d divise $3x - 7y = -b$ donc d divise b .
 d divise $2x - 5y = -a$ donc d divise a .
 $D(x ; y) \subset D(a ; b)$.
Les diviseurs communs de a et de b divisent toutes les combinaisons linéaires de a et de b donc divisent x et y .
 $D(a ; b) \subset D(x ; y)$.
 $D(a ; b) = D(x ; y)$ et $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(x ; y)$.
- 56** 1. a. 13. b. 3. c. 60. d. 4. e. 1.
2. $\frac{5}{2}$, $\frac{28}{9}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{1663}{231}$ et $\frac{27634}{6551}$.
- 57** a. Soit m un diviseur commun de a et b , m divise a et b , donc divise toute combinaison linéaire de a et b , en particulier $a + a + b$.
Réciproquement, si m divise a et $a + b$ alors m divise toute

- combinaison linéaire de a et de $a + b$ donc en particulier $a + b - a = b$. Donc m divise a et b .
- Les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs communs de a et $a + b$: $\text{PGCD}(a ; a + b) = d$.
- b. Soit m un diviseur commun de $15a + 4b$ et de $11a + 3b$, m divise $11(15a + 4b) - 15(11a + 3b) = -b$.
Et m divise $3(15a + 4b) - 4(11a + 3b) = a$; donc m divise a et b .
Réciproquement, si m divise a et b il divise :
 $15a + 4b$ et $11a + 3b$.
- Les diviseurs de a et b sont les diviseurs de :
 $15a + 4b$ et $11a + 3b$: $\text{PGCD}(15a + 4b ; 11a + 3b) = d$.
- 58** Voir livre page 141.
- 60** Fichiers disponibles sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :
- 02_TSspe_exercice60.xlsx (Excel 2007),
02_TSspe_exercice60.xls (Excel 2003)
et 02_TSspe_exercice60.ods (OpenOffice).
- On conjecture que si $n \equiv 0 \pmod{3}$ et $n \equiv 2 \pmod{3}$, alors $\text{PGCD}(P(n) ; Q(n)) = 3$.
Si $n \equiv 1 \pmod{3}$, $\text{PGCD}(P(n) ; Q(n)) = 1$.
- Démonstration**
Soit $d = \text{PGCD}(P(n) ; Q(n))$, d divise $P(n)$ et d divise $Q(n)$, donc d divise $P(n) - 2Q(n) = 3$.
 d est donc un diviseur de 3, d'où $d \in \{1 ; 3\}$.
Si $d = 3$, alors $P(n)$ et $Q(n)$ sont divisibles par 3.
Si $n \equiv 0 \pmod{3}$, alors $P(n) \equiv 0 \pmod{3}$ et $Q(n) \equiv 0 \pmod{3}$.
Si $n \equiv 2 \pmod{3}$, alors $P(n) \equiv 0 \pmod{3}$ et $Q(n) \equiv 0 \pmod{3}$.
Si $n \equiv 1 \pmod{3}$, alors $P(n) \equiv 1 \pmod{3}$ et $Q(n) \equiv 2 \pmod{3}$.
D'où la conclusion.
- 61** 1. Il existe deux entiers p et q premiers entre eux tels que $a = 15p$ et $b = 15q$. Comme a et b sont des entiers naturels inférieurs à 150, alors p et q sont des entiers naturels inférieurs à 10.
2. Comme $a + b = 210$, alors $p + q = 14$.
- 3.
- | p | q | a | b |
|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 13 | 15 | 195 |
| 3 | 11 | 45 | 165 |
| 5 | 9 | 65 | 135 |
| 13 | 1 | 195 | 15 |
| 11 | 3 | 165 | 45 |
| 9 | 5 | 165 | 45 |
- 62** Fichiers disponibles sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :
- 02_TSspe_exercice62.alg (AlgoBox)
et 02_TSspe_exercice62.xws (Xcas).
- 63** Fichiers disponibles sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :
- 02_TSspe_exercice63.xlsx (Excel 2007),
02_TSspe_exercice63.xls (Excel 2003)
et 02_TSspe_exercice63.ods (OpenOffice).
1. $a = 1 \times a + 0 \times b$ et $b = 0 \times a + 1 \times b$.
- b. $a = bq_1 + r_1$
et $r_1 = a - bq_1 = a \times u_0 + v_0b - (a \times u_1 + v_1b)q_1$
 $= a(u_0 - u_1q_1) + b(v_0 - v_1q_1)$

et donc $u_2 = u_0 - u_1 q_1$ et $v_2 = v_0 - v_1 q_1$.

c. De même $u_3 = u_1 - u_2 q_2$ et $v_3 = v_1 - v_2 q_2$.

2. a. Il s'agit de divisions euclidiennes successives et donc de l'algorithme d'Euclide. Le dernier reste non nul est le PGCD de a et de b et les dernières valeurs de u et v les coefficients de l'identité de Bézout.

b. PGCD(1 694 ; 319) = 11.

$1\,694 \times 13 - 319 \times 69 = 11$.

64 Voir livre page 141.

65 VRAI. PGCD($2n+2$; $4n+2$) = 2 PGCD($n+1$; $2n+1$).

$n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux car $2(n+1) - (2n+1) = 1$, donc PGCD($2n+2$; $4n+2$) = $2 \times 1 = 2$.

66 FAUX. Par exemple, $a = 1$ et $b = -1$ vérifient cette relation, et leur PGCD n'est pas égal à 9.

67 FAUX. Par exemple, pour $n = 2$: 9 et 3 ont pour PGCD 3, qui n'est pas un diviseur de 4.

68 VRAI. Si on pose $x = 6x'$ et $y = 6y'$ avec x' et y' premiers entre eux, alors $x' + y' = 75$.

Par exemple, on peut prendre $(x' ; y') = (50 ; 25)$ et le couple $(300 ; 150)$ est solution du problème.

69 $A = 2n$, $B = 2(n+1)$ et PGCD(A ; B) = 2 PGCD(n ; $n+1$) = 2 car n et $n+1$ sont premiers entre eux.

70 Il existe deux entiers 1 et -3 tels que $3n+1 + (-3)n = 1$. D'après le théorème de Bézout, $3n+1$ et n sont premiers entre eux et la fraction est irréductible.

71 Voir livre page 141.

72 1. Soit d un diviseur commun de ab et $a+b$, d divise ab et $a+b$, il divise $a(a+b) - ab = a^2$ et $b(a+b) - ab = b^2$.

Or a et b sont premiers entre eux et donc a^2 et b^2 aussi. Donc $d = 1$ et ab et $a+b$ sont premiers entre eux.

2. Soit d un diviseur commun de a et de b , alors d divise ab et $a+b$. Si ab et $a+b$ sont premiers entre eux, $d = 1$ et a et b sont premiers entre eux.

73 1. Soit d un diviseur commun de a et de b , alors d divise b^2 . Donc d est un diviseur commun de a et de b^2 . Comme a et b^2 sont premiers entre eux alors $d = 1$ et a et b sont premiers entre eux.

2. Réciproque : supposons qu'il existe un diviseur p premier commun à a et b^2 . En utilisant la décomposition en facteurs premiers de a et de b^2 , on en déduit qu'il existe Q et Q' entiers tels que $a = Qp$ et $b^2 = Q'^2 p^2 = (Q'p)^2$.

p est alors un diviseur premier commun à a et b , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que a et b sont premiers entre eux. Donc a et b^2 sont premiers entre eux.

74 Soit d un diviseur commun de $M = 3x+4y$ et de $N = 4x+5y$, alors d divise $4M - 3N = -y$ et d divise $5M - 4N = x$ donc d divise x et y . Soit d' un diviseur commun de x et y alors d' divise toutes les combinaisons linéaires de x et y donc d' divise M et N . Les diviseurs communs de x et y sont aussi les diviseurs communs de M et N . Donc si x et y sont premiers entre eux, il en est de même pour $3x+4y$ et de $4x+5y$.

75 Si $\frac{m}{n}$ est irréductible, alors m et n sont premiers entre eux. Soit d un diviseur commun de M et N , alors $d \mid 4M - 3N$ c'est-à-dire $d \mid m$ et $d \mid 5M - 4N$ c'est-à-dire $d \mid n$. D'où $d = 1$ et M

et N sont premiers entre eux. $\frac{M}{N}$ est irréductible.

Réciproquement, si $\frac{M}{N}$ est irréductible alors M et N sont premiers entre eux. Soit d un diviseur commun de m et de n , alors $d \mid M$ et $d \mid N$ donc $d = 1$ et $\frac{m}{n}$ est irréductible.

76 Pour que \mathcal{H} ait des points à coordonnées entières, il faut que $h(x) \in \mathbb{Z}$ pour $x \in \mathbb{Z}$.

Il faut que $2x+3$ divise $3x+5$.

Si $2x+3$ divise $3x+5$, il divise $2(3x+5) - 3(2x+3) = 1$, donc $2x+3$ est égal à -1 ou 1 et x est égal à -2 ou -1 . \mathcal{H} a donc seulement deux points à coordonnées entières : $(-1 ; 2)$ et $(-2 ; 1)$.

77 Voir livre page 141.

78 1. Voir cours.

2. $5m+1 - 5m = 1$, d'après le théorème de Bézout $5m+1$ et m sont premiers entre eux.

3. $pm+1 - pm = 1$, d'après le théorème de Bézout $pm+1$ et m sont premiers entre eux.

4. Soit d un diviseur commun de m et $pm+q$, alors d divise toute combinaison linéaire de m et de $pm+q$; en particulier $pm+q - pm = q$. Donc d divise q et m . Or si m et q sont premiers entre eux, alors $d = 1$ et $pm+q$ et m sont premiers entre eux.

79 Fichiers disponibles sur www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

02_TSspe_exercice79.xlsx (Excel 2007),

02_TSspe_exercice79.xls (Excel 2003),

02_TSspe_exercice79.ods (OpenOffice)

et 02_TSspe_exercice79.xws (Xcas).

1.

n	$P(n)$	$Q(n)$	PGCD(P ; Q)
0	30	6	6
3	600	60	60
6	2 520	168	168
9	6 600	330	330
12	13 650	546	546
15	24 480	816	816
18	39 900	1 140	1 140
21	60 720	1 518	1 518
24	87 750	1 950	1 950
27	121 800	2 436	2 436
30	163 680	2 976	2 976

PGCD($P(n)$; $Q(n)$) = $Q(n)$ lorsque n est un multiple positif de 3.

2. Les seuls diviseurs positifs de 3 sont 1 et 3, donc PGCD($5n+15$; 3) vaut 1 ou 3.

3. Si $n \equiv 0(3)$ alors $5n+15 \equiv 0(3)$ et PGCD($5n+15$; 3) = 3.

Si PGCD($5n+15$; 3) = 3 alors il existe k entier naturel tel que $5n+15 = 3k$ ou $5n = 3(k-5)$. Comme 5 et 3 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 3 divise n et $n \equiv 0(3)$.

4. $P(x) = 5(x+1)(x+2)(x+3)$ et $Q(x) = 3(x+1)(x+2)$.

5. PGCD($P(n)$; $Q(n)$) = $(n+1)(n+2)$ PGCD($5n+15$; 3).

Si n est un multiple de 3, alors :

PGCD($5n+15$; 3) = 3 et PCDG($P(n)$; $Q(n)$) = $Q(n)$.

80 VRAI. En effet : $(-2) \times n + (2n + 1) = 1$.

81 FAUX. Pour $n = 2$, la fraction vaut $\frac{5}{5}$ et elle n'est pas irréductible.

82 FAUX. En effet, le PGCD de $3n + 1$ et 11 vaut 1 ou 11 : il vaut en particulier 11 pour $n = 7$.

83 1. $32 = 15 \times 2 + 2$ et $15 = 2 \times 7 + 1$, donc 32 et 15 sont premiers entre eux.

2. $(8; -17)$ est un couple solution.

84 1. $(3; -2)$ est un couple solution.

2. $(E_1) : (3; 2)$; $(E_2) : (-3; -2)$; $(E_3) : (-3; 2)$; $(E_4) : (6; -4)$;

$(E_5) : (-30; 20)$; $(E_6) : (-30; -20)$.

85 11 et 8 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 11 divise y et 8 divise x , donc il existe deux entiers k et k' tels que $x = 8k$ et $y = 11k'$. En remplaçant dans l'équation, on trouve $k = k'$ et les solutions sont les couples d'entiers $(8k; 11k)$ avec k entier.

86 1. $3 \times 9 - 2 \times 13 = 1$.

2. $x = 9 + 13k$ et $y = 2 + 3k$, avec k entier.

3. a. $3x \equiv 1 \pmod{13} \Leftrightarrow$ il existe y tel que $3x - 13y = 1$ et $x \equiv 9 \pmod{13}$.

b. $13y \equiv 2 \pmod{3} \Leftrightarrow y \equiv 2 \pmod{3}$.

87 On peut raisonner par disjonction des cas.

Pour $n \equiv 0 \pmod{4}$, $n \equiv 1 \pmod{4}$, $n \equiv 2 \pmod{4}$ et $n \equiv 3 \pmod{4}$ on a $A \equiv 0 \pmod{4}$.

Pour $n \equiv 0 \pmod{3}$, $n \equiv 1 \pmod{3}$ et $n \equiv 2 \pmod{3}$, on a $A \equiv 0 \pmod{3}$.

Comme 3 et 4 sont premiers entre eux, A est divisible par $3 \times 4 = 12$.

88 Voir livre page 141.

89 1. \mathcal{D} a pour équation $-7x + 4y = 1$.

$(1; 2)$ et $(5; 9)$ sont des points de \mathcal{D} à coordonnées entières.

$(1; 0)$ et $(4; 6)$ sont des points à coordonnées entières de \mathcal{D}' .

2. En résolvant l'équation $-7x + 4y = 1$, on obtient les couples $(1 + 4k; 2 + 7k)$, où k est un entier.

3. En résolvant l'équation $2x - y = 2$ on obtient les couples $(4 + k'; 6 + 2k')$ où k' est un entier.

4. La solution du système est $(2; 5)$.

5. Les droites ne sont pas parallèles et ont donc un point d'intersection qui a pour coordonnées $(9; 16)$.

90 1. Comme 4 et 3 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe au moins un couple d'entiers $(x; y)$ tels que $4x - 3y = 1$, donc le couple $(11x; 11y)$ est solution de l'équation (1).

2. $x = 11 + 3k$ et $y = 11 + 4k$ avec k entier.

3. PGCD($x; y$) divise 11 , donc 11 est la valeur maximale du PGCD de x et de y .

91 Voir livre page 141.

Correctif : la réponse à la question 2. a. est $x = 5k$ et $y = 4k$, avec k entier.

92 1. Voir cours.

2. $ax \equiv 1 \pmod{b} \Leftrightarrow ax = 1 + kb$ avec k entier $\Leftrightarrow ax - bk = 1$, équation qui a des solutions si et seulement si a et b sont premiers entre eux.

93 1. L'équation (E) a des solutions si et seulement si PGCD($5; 20$) divise n . Donc n doit être un multiple de 5 .

2. $n = 165$, (E) : $x + 4y = 33$.

Les solutions sont de la forme $x = 1 + 4k$ et $y = 8 - k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.

k	Nombre de billets de 5 €	Nombre de billets de 20 €
0	1	8
1	5	7
2	9	6
3	13	5
4	17	4
5	21	3
6	25	2
7	29	1
8	33	0

94 VRAI. Par exemple, $(x; y) = (4; -2)$ est solution.

95 VRAI. $3x \equiv 1 \pmod{6}$ équivaut à $3x - 6k = 1$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

$3x - 6k = 1 \Leftrightarrow 3(x - 2k) = 1$, ce qui est impossible.

96 VRAI. $3x \equiv 3 \pmod{6} \Leftrightarrow 3x = 3 + 6k$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = 1 + 2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod{2}$.

97 Soit A et B les entiers cherchés, PGCD($A; B$) = 6 et les couples cherchés sont $(6; 120)$; $(120; 6)$ $(24; 30)$ et $(30; 24)$.

98 Voir livre page 141.

99 1. d est un diviseur de 6 , donc $d \in \{1; 2; 3; 6\}$.

2. PPCM($n; 6$) \times PGCD($n; 6$) = $6n = 96d$ d'où $n = 16d$.

3. Si $d = 1 : n = 16$; si $d = 2 : n = 32$; si $d = 3 : n = 48$ et si $d = 6 : n = 96$.

100 1. Voir cours page 58.

2. Il existe a' et b' entiers premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$. On obtient $a'b' = 21$.

Les couples cherchés sont $(d; 21d)$, $(3d; 7d)$; $(21d; d)$ et $(7d; 3d)$.

102 1. Pour $M = 30$ et $D = 3$, l'algorithme affiche $X = 30$ et $Y = 3$; $X = 15$ et $Y = 6$.

Pour $M = 90$ et $D = 5$, l'algorithme affiche $X = 90$ et $Y = 5$; $X = 45$ et $Y = 10$.

2. L'algorithme affiche les diviseurs de M qui sont aussi des multiples de D .

3. Si $D = 1$, l'algorithme affiche les diviseurs de M .

103 1. a. p divise $a + b$ et ab donc divise $a(a + b) - ab = a^2$ et divise $b(a + b) - ab = b^2$.

b. Comme p est un nombre premier, s'il divise a^2 et b^2 , alors il divise a et b .

c. Les diviseurs de a et b sont aussi les diviseurs de $a + b$ et de ab par combinaisons linéaires. Les diviseurs de $a + b$ et ab sont aussi les diviseurs de a et de b .

$D(a; b) \subset D(a + b; ab) \subset D(a^2; b^2)$ et

$\text{PGCD}(a; b) \leq \text{PGCD}(a + b; ab) \leq \text{PGCD}(a^2; b^2)$.

Comme PGCD($a + b; ab$) = p est premier alors

$\text{PGCD}(a; b) = 1$ ou $\text{PGCD}(a; b) = p$.

Mais PGCD($a; b$) = 1 implique que PGCD($a^2; b^2$) = 1 et par suite que PGCD($a + b; ab$) = 1 , ce qui est incompatible avec l'énoncé.

2. a. On trouve les couples suivants : $(5; 170)$ et $(10; 85)$.

b. D'après la question 1., comme 5 est premier, le système est équivalent au système précédent et admet les mêmes solutions.

104 VRAI. En effet, si x et y sont premiers entre eux, alors PGCD($x; y$) = 1 et PPCM($x; y$) = xy .

105 VRAI. Le PPCM de a et b est multiple de a et de b , donc il est aussi multiple de 7 et 5. Puisqu'il est divisible par 7 et 5, avec 7 et 5 premiers entre eux, il est divisible par leur produit 35.

106 VRAI. Il suffit de considérer les décompositions en facteurs premiers de x et y .

107 1. Comme 7 est un nombre premier, d'après le corollaire du petit théorème de Fermat, pour tout n entier, $n^7 \equiv n \pmod{7}$.

2. Soit $n \equiv 0 \pmod{2}$ et $n^7 \equiv 0 \pmod{2}$ d'où $n^7 \equiv n \pmod{2}$.

Soit $n \equiv 1 \pmod{2}$ et $n^7 \equiv 1 \pmod{2}$ d'où $n^7 \equiv n \pmod{2}$.

3. $n^7 - n$ est divisible par 7 et par 2, comme 7 et 2 sont premiers entre eux, $n^7 - n$ est divisible par leur produit donc par 14.

108 1. Comme 5 est premier, d'après le corollaire du petit théorème de Fermat, pour tout n entier, $n^5 \equiv n \pmod{5}$ et A est divisible par 5.

2. Si $n \equiv 0 \pmod{3}$ ou $n \equiv 1 \pmod{3}$ ou $n \equiv 2 \pmod{3}$, $A \equiv 0 \pmod{3}$.

Donc A est divisible par 3.

3. Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, A est divisible par leur produit donc par 15.

110 1.

Reste de a	0	1	2	3	4	5	6
Reste de a^6	0	1	1	1	1	1	1

2. Comme 7 est premier, d'après le petit théorème de Fermat, $n^6 \equiv 1 \pmod{7}$ pour tout entier n non divisible par 7.

3. $2\,012 \equiv 3 \pmod{7}$ et $2\,012 \equiv 2 \pmod{6}$ donc $2\,012^{2\,012} \equiv 3^2 \pmod{7}$ et le reste cherché est 2.

$2\,016 \equiv 0 \pmod{7}$ et $2\,016^{2\,016} \equiv 0 \pmod{7}$, donc le reste cherché est 0.

111 1. p est un nombre premier, d'après le petit théorème de Fermat $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ pour tout entier n non divisible par p . On en déduit que $n^p \equiv n \pmod{p}$ pour tout entier n non divisible par p . Si n est divisible par p alors $n^p - n$ est divisible par p et $n^p \equiv n \pmod{p}$. La relation est vraie pour tout n entier.

2. a. En raisonnant par disjonction des cas modulo 3, on montre que A est divisible par 3 pour tout n entier.

b. On applique le corollaire du petit théorème de Fermat et A est divisible par 7 pour tout n entier.

c. A est divisible par 3 et 7 qui sont premiers entre eux, donc par leur produit 21.

112 $x^5 \equiv x \pmod{30}$.

Soit $A = x^5 - x$. 2 est premier, 3 est premier et 5 est premier. D'après le corollaire du petit théorème de Fermat, $x^2 \equiv x \pmod{2}$, $x^4 \equiv x^2 \pmod{2}$ et $x^4 \equiv x \pmod{2}$ et $x^5 \equiv x^2 \pmod{2}$ soit $x^5 \equiv x \pmod{2}$. Donc A est divisible par 2.

$x^3 \equiv x \pmod{3}$ et $x^5 \equiv x^3 \pmod{3}$ et $x^5 \equiv x \pmod{3}$ donc A est divisible par 3.

$x^5 \equiv x \pmod{5}$, donc A est divisible par 5.

Comme 2, 3 et 5 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, A est divisible par $2 \times 3 \times 5$ donc par 30 et $x^5 \equiv x \pmod{30}$. Donc $S = \mathbb{Z}$.

113 Voir livre page 141.

114 FAUX. En effet : $1\,234^{123} \equiv 1\,234 \pmod{123} \equiv 4 \pmod{123}$.

115 FAUX. Par exemple, pour $n = 3$: $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.

116 FAUX. Par exemple, pour $n = 17$: $17^{16} \equiv 0 \pmod{17}$.

117 VRAI. C'est le corollaire du petit théorème de Fermat.

118 $x = 14 + 9k$ et $y = -7 - 5k$, $k \in \mathbb{Z}$.

119 $4B - 3A = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, A et B

sont premiers entre eux.

120 $A = (3n + 1)n$ et $B = (3n + 1)(n + 1)$, donc $3n + 1$ divise A et B .

Comme n et $n + 1$ sont premiers entre eux :

$$\text{PGCD}(A; B) = (3n + 1) \text{PGCD}(n; n + 1) = 3n + 1.$$

121 1. La partie entière de 2 017 est 44, donc on divise 2 017 par les nombres premiers compris entre 2 et 44 soit :

$$2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43.$$

2. Il existe deux entiers premiers entre eux a' et b' tels que $a = 2\,017a'$ et $b = 2\,017b'$.

$$a + b = 2\,017(a' + b') = 12\,102 \text{ et } a' + b' = 6.$$

Les seules possibilités sont $a' = 1$ et $b' = 5$; $a' = 5$ et $b' = 1$.

Les couples cherchés sont (2 017; 10 085) et (10 085; 2 017).

122 m est divisible par d , donc il existe un entier m' tel que $m = dm'$. D'où $2m - 5d = d(2m' - 5d) = d(2m' - 5) = 11$.

Donc $d = 1$ et $2m' - 5 = 11$, soit $m' = 8$ ou $d = 11$ et $2m' - 5 = 1$, soit $m' = 3$.

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } m = 8 \text{ et } d = 1 : (x; y) \in \{(1; 8); (8; 1)\}$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas : } m = 33 \text{ et } d = 11 : (x; y) \in \{(11; 33); (33; 11)\}.$$

123 Comme 5 est premier, d'après le corollaire du petit théorème de Fermat, $n^5 - n$ est divisible par 5.

De plus si $n \equiv 0 \pmod{2}$ ou $n \equiv 1 \pmod{2}$, $n^5 - n \equiv 0 \pmod{2}$ et $n^5 - n$ est divisible par 2. Comme 2 et 5 sont premiers entre eux, alors $n^5 - n$ est divisible par 2 et par 5 donc $n^5 - n$ est divisible par 10.

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 141 et le site www.bordas-indexe.fr pour les corrigés détaillés.

Correctif : **130** Réponses B et C.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Triplets pythagoriciens

Le but de ce TP est d'utiliser la notion de nombres premiers entre eux à travers une configuration géométrique simple qui est celle du triangle rectangle et du théorème de Pythagore.

Fichiers disponibles sur www.bordas-indexe.fr et sur le manuel numérique premium :

02_TSspe_TP1.xlsx (Excel 2007),

02_TSspe_TP1.xls (Excel 2003)

et 02_TSspe_TP1.ods (OpenOffice).

A. Étude expérimentale

1. Comme $a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2$ alors :

$(a; b; \sqrt{a^2 + b^2})$ est un triplet pythagorien

$\Leftrightarrow a, b$ et $\sqrt{a^2 + b^2}$ sont des entiers.

2.

1	2	3	4	5	6
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	0	1	0	1	0
7	1	0	1	0	1
8	0	1	0	1	0
9	1	0	1	0	1
10	0	1	0	1	0
11	1	0	1	0	1
12	0	1	0	1	0
13	1	0	1	0	1
14	0	1	0	1	0
15	1	0	1	0	1
16	0	1	0	1	0

3. =SI(ENT(RACINE(B1*B1+A2*A2))=RACINE(B1*B1+A2*A2);1;0)

4. Il y a 884 triplets pythagoriciens.

B. Étude d'un cas particulier1. $c = b + 1$.

$$a^2 + b^2 = (b + 1)^2 = b^2 + 2b + 1 \quad \text{et} \quad a^2 = 2b + 1.$$

2. $a^2 = 2b + 1$ est impair, a est donc impair et s'écrit sous la forme $2n + 1$.3. $b = 2n^2 + 2n$ et $c = 2n^2 + 2n + 1$. D'où (3 ; 4 ; 5) est un triplet pythagoricien en prenant $n = 1$.4. Si $(a ; b ; c)$ est un triplet pythagoricien, alors $a^2 + b^2 = c^2$ et $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$ d'où $(ka ; kb ; kc)$ est aussi un triplet pythagoricien.

(6 ; 8 ; 10), (9 ; 12 ; 15), (12 ; 16 ; 20) et (15 ; 20 ; 25) sont aussi des triplets pythagoriciens.

C. Étude mathématique1. Comme $(a ; b ; c)$ est un triplet pythagoricien alors $a^2 + b^2 = c^2$. De plus a, b et c sont divisibles par d , d'où a', b' et c' sont des entiers naturels et on vérifie que $a'^2 + b'^2 = c'^2$.2. Supposons que a' et b' sont pairs, alors a'^2 et b'^2 sont aussi pairs. Alors $a'^2 + b'^2$ est pair, donc c'^2 est pair et c' aussi. Mais alors a', b' et c' sont divisibles par 2 et d n'est pas le plus grand diviseur commun à a', b' et c' . L'hypothèse est donc absurde.3. Supposons que a' et b' sont impairs. Alors $a' = 2n + 1$ et $b' = 2m + 1$ et $c'^2 = 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2$. c' ne peut être impair ; si c' est pair, il est alors de la forme $c' = 2q$ et $c'^2 = 4q^2$, où q est un entier, ce qui est contraire à la forme de c'^2 trouvée. Donc l'hypothèse est absurde.4. Si $a' = 2n$ alors $a'^2 = c'^2 - b'^2 = (c' - b')(c' + b') = 4n^2$.

$$n^2 = \frac{(c' - b')(c' + b')}{2} = \alpha \times \beta.$$

 a' est pair donc b' et c' sont impairs donc $c' - b'$ et $c' + b'$ sont divisibles par 2 : α et β sont des entiers.5. On résout le système :
$$\begin{cases} c' - b' = 2\alpha \\ c' + b' = 2\beta \end{cases}$$
Supposons que α et β aient un diviseur commun d autre que 1. Alors d divise les combinaisons linéaires de α et β donc d divise b' et c' . d^2 divise alors n^2 et donc d divise n . d est aussi un diviseur de a' , ce qui est absurde avec l'hypothèse de départ sur a', b' et c' . Donc α et β sont premiers entre eux.6. Correctif : il faut lire $v > u$ et pas $v < u$. $n^2 = \alpha \times \beta$ avec PGCD($\alpha ; \beta$) = 1, donc α et β sont aussi des carrés car les facteurs premiers de n^2 sont tous affectés d'un exposant pair et α et β n'ont aucun facteur commun.D'où : $u^2 = \alpha$ et $v^2 = \beta$. $\beta > \alpha$ d'où $v^2 > u^2$ et ainsi $v > u$ (car u et v sont positifs).7. $a = 2duv ; b = d(v^2 - u^2)$ et $c = d(v^2 + u^2)$.8. Correctif : il faut lire $v > u$ et pas $v < u$.On vérifie que a, b et c sont des entiers naturels, tels que $a^2 + b^2 = c^2$.9. $(2uv ; v^2 - u^2 ; v^2 + u^2)$ avec u et v entiers naturels.**D. Algorithme de recherche**On vérifie que A, B et C sont des entiers et que $A^2 + B^2 = C^2$ pour tout m prenant les valeurs de 2 à M .**TP 2 Équations polynomiales à coefficients entiers**

Il s'agit dans ce TP de chercher les solutions entières ou rationnelles d'un polynôme de degré supérieur à 2. On utilise pour cela les propriétés sur les entiers : divisibilité, PGCD, nombres premiers entre eux.

A. Étude d'un cas particulier1. Si m est solution de (E_1) alors :

$$m^7 - 6m^4 + 5m^3 - 3m^2 - 31m = -2$$

soit $m(m^6 - 6m^3 + 5m^2 - 3m - 31) = -2$.Donc m divise 2 et $m \in P$, avec $P \{-2 ; -1 ; 1 ; 2\}$.2. En remplaçant m successivement par les valeurs de P , on voit qu'aucune de ces valeurs n'est solution de (E_1) . Donc (E_1) n'a pas de solution entière.**B. Étude mathématique**1. En utilisant la décomposition en facteurs premiers de p et de q , si p et q sont premiers entre eux, ils n'ont aucun facteur premier en commun. Or q^n a les mêmes facteurs premiers que q et donc aucun en commun avec p . Alors p et q^n sont premiers entre eux.2. a. Si $\frac{p}{q}$ est solution de (E) alors :

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Comme $q \neq 0$, alors en multipliant les deux membres de l'égalité par q^n , on obtient :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_0 q^n = 0.$$

b. $p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$.Comme p et q sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, p divise a_0 . $a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 q^{n-1})$. De même q divise a_n .c. Les solutions possibles sous forme de fractions irréductibles d'une équation polynomiale sont de la forme $\frac{p}{q}$ où p est un diviseur de a_0 et q un diviseur de a_n .**C. Une application**1. p divise 3 qui a deux diviseurs positifs et q divise 15 qui a trois diviseurs positifs, donc on peut former 6 fractions positives et 6 fractions négatives donc 12 fractions.2. Les solutions sont $3, \frac{1}{5}$ et $-\frac{1}{3}$.**TP 3 Exemple de codage par la méthode RSA**

À travers ce TP de codage, on réinvestit les notions et théorèmes vus dans ce chapitre : Gauss, Bézout, Fermat.

Fichier disponible sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium : 02_TSspe_TP3.xws (Xcas).

Correctif : Il faut lire « on affecte A à 0, B à 1, ..., Z à 25, [à 26, ..., ^ à 29 » et non pas « on affecte A à 0, B à 1, ..., Z à 25, [à 26, \ à 27, ...) »

1. PAIX devient IARX.

2. a. PGCD (3 ; 20) = 1, donc d'après le théorème de Bézout il existe x et y entiers tels que $3x + 20y = 1$.

b. $x^3 \equiv x(3)$, d'après le petit théorème de Fermat, donc :

$$x^{21} = (x^3)^7 \text{ et } x^{21} \equiv x^7(3) \equiv (x^3)^2 x(3) \equiv x(3).$$

De même : $x^{11} \equiv x(11)$ et $x^{10} \equiv 1(11)$ si 11 ne divise pas x, d'où $x^{21} \equiv x(11)$ si 11 ne divise pas x ; mais il y a aussi égalité si 11 divise x, car $x \equiv 0(11)$.

Ainsi $x^{21} - x$ est divisible par 3 et 11, donc par 33, d'où $x^{21} \equiv x(33)$.

3. a. Si $f(x) = f(x') = r$ alors $x = 33q + r$ et $x' = 33q' + r$ avec q et q' entiers. $x - x'$ est un multiple de 33. Comme x et x' sont des éléments de (E), l'entier $x - x'$ est compris entre -32 et 32 et le seul multiple qui convient est 0 d'où $x = x'$.

Si $x = x'$ alors $f(x) = f(x')$, il y a équivalence entre $x = x'$ et $f(x) = f(x')$ donc si $x \neq x'$ alors $f(x) \neq f(x')$.

b. Si $y \equiv x^3(33)$, alors $y^7 \equiv x^{21}(33) \equiv x(33)$.

c. \cup.

4. a. Comme $y^7 \equiv x(33)$, y correspond à l'instruction a[j] - 65 et x à b[j].

b. GAUSS, GALON et OSLO.

c. Le décodage du mot INDICE fournit : CHJC^Q. Donc, le mot INDICE ne peut pas être le résultat d'un codage par cette méthode. Cela vient du fait qu'il y a 26 lettres dans la langue française et qu'on a dû faire correspondre 33 symboles aux 33 nombres de l'ensemble (E).

CAP VERS LE BAC

Sujet A

Partie A

1. $11 \times (-7) - 26 \times (-3) = 1$.

2. (19 ; 8).

Partie B

1. W devient Q.

2. a. $x = 19$.

b. $y \equiv 11x + 8(26)$ et $19y \equiv x + 22(26)$ soit $x \equiv 19y - 22(26)$. W devient G.

Sujet B

1. a. Si n est pair, alors A(n) est impair et si n est impair, alors A(n) est pair.

b. En raisonnant par disjonction des cas modulo 3, on montre que A(n) n'est pas congru à 0 modulo 3.

c. Soit d un diviseur de A(n), il existe q entier tel que $A(n) = dq$ et $dq - n^4 = 1$. D'après le théorème Bézout, d et n sont premiers entre eux.

d. $A(n) \equiv 0(d)$, donc $n^4 \equiv -1(d)$ et par suite $n^8 \equiv 1(d)$.

2. a. Il existe q et r tels que $s = qk + r$ avec $0 \leq r < s$.

$n^s = n^{qk+r} = (n^k)^q n^r$ et ainsi $n^s \equiv n^r(d)$ soit $n^s \equiv 1(d)$. Or s est le plus entier qui vérifie la relation et donc $r = 0$ et s divise k.

b. Comme $n^8 \equiv 1(d)$, alors s divise 8.

c. Si d est premier, comme n est non divisible par d, d'après le petit théorème de Fermat, $n^{d-1} \equiv 1(d)$.

Donc s divise d - 1 dans ce cas.

3. Les cas $s = 1$, $s = 2$ et $s = 4$ ne sont pas possibles compte tenu du fait que n est pair. Donc $s = 8$ et 8 divise $p - 1$ d'où $p - 1 \equiv 0(8)$ et $p \equiv 1(8)$.

4. $p = 89$ et $p = 233$.

Sujet C

Partie A

Voir cours.

Partie B

1. a. (-2 ; 1) est une solution particulière de (E).

b. $x = -2 + 47k$ et $y = 1 - 23k$ avec k entier.

c. $23x = 1 - 47y$. Si x est solution de (E), $23x \equiv 1(47)$.

$1 \leq x \leq 46$ donne $1 \leq -2 + 47k \leq 46$ soit $k = 1$ et $x = 45$.

2. a. Si $ab \equiv 0(47)$, comme 47 est un nombre premier alors 47 divise a ou 47 divise b. D'où $a \equiv 0(47)$ ou $b \equiv 0(47)$.

b. Si $a^2 \equiv 1(47)$ alors $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$ est divisible par 47 et d'après le résultat précédent soit $a + 1$ est divisible par 47 soit $a - 1$ est divisible par 47. D'où $a \equiv 1(47)$ ou $a \equiv -1(47)$.

3. a. p est élément de A donc il est premier avec 47 et q est solution de l'équation $px - 47y = 1$ où x et y sont des entiers. Comme p et 47 sont premiers entre eux, cette équation a des solutions donc il existe q tel que $pq \equiv 1(47)$ pour tout p élément de A.

b. $p = 1$ et $p = 46$.

Sujet D

1. Vrai : (-1 ; -1) est une solution particulière et les solutions générales sont de la forme $x = -1 + 5k$ et $y = -1 + 3k$, k entier.

2. Faux.

Si $x \equiv 1(3)$, alors $x^2 \equiv 1(3)$.

Si $x \equiv 2(3)$, alors $x^2 \equiv 1(3)$.

Donc si x et y ne sont pas divisibles par 3 : $x^2 + y^2 \equiv 1(3)$.

3. Faux.

Les solutions de (E') sont 12 et 40.

On cherche deux entiers naturels a et b tels que PGCD(a ; b) = 12 et PPCM(a ; b) = 40. Or 40 n'est pas divisible par 12. Il n'existe aucune valeur de a et b dont le PGCD et le PPCM sont solutions de (E').

Sujet E

1. $x = 3 + 7k$ et $y = 4 + 11k$, k entier.

2. Il y a 5 points : (3 ; 4), (10 ; 15), (17 ; 26), (24 ; 37) et (31 ; 48).

3. a. Si (x ; y) est solution de (F) alors, comme $11 \equiv 1(5)$ et $7 \equiv 2(5)$, on obtient $x^2 - 2y^2 \equiv 0(5)$.

b. Congruences modulo 5 :

$x \equiv$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv$	0	1	4	4	1
$y \equiv$	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv$	0	2	3	3	2

c. La seule possibilité, d'après le tableau, est que x et y soient des multiples de 5.

4. Si x et y sont des multiples de 5, alors il existe q et q' entiers tels que $x = 5q$ et $y = 5q'$.

$$11x^2 - 7y^2 = 25(11q^2 - 7q'^2) = 25Q \text{ avec } Q \text{ entier.}$$

Or l'équation $25Q = 5 \Leftrightarrow 5Q = 1$ n'a pas de solution dans \mathbb{Z} .

Donc x et y ne peuvent pas être solutions de (F) dans ce cas.

(F) n'a pas de solutions entières.

Sujet F

Correctif : seule la capacité « Utiliser le théorème de Gauss » est mise en œuvre.

1. $a^2 = d^2u^2 = b^3 = d^3v^3$ soit $u^2 = dv^3$.

2. Comme il existe K entier tel que $u^2 = Kv$, v divise u^2 .

u et v sont premiers entre eux, alors $v = 1$.

3. Si $a = n^3$ et $b = n^2$, alors $a^2 = n^6 = b^3$.

Si $a^2 = b^3$, alors $a = \sqrt{b^3} = b\sqrt{b}$. Comme a est un entier naturel, alors \sqrt{b} est un entier naturel et b s'écrit sous la forme $b = b'^2$ avec b' entier naturel. Alors $a = b'^2 \times b' = b'^3$ et $b = b'^2$.

4. si $n = m^2 = p^3$ avec m et p entiers alors on a les congruences modulo 7 suivantes :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1
$x^3 \equiv$	0	1	1	6	1	6	6

Donc $n \equiv 0 (7)$ ou $n \equiv 1 (7)$.

133 $x = 3 + 7k$ et $y = 4 + 11k$, avec k entier.

134 En raisonnant par disjonction des cas modulo 3 et 5, on montre que A est divisible par 3 et par 5 donc par 15 car 3 et 5 sont premiers entre eux.

135 $5A - 2B = 27$. PGCD(A ; B) $\in \{1; 3; 9; 27\}$.

PGCD(A ; B) $\neq 1$ lorsque $2n + 1$ et $5n - 1$ sont divisibles par 3 soit $n \equiv 2 (3)$. Dans tous les autres cas, A et B sont premiers entre eux.

136 Cette fraction est un entier si $2n + 5$ divise $6n + 7$.

$2n + 5$ divise $(6n + 7 - 3(2n + 5)) = 22$, donc $2n + 5$ doit être un diviseur de 22.

$2n + 5 \in \{-22; -11; -2; -1; 1; 2; 11; 22\}$ et $n \in \{-8; -3; -1; 3\}$.

137 Les couples cherchés sont :

a	14	336	28	322	42	308	56
b	336	14	322	28	308	42	294

a	294	70	280	84	266	98	252
b	56	280	70	266	84	252	98

a	112	238	126	224
b	238	112	224	126

POUR ALLER PLUS LOIN

138 1. $A = n^2 + n$ et $B = n^2 + n - 2$. Soit d , un diviseur commun de A et de B , d divise $A - B$ donc d divise 2. Or A et B sont pairs donc PGCD(A ; B) = 2.

2. $C - D = \frac{n^2 + n - 2 - n^2 - n + 6}{2} = 2$.

Donc si d' est un diviseur commun de C et de D , alors d' divise $C - D$, donc d' divise 2. Alors $d' \in \{1; 2\}$. En utilisant les congruences modulo 4 :

$n \equiv$	0	1	2	3
$C \equiv$	3	0	2	1
$D \equiv$	1	2	0	3

Si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 0 ou 3, alors C et D sont impairs et PGCD(C ; D) = 1. Si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 1 ou 2, C et D sont pairs et PGCD(C ; D) = 2.

139 1. a. $S = \{(1 + 2k; 1 + 3k); k \in \mathbb{Z}\}$.

b. $S = \{(4 + 2k; 4 + 3k); k \in \mathbb{Z}\}$.

2. a. $3A - 2B = 6n + 6 - 6n - 2 = 4$, donc A et B sont solutions de (E_2).

b. Soit $d = \text{PGCD}(A; B)$ alors $d \mid 3A - 2B$ donc $d \mid 4$.

PGCD(A ; B) $\in \{1; 2; 4\}$.

c. Si PGCD(A ; B) = 4, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $A = 4q$.

soit $2n + 2 = 4q$ et $n = 2q - 1$. n est donc impair.

d. Pour n égal à 1, 5, 9, 13, 17, ..., le PGCD de A et B est 4.

On peut conjecturer que ce PGCD vaut 4 pour les entiers n tels que $n \equiv 1 (4)$.

3. a. Si $n = 1 + 4q$, $A = 8q + 4 = 4(2q + 1)$ est divisible par 4 et $B = 12q + 4 = 4(3q + 1)$ est divisible par 4.

b. Soit δ le PGCD de $2q + 1$ et de $3q + 1$, δ divise $3(2q + 1) - 2(3q + 1) = 1$ donc $\delta = 1$ et $2q + 1$ et $3q + 1$ sont premiers entre eux. Quand $n = 1 + 4q$ alors :

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(A; B) &= \text{PGCD}(4(2q + 1); 4(3q + 1)) \\ &= 4 \text{ PGCD}(2q + 1; 3q + 1) = 4. \end{aligned}$$

140 $n^3 - n = (n + 2)(n^2 - 2n + 4) - 8$.

PGCD($n^3 - n$; $n + 2$) = PGCD($n + 2$; 8).

Donc PGCD($n^3 - n$; $n + 2$) $\in \{1; 2; 4; 8\}$.

La fraction est irréductible si et seulement si :

$$\text{PGCD}(n^3 - n; n + 2) = 1 \Leftrightarrow \text{PGCD}(n + 2; 8) = 1.$$

Lorsque n est impair, $n + 2$ est impair et $n + 2$ et 8 sont premiers entre eux. La fraction est irréductible.

Si n est pair, alors PGCD($n + 2$; 8) $\in \{2; 4; 8\}$ et la fraction n'est pas irréductible.

141 1. Soit m et n deux naturels non nuls et a un nombre premier avec n . Soit $d = \text{PGCD}(m; n)$.

Supposons qu'il existe k un diviseur commun de am et de n qui ne soit pas un diviseur de d . d' n'est donc pas un diviseur commun de m et de n , c'est donc un diviseur commun de a et de n . Or n et a sont premiers entre eux et $d' = 1$:

$$\text{PGCD}(am; n) = \text{PGCD}(m; n).$$

2. Il existe x' et y' premiers entre eux tels que $x = dx'$ et $y = dy'$.
 $d' = x \text{ PGCD}(x; y) = x \times d = d^2 \times x'$.

$y^2 = d^2 y'^2$. x' et y' sont premiers entre eux, il en est de même pour x' et y^2 . Donc : $\text{PGCD}(d'; y^2) = \text{PGCD}(d^2 x'; d^2 y')$
 $= d^2 \text{PGCD}(x'; y) = d^2$.

142 1. Si a et b sont premiers entre eux, ils n'ont aucun diviseur premier commun dans leur développement en facteurs premiers. Il en est donc de même pour a^2 et b^2 .

2. Pour $n = 1$, $S_1 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$: c'est vrai.

On suppose que $S_k = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$, alors :

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4} (k^2 + 4k + 4) = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

donc la propriété est vraie au rang $k+1$.

$$3. \text{ a. } S_{2k} = \frac{(2k)^2 (2k+1)^2}{4} = (2k+1)^2 k^2$$

$$\text{et } S_{2k+1} = \frac{(2k+1)^2 (2k+2)^2}{4} = (2k+1)^2 (k+1)^2$$

$$\text{et } \text{PGCD}(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k+1)^2 \text{PGCD}(k^2; (k+1)^2).$$

b. Deux entiers consécutifs sont premiers entre eux :

$$\text{PGCD}(k; k+1) = 1.$$

$$\text{c. } \text{PGCD}(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k+1)^2.$$

4. a. $2k+3 - (2k+1) = 2$. Le PGCD de ces deux nombres est un diviseur de 2 donc c'est 1 ou 2, mais les nombres étant impairs : $\text{PGCD}(2k+1; 2k+3) = 1$.

$$\text{b. } \text{PGCD}(S_{2k+1}; S_{2k+2}) = \frac{(2k+2)^2}{4} \times \text{PGCD}((2k+1)^2; (2k+3)^2) \\ = (k+1)^2.$$

5. $\text{PGCD}(S_{2k+1}; S_{2k+2}) = 1$ pour $k = 0$ donc S_n et S_{n+1} dont premiers entre eux uniquement pour $n = 1$.

143 1. $x \equiv 2(15) \Leftrightarrow$ il existe q entier tel que $x = 2 + 15q$.

$x \equiv 8(28) \Leftrightarrow$ il existe q' entier tel que $x = 8 + 28q'$.

En égalisant : $2 + 15q = 8 + 28q' \Leftrightarrow 15q - 28q' = 6$.

2. Les solutions de (E) sont $S = \{(6 + 28k, 3 + 15k), k \in \mathbb{Z}\}$.

3. $q = 6$ et $q' = 3$ soit $x = 92$ min, donc on verra les deux signaux en même temps à 1 h 32min.

144 1. a. $\text{PGCD}(a; b) = 7$.

b. $\text{PGCD}(a; b) = 1$.

c. $\text{PGCD}(a; b) = 7$.

2. $5a - 4b = 7$, avec $d \in \{1; 7\}$.

3. a. $4n + 3 = 7k \Leftrightarrow 4n - 7k = -3$ avec k entier.

$$S = \{(-6 + 7q; -3 + 4q); q \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\text{b. } 5n + 2 = 7k' \Leftrightarrow 5n - 7k' = -2.$$

$$S = \{(-6 + 7q'; -4 + 5q'); q' \in \mathbb{Z}\}.$$

4. $n = 7Q + r$. Si $r = 1$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4n + 3 = 7k$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $5n + 2 = 7k'$.

Dans ce cas, $\text{PGCD}(a; b) = 7$.

Si $r \in \{0; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $\text{PGCD}(a; b) = 1$.

145 1. Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entiers $(u_0; v_0)$ tel que $au_0 - bv_0 = 1$.

2. $u_0 = bq + u_1$. Si $u_1 = 0$, alors, en remplaçant dans (E), on obtient $abq - bv_0 = 1$ soit $b(aq - v_0) = 1$ donc b divise 1 ; ce qui est contradictoire avec $b \geq 2$, donc $u_1 \neq 0$.

$$3. au_0 - bv_0 = a(bq + u_1) - bv_0 = 1.$$

$au_1 - b(-aq + v_0) = 1$ donc le couple $(u_1; -aq + v_0)$ est solution de (E).

4. Comme $0 \leq u_1 < b$ alors $u_1 \leq b-1$ alors :

$$au_1 - bv_1 = 1 \text{ et } au_1 - bv_1 \leq a(b-1) - bv_1.$$

$bv_1 \leq ab - a - 1$ donc $v_1 \leq a - \frac{a+1}{b}$, comme $\frac{a+1}{b} > 0$ alors $v_1 < a$.

5. Si $v_1 = 0$, alors (E) devient $au_1 = 1$ et comme $a \geq 2$ il y a contradiction. Donc $v_1 \neq 0$.

6. $(u_1; v_1)$ et $(u_2; v_2)$ sont solutions de (E) donc :

$$a(u_1 - u_2) = b(v_1 - v_2).$$

Comme a et b sont premiers entre eux, alors $v_1 - v_2$ est un multiple de a et comme $0 < v_1 < a$ et $0 < v_2 < a$ alors $-a < v_1 - v_2 < a$. Le seul multiple de a qui vérifie cette inégalité est 0 donc $v_1 - v_2 = 0$ et $v_1 = v_2$, de même pour $u_1 = u_2$.

146 $a = 2n(n)$ et $b = n(2n+1)$. Comme les deux entiers consécutifs $2n$ et $2n+1$ sont premiers entre eux, $\text{PGCD}(a; b) = n = d$ et $b - a = n$.

$$m = 2n^2(2n+1) = 4n^3 + 2n^2$$

$$b^2 - a^2 = 4n^3 + n^2$$

$$m - d^2 = 4n^3 + n^2 \text{ donc } b^2 - a^2 = m - d^2.$$

147 1. $(P_1) \left(\frac{a}{b} \right)$ est irréductible $\Leftrightarrow a$ et b premiers entre eux.

Soit d un diviseur commun de a et de b alors d est aussi un diviseur commun de $a-b$ et ab en tant que combinaison linéaire de a et de b . Donc $a-b$ et ab sont premiers entre eux et $\frac{a-b}{ab}$ est irréductible : $(P_1) \Rightarrow (P_2)$.

$(P_2) \Leftrightarrow a-b$ et ab premiers entre eux. Soit d un diviseur commun de $a-b$ et ab , d est aussi un diviseur commun de $a^2(a-b) - ab$ et de $b^2(ab - b(a-b))$ en tant que combinaison linéaire de $a-b$ et ab . Donc a^2 et b^2 sont premiers entre eux et par suite a et b le sont aussi. $\frac{a}{b}$ est irréductible : $(P_2) \Rightarrow (P_1)$. On a bien l'équivalence.

2. Comme « a et b premiers entre eux » \Leftrightarrow « $a-b$ et ab premiers entre eux » alors si d est le PGCD de x et y , alors il existe a et b premiers entre eux tels que $x = da$ et $y = db$.

De plus $m = \text{PPCM}(x; y) = dab$.

Et $x - y = d(a - b)$.

$$\text{PGCD}(x - y; m) = \text{PGCD}(d(a - b); dab) = d \times \text{PGCD}(a - b; ab) = d.$$

148 1. Les paires cherchées sont (42 ; 1 680) (1 680 ; 42), (210 ; 336) et (336 ; 210).

2. Les solutions sont de la forme $x = 14 + 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. Les solutions sont de la forme $x = 14 + 5k$ et $y = -21 - 8k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

149 Soit n le nombre de jetons.

Alors : $n + 1 = 10a = 9b = 8c = 7d = 6e = 5f = 4g = 3h = 2i$, avec $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ entiers naturels non nuls.

De plus, $n = 11j$, avec j entier naturel non nul.

$n + 1$ est ainsi multiple commun de 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 et 2, donc de leur PPCM qui est 2 520.

D'où : $n = 2 520k - 1$ avec k entier naturel non nul.

Pour $k = 1$, n est inférieur à 3 000 : $n = 2 519$, et c'est un multiple de 11.

150 1. Soit q et q' deux entiers naturels et r et r' deux entiers naturels compris entre 0 et 25 tels que $ax + b = 26q + r$ et $ax' + b = 26q' + r'$. Si $f(x) = f(x')$, alors :

$$r = r' \text{ et } ax + b - (ax' + b) = 26(q - q').$$

$a(x - x') = 26(q - q')$, comme a et 26 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, $x - x'$ est un multiple de 26 et de plus $-26 < x - x' < 26$, le seul multiple de 26 correspondant est 0 donc $x - x' = 0$ et $x = x'$.

2. On a : $a(x - x') = 26(q - q')$.

Si d est le PGCD de a et de 26, alors il existe deux entiers a' et k premiers entre eux tels que $a = da'$ et $26 = dk$ et l'égalité devient $a'(x - x') = k(q - q')$ alors comme, d'après le théorème de Gauss, $x - x'$ est un multiple de k avec $-26 < x - x' < 26$ et comme $k \neq 26$ alors il existe un autre multiple de k que 0 et donc eu moins une autre solution que $x = x'$, on ne peut alors décoder certaines lettres.

3. Il faut que a soit premier avec 26 et b entier.

$a \in \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 15; 17; 19; 21; 23; 25\}$.

4. Soit $a \in E, a' \in E, aa' \equiv 1 \pmod{26} \Leftrightarrow$ il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$aa' = 1 + 26q \Leftrightarrow aa' - 26q = 1.$$

Comme a est premier avec 26, alors, d'après Bézout, il existe un couple solution $(a'; q)$ qui vérifie $aa' - 26q = 1$.

5. Si $y = f(x) : ax + b \equiv y \pmod{26}$; $aa'x + a'b \equiv a'y \pmod{26}$;

$x + a'b \equiv a'y \pmod{26}$ et $x \equiv a'y - a'b$.

151 1. CAMILLE donne EAYCENNO.

2. 7 et 30 n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1.

$7 \times 13 - 3 \times 30 = 1$.

3. On suppose $f(x) = f(x')$, soit $x^7 \equiv x'^7 \pmod{31}$, et $x^{7 \times 13} \equiv x'^{7 \times 13} \pmod{31}$. Alors, puisque $7 \times 13 = 1 + 3 \times 30$, on a : $x^{1+3 \times 30} \equiv x'^{1+3 \times 30} \pmod{31}$, soit $x \times (x^{30})^3 \equiv x' \times (x'^{30})^3 \pmod{31}$.

D'après le petit théorème de Fermat : $x^{30} \equiv 1 \pmod{31}$ pour x non divisible par 31.

On en déduit alors : $x \equiv x' \pmod{31}$, soit $x - x' \equiv 0 \pmod{31}$.

Puisque x et x' sont éléments de E , on en déduit : $x - x' = 0$, soit $x = x'$.

Si x et x' sont divisibles par 31, on a bien aussi $x = x'$, car alors $x = 0$ et $x' = 0$.

On en déduit : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Par contraposée, on a bien : $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

4. Si $y \equiv x^7 \pmod{31}$ alors $y^{13} \equiv x^{7 \times 13} \pmod{31}$ et $y^{13} \equiv x \pmod{31}$.

5. MICHEL est le mot cherché.

152 1. a et b étant premiers entre eux, le théorème de Bézout assure l'existence de solutions entières de l'équation **(E)** $au + bv = 1$ et résoudre **(E)** revient à résoudre $au = 1 - bv$ soit $au \equiv 1 \pmod{b}$.

2. au est un multiple de a , donc on cherche les multiples de a dont le reste dans la division euclidienne par b est 1.

3.

Entrer a, b, n

Pour u allant de 1 à n

Si $\text{mod}(au; b) = 1$

Alors v prend la valeur $\frac{1-au}{b}$

Fin Si

Fin Pour

Afficher u, v

153 Fichiers disponibles sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

02_TSspe_exercice153.xlsx (Excel 2007),

02_TSspe_exercice153.xls (Excel 2003)

et 02_TSspe_exercice153.ods (OpenOffice).

1. 2. 3. 4.

L	E	S	I	N	D	I	C	E
76	69	83	73	78	68	73	67	69
S	X	N	J	Y	U	J	R	X

S	O	N	T	U	T	I	L	E	S
83	79	78	84	85	84	73	76	69	83
13	1	24	16	19	16	9	18	23	13
N	B	Y	Q	T	Q	J	S	X	N

5.

L	Y	Q	J	R	B	Y	N	Q	J	Q	T	Q
76	89	81	74	82	66	89	78	81	74	81	84	81
0	13	19	8	2	14	13	18	19	8	19	20	19
A	N	T	I	C	O	N	S	T	I	T	U	T
J	B	Y	Y	X	S	S	X	V	X	Y	Q	
74	66	89	89	88	83	83	88	86	88	89	81	
8	14	13	13	4	11	11	4	12	4	13	19	
I	O	N	N	E	L	L	E	M	E	N	T	

154 1. a. Si $n = 2p$ alors $M = 18p + 1$ et $N = 18p - 1$, M et N sont de la forme $2Q + 1$, avec Q entier, donc M et N sont impairs.

b. $N - M = 2$ donc PGCD($M; N$) divise 2 mais comme M et N sont impairs alors PGCD($M; N$) = 1.

2. a. Si $n = 2p + 1$ alors $M = 18p + 10$ et $N = 18p + 8$, M et N sont de la forme $2Q$, avec Q entier, donc M et N sont pairs.

b. Comme PGCD($M; N$) divise 2 et que M et N sont pairs alors PGCD($M; N$) = 2.

3. a. $A = M \times N$.

b. Si n est pair, alors M et N sont impairs et leur produit aussi, donc A est impair.

c. Si M et N sont pairs, alors $9n$ est impair et donc n est impair. Il y a donc équivalence entre :

« n est impair » et « M et N sont pairs ».

n est impair $\Leftrightarrow M$ et N sont pairs \Leftrightarrow leur produit A est divisible par 4.

155 1. a. D'après le théorème de Bézout, comme e et $(p-1)(q-1)$ sont premiers entre eux, il existe u et v entiers tels que $ue + (p-1)(q-1)v = 1$.

b. On effectue la division euclidienne de u par $(p-1)(q-1)$: il existe donc des entiers k et d tels que $u = k(p-1)(q-1) + d$, avec $0 \leq d < (p-1)(q-1)$.

Si $d = 0$, alors $u = k(p-1)(q-1)$ et en remplaçant dans l'égalité de la question 1, on obtient :

$$(ke + v)(p-1)(q-1) = 1.$$

Ceci entraîne $p-1 = 1$ et $q-1 = 1$, soit $p = 2$ et $q = 2$, ce qui est impossible, car p et q sont des très grands nombres premiers. Ainsi : $d \neq 0$ et $0 < d < (p-1)(q-1)$.

c. On a alors : $(ke + v)(p-1)(q-1) + ed = 1$, ce qui s'écrit : $ed + w(p-1)(q-1) = 1$, avec $w = ke + v$; w est bien un entier car k, e, v sont des entiers.

d. $e \geq 2, d \geq 1$, donc $ed \geq 2$. Ainsi, $w(p-1)(q-1) < 0$, et donc $w < 0$ puisque $p-1$ et $q-1$ sont strictement positifs.

2. $x^{ed} = x^{1-w(p-1)(q-1)} = x \times (x^{(p-1)(q-1)})^{-w}$.

D'après le petit théorème de Fermat : $x^{p-1} \equiv x(p)$ si p ne divise pas x .

Alors : $x^{(p-1)(q-1)} \equiv x(p)$ et $x^{ed} \equiv x(p)$. Cette congruence est vraie aussi si p divise x .

De la même façon, on a : $x^{ed} \equiv x(q)$.

Ainsi, $x^{ed} - x \equiv 0(p)$ et $x^{ed} - x \equiv 0(q)$.

$x^{ed} - x$ est divisible par p et par q , avec p et q premiers entre eux, donc $x^{ed} - x$ est divisible par pq .

On en déduit : $x^{ed} - x \equiv 0(pq)$ et $x^{ed} \equiv x(pq)$.

3. On suppose $C = C'$. Alors : $B^e \equiv B'^e(n)$, et $B^{ed} \equiv B'^{ed}(n)$, soit $B \equiv B'(n)$.

Puisque n est supposé « très grand » par rapport aux blocs B et B' , on en déduit : $B = B'$.

Par contraposée, on a bien démontré : $B \neq B' \Rightarrow C \neq C'$.

4. Si $C \equiv B^e(n)$, alors $C^d \equiv B^{ed}(n)$, soit $B \equiv C^d(n)$.

156 1. $U_1 = 10, U_2 = 48, U_3 = 232, U_4 = 1\,392, U_5 = 8\,050$ et $U_6 = 47\,448$.

2. On montre que chaque terme U_n est divisible par 2, 3, 5 et 7 en raisonnant par disjonction des cas modulo 2, 3, 5 et 7.

3. a. 2 et 3 ne sont pas divisibles par p . On utilise le petit théorème de Fermat et le théorème de Gauss.

b. $6 \times 2^{p-2} \equiv 3(p)$ et $2 \times 3^{p-1} = 2 \times 3 \times 3^{p-2} = 6 \times 3^{p-2}$.

donc $6 \times 3^{p-2} \equiv 2(p)$.

c. $6U_{p-2} = 6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6$ donc $6U_{p-2} \equiv 3 + 2 + 1 - 6(p)$ soit $6U_{p-2} \equiv 0(p)$; $6U_{p-2}$ est divisible par p . Comme $p > 3$ et p ne divise pas 6, alors, d'après le théorème de Gauss, p divise U_{p-2} et $p \in (E)$.

157 a n'est pas divisible par b , donc d'après le petit théorème de Fermat : $a^{b-1} \equiv 1(b)$ et ainsi $a^{b-1} + b^{a-1} - 1 \equiv 0(b)$.

De même, b n'est pas divisible par a , donc $b^{a-1} \equiv 1(a)$ et ainsi $a^{b-1} + b^{a-1} - 1 \equiv 0(a)$.

a et b étant premiers et distincts, ils sont premiers entre eux.

Ainsi, puisque $a^{b-1} + b^{a-1} - 1$ est divisible par a et par b , il est divisible par le produit ab .

158 (7 ; 84), (21 ; 28), (28 ; 21) et (84 ; 7).

159 p étant premier, à l'aide du corollaire du petit théorème de Fermat : $(n+1)^p \equiv n+1(p)$ et $n^p \equiv n(p)$.

D'où : $(n+1)^p - (n^p + 1) \equiv n+1 - (n+1)(p) \equiv 0(p)$.

Ainsi : $(n+1)^p - (n^p + 1)$ est divisible par p .

De plus, si $n \equiv 0(2)$, alors $(n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0(2)$.

Et si $n \equiv 1(2)$, alors $(n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0 - 2(2) \equiv 0(2)$.

D'où $(n+1)^p - (n^p + 1)$ est divisible par 2.

Puisque le nombre $(n+1)^p - (n^p + 1)$ est divisible par 2 et par p , avec 2 et p premiers entre eux, alors il est divisible par $2p$.

160 $3x - 5y = 6 \Leftrightarrow 3(x - 12) = 5(y - 6)$.

À l'aide du théorème de Gauss, on trouve :

$$3x - 5y = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 + 5k \\ y = 6 + 3k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$y = x^2(5) \Leftrightarrow 6 + 3k \equiv (12 + 5k)^2(5) \Leftrightarrow 3k \equiv 3(5) \Leftrightarrow k \equiv 1(5)$.

Ainsi : $k = 1 + 5m$, avec $m \in \mathbb{Z}$.

D'où : $\begin{cases} x = 17 + 25m \\ y = 9 + 15m \end{cases}$ avec $m \in \mathbb{Z}$.

161 Si cette fraction est un entier, alors $n^2 + 5$ divise $n^3 + 4$.

Alors : $n^2 + 5$ divise $n(n^2 + 5) - (n^3 + 4) = 5n - 4$.

D'où : $n^2 + 5$ divise $5(n^2 + 5) - n(5n - 4) = 4n + 25$.

Et $n^2 + 5$ divise $5(4n + 25) - 4(5n - 4) = 141$.

Donc : $n^2 + 5 \in \{1, 3, 47, 141\}$, et $n^2 \in \{42, 136\}$, ce qui est impossible.

Donc, cette fraction n'est jamais un entier.

162 Soit n le nombre de jetons. Alors : $n \equiv 4(11)$ et $n \equiv 5(13)$.

Ainsi : $n = 4 + 11a$, avec a entier, et $n = 5 + 13b$, avec b entier.

D'où : $4 + 11a = 5 + 13b$ et $11a - 13b = 1$.

$11a - 13b = 1 \Leftrightarrow 11(a - 6) = 13(b - 5)$.

On en déduit : $a = 6 + 13k$ et $b = 5 + 11k$, avec k entier.

D'où $n = 143k + 70$.

Puisque $100 \leq n \leq 500$, on en déduit : $n \in \{213; 356; 499\}$.

163 Soit $d = \text{PGCD}(x; y)$ alors $x = dx'$ et $y = dy'$ avec x' et y' premiers entre eux.

$d(x' + y' - 1) = 1$ donc $d = 1$ et $x' + y' = 2$.

Puisque $x' + y' = 2$, si x' est pair, alors y' est pair, et

$\text{PGCD}(x'; y') \neq 1$; donc x' est impair.

On pose : $x' = 2k + 1$ avec k entier.

Alors : $y' = 1 - 2k$.

D'où les couples solutions : $(2k + 1; 1 - 2k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Problèmes sur les matrices

A Le programme

Matrices et suites

Il s'agit d'étudier des exemples de processus discrets, déterministes ou stochastiques, à l'aide de suites ou de matrices. On introduit le calcul matriciel sur des matrices d'ordre 2. Les calculs sur des matrices d'ordre 3 ou plus sont essentiellement effectués à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

Exemples de problèmes	Contenus
<p>Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets.</p> <p>Marche aléatoire sur un tétraèdre ou sur un graphe à N sommets avec saut direct possible d'un sommet à un autre : à chaque instant, le mobile peut suivre les arêtes du graphe probabiliste ou aller directement sur n'importe quel sommet avec une probabilité constante p.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Matrices carrées, matrices colonnes : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Exemples de calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. • Écriture matricielle d'un système linéaire.

B Notre point de vue

Ce chapitre introduit la notion de matrice et les opérations élémentaires sur les matrices. Les problèmes et les exercices corrigés du cours ont pour objectif de donner un sens intuitif à ces notions. Plusieurs exercices, notamment les Vrai/Faux permettent d'attirer l'attention sur les propriétés des opérations de même nom portant sur les réels qui ne se généralisent pas aux matrices.

Les principales applications concernent les systèmes d'équations linéaires, les suites (suites définies par une récurrence à deux rangs, suites imbriquées définies par des récurrences à un rang) et une première approche des marches aléatoires. Ces dernières seront traitées de façon plus approfondie dans le chapitre suivant.

Conformément au programme, la calculatrice prend une place importante : l'élève peut ainsi se concentrer sur le sens et l'utilisation de la notion d'inverse d'une matrice plutôt que sur des techniques calculatoires.

Les exemples de calcul de puissances de matrices font intervenir des diagonalisations de matrice. Sur ce sujet, on trouvera des exercices donnant toutes les indications permettant de se ramener à une matrice diagonale, mais aussi quelques exercices s'appuyant sur les capacités du logiciel de calcul formel Xcas. Cet usage du calcul formel est aussi l'occasion de souligner auprès des élèves que des principes algorithmiques permettent de diagonaliser une matrice. On pourra donner une idée de ces principes en travail de recherche (exercices 113 et 114 page 109).

Les notions abordées dans le chapitre 3

1. Matrices : des tableaux de nombres
2. Produit matriciel
3. Inverse d'une matrice et application

C Avant de commencer

Voir livre page 141 et le site www.bordas-index.fr pour les corrections détaillées.

D Problèmes

Problème 1 Carré magique

L'objectif de ce problème est d'introduire les conventions d'indexation des éléments d'une matrice et les opérations de somme de matrices et de multiplication par un scalaire par une étude simplifiée de la structure algébrique de l'ensemble des matrices magiques.

Partie A

1. $a_{1,1} = 4$, $a_{3,2} = 1$ et $a_{2,3} = 7$.
2. Somme des éléments de chaque ligne : 15.
3. Somme des éléments de chaque colonne : 15.
4. La somme de chaque ligne et chaque colonne est 34.
5. $a_{i,j} = i$.
6. $i + j = p + 1$.
7. A est magique, C ne l'est pas.

Partie B

1. La somme commune est également multipliée par t .
3. La somme magique de la matrice $tM + sN$ est égale à $tS_M + sS_N$ où S_M et S_N sont les sommes magiques associées à M et N .

Problème 2 Liaisons aériennes

L'objectif est d'introduire la notion de produit de deux matrices par le biais d'une situation classique en théorie des graphes (nombre de chemins de longueur donnée).

1. $Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Il y a 6 chemins passant par A_1 , 2 passant par A_2 et un passant par A_3 .
3. $R = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $r_{1,1} = \sum_{j=1}^3 p_{1,j} q_{j,1}$ et $r_{i,k} = \sum_{j=1}^3 p_{i,j} q_{j,k}$.
5. a. $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- b. $r_{1,1} = \sum_{k=1}^4 p_{1,k} q_{k,1}$.

Problème 3 Évolution de sondages

L'objectif est ici de découvrir l'efficacité de l'utilisation des puissances d'une matrice pour l'étude de l'évolution d'une marche aléatoire simple.

1. $R_2 = (0,275 \quad 0,725)$.
2. $R_3 = R_2 E = R_1 E^2$.
3. $R_{12} = R_1 E^{11} \approx (0,456 \quad 0,544)$ soit environ 46 % pour le candidat A et 54 % pour B.
4. $R_{20} = R_1 E^{19} \approx (0,538 \quad 0,462)$ soit environ 54 % pour A et 46 % pour B.
5. a. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix}$, $QP = I$.

c. Correctif : Il faut lire $R_n = \frac{1}{12} (8 - 5 \times 0,94^{n-1} \quad 4 + 5 \times 0,94^{n-1})$ à la place de $R_n = \frac{1}{12} (8 - 5 \times 0,94^n \quad 4 + 5 \times 0,94^n)$.

$$E^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + 0,94^n & 1 - 0,94^n \\ 2 - 2 \times 0,94^n & 1 + 2 \times 0,94^n \end{pmatrix} \text{ et } R_n = R_1 E^{n-1}.$$

d. À la 31^e semaine, les intentions de votes pour le candidat A dépassent 60 % pour la première fois.

Problème 4 Avec domiciles fixes

On étudie une deuxième marche aléatoire a priori plus complexe que la précédente. On donne ainsi le statut de méthode à « l'astuce » de l'introduction d'une matrice du problème précédent.

1. a. $P(M_2) = P(M_1) P_{M_1}(M_2) + P(L_1) P_{L_1}(M_2) + P(C_1) P_{C_1}(M_2)$
 $= \frac{1}{3} \times (0 + 0,5 + 0,5) = \frac{1}{3}$.
- c. $d_2 = d_1 A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(M_2) & P(L_2) & P(C_2) \end{pmatrix}$.
2. On obtient de même $d_3 = d_2 A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
4. Correctif : l'énoncé de cette question doit être « Déterminer la probabilité que cette personne passe Noël 2012 à Lille. Répondre à la même question si l'on sait qu'elle était à Lille en janvier 2012 ». La suite (d_n) est constante, d'où la probabilité cherchée. Si la personne était à Lille en janvier 2012, c'est-à-dire si $d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors :

$$d_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times A^{11} = \begin{pmatrix} \frac{341}{1024} & \frac{683}{2048} & \frac{683}{2048} \end{pmatrix}.$$

Problème 5 Somme de puissances d'entiers

L'objectif de ce problème est d'introduire la notion d'inverse d'une matrice et son lien avec la résolution de système. L'utilisation d'un logiciel de calcul formel permet de focaliser l'attention de l'élève sur l'utilisation possible d'un inverse de matrice plutôt que sur des calculs fastidieux.

Fichiers associés sur www.bordas.fr et sur le manuel numérique premium : 03_TSspe_probleme5.xws et 03_TSspe-correctionprobleme5.xws (Xcas) ; 03_TSspe_probleme5.dfw (Derive).

Partie A

1. $f(1) = a + b + c + d + e$,
 - $f(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e$,
 - $f(3) = 81a + 27b + 9c + 3d + e$,
 - $f(4) = 256a + 64b + 16c + 4d + e$
- et $f(5) = 625a + 125b + 25c + 5d + 1$.

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = S(1) \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = S(2) \\ 81a + 27b + 9c + 3d + e = S(3) \\ 256a + 64b + 16c + 4d + e = S(4) \\ 625a + 125b + 25c + 5d + 1 = S(5) \end{cases}$$

dont l'écriture matricielle est celle proposée dans l'énoncé.

La suite S peut être définie avec le logiciel Xcas en utilisant la fonction somme (cf. ci-après).

S(n):=somme(j^3,j,1,n)
e variable(s) globale(s) compilir
n -> somme(j^3,j,1,n)
seq(S(n),n,1,5)
[1, 9, 36, 100, 225]

2. a. De l'égalité $AX = K$, on déduit l'égalité $BAX = BK$, soit $X = BK$. Si la notion de matrice inverse a déjà été introduite, de l'égalité $BA = I_5$, on déduit l'égalité $AB = I_5$. Si cette notion n'est pas introduite, on soulignera qu'il ne s'agit pas d'une conséquence triviale. On peut dans ce cas calculer à la main ou avec le logiciel Xcas le produit AB pour traiter la réciproque : si $X = BK$, alors $AX = K$.

b. Le produit peut être calculé à la main ou avec le logiciel.

c. On a obtenu le polynôme f suivant :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2.$$

3. Les suites $(f(n))$ et $(S(n))$ ont les mêmes premiers termes.

Ces deux suites vérifient de plus la même relation de récurrence :

$f(n) = f(n-1) + n^3$, $S(n) = S(n-1) + n^3$. Ces deux suites sont donc égales.

4. a. $T(1) = 28$, $T(2) = 153$, $T(3) = 496$, $T(4) = 1\,225$ et $T(5) = 2\,556$.

b. Le système a maintenant pour écriture matricielle $AX = K_1$ où

$$K_1 = \begin{pmatrix} T(1) \\ T(2) \\ T(3) \\ T(4) \\ T(5) \end{pmatrix}.$$

K=[1],[9],[36],[100],[225]; B*K
$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 9 & 1/2 \\ 36 & 1/4 \\ 100 & 0 \\ 225 & 0 \end{pmatrix}$

La solution de ce système est donnée par $BK_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où l'expression de g .

c. Des calculs pour confirmer l'égalité des suites $(T(n))$ et $(g(n))$:

g(n):=2*n^4+8*n^3+11*n^2+6*n+1
// interprete g
// Success compiling g
n -> 2*n^4+8*n^3+11*n^2+6*n+1
simplifier(g(n)-g(n-1));simplifier(T(n)-T(n-1))
(8*n^3+12*n^2+6*n+1, 8*n^3+12*n^2+6*n+1)

Les premiers termes des deux suites sont égaux et les deux suites satisfont la même relation de récurrence : elles sont égales.

Partie B

Pour la somme des carrés des premiers entiers, on procède de la même façon.

On détermine une fonction polynôme candidat (cf. ci-contre).

D'où la fonction candidat :

$$h : n \mapsto \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + \frac{11}{3}n + 1.$$

Puis on démontre que cette fonction h convient à l'aide des calculs suivants :

V(n):=somme((2*j+1)^2,j,0,n)
e V
f, declaree(s) comme variable(s) globale(s) c
n -> somme((2*j+1)^2,j,0,n)
K2 :=[[V(1)],[V(2)],[V(3)],[V(4)],[V(5)]]; B*K2
$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 35 & 4 \\ 84 & 4 \\ 165 & 11 \\ 286 & 3 \end{pmatrix}$

seq(V(n),n,1,5); seq(h(n),n,1,5)
([10, 35, 84, 165, 286], [10, 35, 84, 165, 286])
simplifier(V(n)-V(n-1)); simplifier(h(n)-h(n-1));
(4*n^3+4*n^2+6*n+1, 4*n^3+4*n^2+6*n+1)

E Exercices

POUR DÉMARRER

1. $a_{1,2} = 0,2$; $a_{2,1} = 0,8$; $a_{2,3} = 0,05$.

2. et 3. Les détails de la procédure se trouvent en page 82.

La somme est 1,5.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

2. $a_{i,j} = a_{j,i}$ traduit l'équivalence : « i serre la main à j si, et seulement si, j serre la main à i ».

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

5. 1. $a_{1,3} = 3$; $a_{3,1} = 7$.

2. $\sum_{j=1}^3 a_{j,j} = 15$.

3. $\sum_{j=1}^3 a_{2,j} = 15$.

4. $\sum_{j=1}^3 a_{4-j,j} = 15$.

6. $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$

7. $\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$

8. Voir livre page 141.

9. $10I_2 - 7J = \begin{pmatrix} 3 & -14 \\ -21 & -18 \end{pmatrix}.$

10. $3A = \begin{pmatrix} -3 & 3\sqrt{2} \\ 30 & 1,5 \end{pmatrix}.$

$-2A - B = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} - \frac{2}{3} \\ -14,9 & -1 - \pi \end{pmatrix}.$

11. $2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 6 & 13 & 8 \\ 19 & 13 & 17 \end{pmatrix}.$

12. Voir livre page 141.

13. $2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 12 & 27 \\ 3 & 12 & 27 \\ 3 & 12 & 27 \end{pmatrix}$

d'où $2A - 3B = \begin{pmatrix} -1 & -10 & -25 \\ 1 & -8 & -23 \\ 3 & -6 & -21 \end{pmatrix}.$

14. Voir livre page 141.

$$15 \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ -26 \end{pmatrix}.$$

$$16 \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

17 Il s'agit d'une symétrie de centre l'origine du repère.

$$18 \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$19 \quad \begin{pmatrix} 2,48 & 11,51 & 22,22 \\ 2,87 & 10,48 & 20,15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 250 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\,227,9 \\ 10\,503 \end{pmatrix}.$$

20 Voir livre page 142.

21 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Il s'agit de la symétrie dont l'axe est la droite d'équation $y = x$.

$$22 \quad AB = \begin{pmatrix} 19,9 & 7,5 \\ -48,7 & -18,5 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} -0,6 & 1,7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$23 \quad AB = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 12 \\ -20 & -1 & 30 \\ -29 & -4 & 48 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 18 & 21 & 24 \\ 14 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$24 \quad AB = \begin{pmatrix} e & 1+e^4 \\ e^4 & e^3+e^7 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} e+e^3 & e^3+e^5 \\ e^5 & e^7 \end{pmatrix}.$$

25 Voir livre page 142.

26 $(AB)_{1,1} = 38$ et $(BA)_{1,1} = 41$. Donc $AB \neq BA$.

27 $A^n = 0_2$ pour $n \geq 2$.

28 Voir livre page 142.

29 On vérifie que $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \times A = I_2$.

30 Il suffit de calculer AB .

31 Voir livre page 142.

$$32 \quad 1. A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. La plupart des calculatrices affichent la même matrice inverse que pour A ($B = A$ pour la plupart des calculatrices).

33 Le système s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ ou encore :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

34 La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 12 & 11 & 13 \end{pmatrix}$ a pour inverse

$$B = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & -5 & 4 \\ -18 & 22 & -8 \\ 18 & -14 & 4 \end{pmatrix}. B \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

POUR S'ENTRAÎNER

$$35 \quad 1. E = \begin{pmatrix} 560 & 160 & 80 \\ 560 & 105 & 35 \end{pmatrix}.$$

$$2. F \approx \begin{pmatrix} 0,747 & 0,177 & 0,077 \end{pmatrix}.$$

$$36 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \\ 12 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

37 Voir livre page 142.

$$38 \quad S = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$39 \quad S + 10 \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$40 \quad t = 3 \text{ et } s = -5.$$

$$41 \quad s = 3 \text{ et } t = 5.$$

$$42 \quad s = 1 \text{ et } t = \frac{1}{e^x}.$$

43 VRAI. Pour tout couple $(i; j)$, on a $sa_{ij} = tb_{ij}$.

s divise tb_{ij} et est premier avec t donc divise b_{ij} . Il existe donc un entier m_{ij} tel que $sm_{ij} = b_{ij}$.

44 VRAI : chaque élément sa_{ij} est nul, donc si s est non nul, chaque a_{ij} est nul.

$$45 \quad M = \frac{1}{9+6+6} \begin{pmatrix} 17 & 16 & 12 \\ 19 & 19 & 15 \\ 14 & 15 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$46 \quad (AB)_{1,1} = 38 \text{ et } (BA)_{1,1} = -19. \text{ Donc } AB \neq BA.$$

$$47 \quad 1. AC = CA = \begin{pmatrix} 267 & 332 \\ 415 & 516 \end{pmatrix}.$$

2. $CA = A^2A = A^3 = AC$.

48 Voir livre page 142.

$$49 \quad 1. B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

51 1. $A^2 = -I_2$, $A^3 = -A$ et $A^4 = I_2$. On fera le rapprochement avec les puissances du nombre i de l'ensemble des complexes.

2. Si $n \equiv 0(4)$, alors $A^n = I_2$. Si $n \equiv 1(4)$, alors $A^n = A$.

Si $n \equiv 2(4)$, alors $A^n = -I_2$. Si $n \equiv 3(4)$, alors $A^n = -A$.

$$52 \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $A^n = 0_3$ pour $n \geq 3$.

$$53 \quad 1. A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$A^4 = I_3$ et $A^5 = A$.

2. Si $n \equiv 0(4)$, alors $A^n = I_3$. Si $n \equiv 1(4)$, alors $A^n = A$.

Si $n \equiv 2(4)$, alors $A^n = A^2$. Si $n \equiv 3(4)$, alors $A^n = A^3$.

$$54 \quad 1. A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

2. et 3. On conjecture et on prouve par récurrence :

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^n + na^{n-1} \\ a^n \end{pmatrix}.$$

$$55 \quad 1. A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A^3 = I_2 \text{ et } A^4 = A.$$

2. Pour $n \equiv 0(3)$, $A^n = I_2$.

Pour $n \equiv 1(3)$, $A^n = A$.

$$\text{Pour } n \equiv 2(3), A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pour } n \equiv 0(3), \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pour } n \equiv 1(3), \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi - \sqrt{3} \\ \pi \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pour } n \equiv 2(3), \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\pi - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

56 1. On prouve par récurrence que $J^n = 2^{n-1}J$.

2. $A = I + 2J$, $A^2 = I + 12J$ et $A^3 = I + 62J$.

3. Preuve par récurrence.

4. a.

CASIO	TEXAS
"N"?→N# 2→U:4→U# For 1→ To N# 3×U+2×U→W# 2×U+3×U→U:W→U# Next# U: W	:Promp N :2→U:4→V :For(J,1,N) :3×U+2×U→W :2×U+3×U→V :W→U :End :Disp U,V

$$b. \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+5^n & -1+5^n \\ -1+5^n & 1+5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 \times 5^n \\ 1+3 \times 5^n \end{pmatrix}.$$

57 La réciproque est fautive.

Contre-exemple avec $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

58 Voir livre page 142.

60 1. La probabilité d'obtenir deux fois la même image est égale à $3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$. La probabilité d'obtenir deux images distinctes est $\frac{2}{3}$.

2. La probabilité d'obtenir les trois images avec trois achats est $6 \times \frac{1}{3^3}$.

3. b. $(1 \ 0 \ 0) M^2 = \left(\frac{1}{9} \ \frac{2}{3} \ \frac{2}{9} \right) : \frac{1}{9}$ est la probabilité de n'avoir qu'une seule image après trois achats, $\frac{2}{3}$ d'avoir deux images distinctes et $\frac{2}{9}$ la probabilité d'en avoir trois.

c. $(1 \ 0 \ 0) M^5 = \left(\frac{1}{243} \ \frac{62}{243} \ \frac{20}{27} \right)$. La probabilité est $\frac{20}{27}$.

61 1. $AC = CA = 0$.

2. Démonstration par récurrence.

3. $A^n = 3^{n-1}A$ (récurrence).

$$4. C^{2n} = (-1)^n \begin{pmatrix} 2 \times 3^{n-1} & -3^{n-1} & -3^{n-1} \\ -3^{n-1} & 2 \times 3^{n-1} & -3^{n-1} \\ -3^{n-1} & -3^{n-1} & 2 \times 3^{n-1} \end{pmatrix}.$$

$$C^{2n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -3^n & 3^n \\ 3^n & 0 & -3^n \\ -3^n & 3^n & 0 \end{pmatrix}.$$

5. On distingue les cas n pair, n impair.

$$62 \ 1. A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Récurrence.

4. b. $b_3 = 1$ et $b_4 = 3$.

c. Le programme suivant calcule b_n pour $n \geq 3$.

CASIO	TEXAS
"N"?→N# 1→P:3→Q# For 5 To N# Q+2×P→R:Q→P:P→Q# Next# Q#	:Promp N :1→P:3→Q :For(J,5,N) :Q+2×P→R :Q→P:P→Q :End :Disp Q

d. En utilisant les valeurs $b_3 = 1$ et $b_4 = 3$, on obtient $u = \frac{1}{3}$ et $v = \frac{1}{6}$.

$$5. a_n = 2b_{n-1} = 2 \times \left(\frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} + \frac{1}{6} \times 2^{n-1} \right).$$

63 FAUX. Contre-exemple avec $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

64 VRAI. Exemple à l'exercice 53.

$$65 \text{ Le système } \begin{cases} 3x + 11y = a \\ 2x + 5y = b \end{cases} \text{ s'écrit aussi } \begin{cases} x = -\frac{5}{7}a + \frac{11}{7}b \\ y = \frac{2}{7}a - \frac{3}{7}b \end{cases}.$$

A est donc inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & 11 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$66 \text{ On obtient } A^{-1} = \frac{1}{69} \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

67 Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, l'algorithme consiste essentiellement en un test :

si $ad = bc$ alors A est non inversible, sinon A est inversible.

68 $B^2 = I_2$ donc B est inversible et $B^{-1} = B$.

$$70 \ A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = -8I_2. \text{ D'où } A^{-1} = -\frac{1}{8}A^2.$$

71 1. Si A est inversible d'inverse B alors :

$$A^2 B^2 = A A B B = A I_2 B = A B = I_2.$$

Donc A^2 est inversible, d'inverse B^2 . Par récurrence, A^n est inversible, d'inverse B^n .

2. Vrai. Si A^n ($n \geq 1$) est inversible, d'inverse B alors

$$A^n B = A \times A^{n-1} B = I_2. \text{ Donc A est inversible.}$$

72 Voir livre page 142.

73 1. Si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec a, b, c non nuls, on vérifie que $DD' = I$ où :

$$D' = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. Le produit $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ a pour éléments

diagonaux $a \times a_{1,1}$, $b \times a_{2,2}$, $c \times a_{3,3}$. Si un élément diagonal est nul, la matrice D ne peut pas être inversible.

$$74 \ 1. \text{ et } 2. \ P = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = QAP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. D'où $A^n = PD^nQ$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \times (-2)^n + 3 \times 5^n & -3 \times (-2)^n + 3 \times 5^n \\ -4 \times (-2)^n + 4 \times 5^n & 3 \times (-2)^n + 4 \times 5^n \end{pmatrix}.$$

$$75 \text{ FAUX. Contre-exemple : } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On vérifie : } ABA^{-1}B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

76 FAUX. Les matrices $A = (2)$ et $B = (-2)$ sont inversibles et la matrice $A + B = (0)$ ne l'est pas.

$$77 \ 1. \ A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5}a + \frac{4}{5}b \\ 2a - b \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Le système } \begin{cases} 20x + 16y = 7 \\ 10x + 7y = 15 \end{cases} \text{ s'écrit aussi } \begin{cases} 5x + 4y = \frac{7}{4} \\ 10x + 7y = 15 \end{cases}.$$

D'où les coordonnées du point d'intersection :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \times \frac{7}{4} + \frac{4}{5} \times 15 \\ 2 \times \frac{7}{4} - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,55 \\ -11,5 \end{pmatrix}.$$

$$78 \ 1. \text{ Le système a pour solution } \left(\frac{31}{20}, -\frac{2}{5} \right).$$

$$2. \begin{cases} x = \frac{1}{10}a + \frac{3}{20}b \\ y = \frac{1}{5}a - \frac{1}{5}b \end{cases}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$4. A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

79 Voir livre page 142.

$$81 \quad 1. A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 12 & -10 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Les système $\begin{cases} 5x + 10y = 1 - 6z \\ 4x + 12y = 3 - z \end{cases}$ s'écrit $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 6z \\ 3 - z \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 12 & -10 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 6z \\ 3 - z \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -62z - 18 \\ 19z + 11 \end{pmatrix}$.
D'où une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

$$82 \quad 1. M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. M^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -10 & 16 & -6 \\ 24 & -24 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 26 \\ 118 \\ 266 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}. \text{ D'où } f(x) = 7x^2 + 4x - 10.$$

$$3. M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ -2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}p + \frac{1}{2} \\ -2p - 4 \\ 4p + 6 \end{pmatrix}.$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{4}p + \frac{1}{2}\right)x^2 + (-2p - 4)x + (4p + 6).$$

83 VRAI. Si la matrice est inversible, le système a une solution :

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}.$$

84 FAUX. Lorsque le système a plusieurs solutions, la matrice n'est pas inversible.

$$85 \quad \begin{cases} x = \frac{7}{2}a - \frac{5}{2}b \\ y = -4a + 3b \end{cases} \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

86 $C^3 = -8I_2$ d'où $C^{-1} = -\frac{1}{8}C^2 = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 7 & -49 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ et le système se résout par le calcul :

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -203 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

$$87 \quad C = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$88 \quad A^n = 2^{2n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 142 et le site www.bordas-index.fr pour les corrigés détaillés.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Chiffrement de Hill

La notion de matrice et de produit par un vecteur colonne est ici utilisé pour un problème de cryptage classique. L'étude de ce TP nécessite d'avoir déjà poussé assez loin l'étude des notions de l'arithmétique du programme.

A. Le principe du chiffrement de Hill

$$1. a. V_1 = \begin{pmatrix} 81 \\ 47 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 46 \\ 27 \end{pmatrix} \text{ et } V_3 = \begin{pmatrix} 24 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

$$b. W_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 21 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } W_3 = \begin{pmatrix} 24 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$BW_1 = \begin{pmatrix} -96 \\ 39 \end{pmatrix}, BW_2 = \begin{pmatrix} 55 \\ -18 \end{pmatrix} \text{ et } BW_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Après réduction modulo 26, on retrouve U_1, U_2 et U_3 .

$$3. \text{ Avec YOWPEE, on forme les matrices } W_1 = \begin{pmatrix} 24 \\ 14 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 22 \\ 15 \end{pmatrix}, W_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ puis } BW_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, BW_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ et } BW_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en réduisant modulo 26 : } U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ et } U_3 = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ce qui correspond au mot CERISE.

B. Un autre exemple

1. On obtient $W_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix}$ et $W_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$ soit HTPQMK.

2. $MA = 43I_2$. A est donc inversible et $B = \frac{1}{43}M$.

3. Les coefficients des matrices BW_1, BW_2 et BW_3 ne sont pas entiers.

5. Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ avec $w_1 \equiv v_1(26)$ et $w_2 \equiv v_2(26)$, avec $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a, b, c, d entiers), on a $CV = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix}$ et

$CW = \begin{pmatrix} aw_1 + bw_2 \\ cw_1 + dw_2 \end{pmatrix}$: les éléments de CV sont congrus modulo 26 à ceux de CW.

On vérifie que $23 \times 43 \equiv 1(26)$. On a $CA = AC = 23 \times 43I_2$.

Si $V = AU$, alors $CV = CAU = 23 \times 43U$. Les éléments de CV, donc aussi ceux de CW, sont donc congrus modulo 26 à ceux de U. La clé C permet donc le déchiffrement.

C. Un troisième exemple

1. Les mots AA et AN par exemple sont codés par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix}$ et chiffrés tous deux par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ou plus généralement, le mot

codé par $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ et le mot codé par $\begin{pmatrix} a \\ a+13 \end{pmatrix}$ sont chiffrés par le même mot.

2. Cette matrice n'est pas une clé acceptable.

D. Critère pour une clé acceptable

1. $AM = MA = \delta I_2$.

2. δ est premier avec 26. Il existe donc des entiers u et v tels que $u\delta + 26v = 1$ (Bézout). Posons $B = uM$.

Alors $AB = BA = uMA = u\delta I_2$ et $u\delta \equiv 1(26)$.

3. On déchiffre le message en appliquant le principe du chiffrement avec la clé B (cf. partie B.5.).

E. Trigrammes

1. On forme les vecteurs $U_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\text{Puis } V_1 = AU_1 = \begin{pmatrix} 97 \\ 67 \\ 139 \end{pmatrix}, V_2 = AU_2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 38 \\ 80 \end{pmatrix} \text{ et } W_1 = \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne le mot TPJYMC.}$$

2. $MA = \begin{pmatrix} 159 & 286 & 390 \\ 104 & 159 & 208 \\ 156 & 286 & 393 \end{pmatrix}$ et $N = 3I_3$. Comme $9 \times 3 \equiv 1 \pmod{26}$, la matrice $B = 9M$ permet le déchiffrement.

TP 2 Algorithme de Smyrne

On étudie dans ce TP un algorithme classique d'approximation d'irrationnels par des nombres rationnels. Les calculs prouvant la conjecture émise en début de TP seront menés avec le logiciel Xcas qui permet de diagonaliser la matrice intervenant et, donc, d'en calculer plus facilement les puissances. Dans la partie C, on s'assure d'une relecture attentive de l'ensemble de la démarche par l'élève en lui demandant de reproduire le déroulement du raisonnement dans une situation légèrement modifiée.

Fichier associé sur www.bordas.fr et sur le manuel numérique premium : 03_TSspe_TP2.xws (Xcas).

A. Un algorithme

Casio	Texas
"N"?>N:1→X:1→Y For 1→J To N X+Y→A:2×X+Y→B:A×X Next J Y←X	:Prompt N :1→X:1→Y :For(J,1,N) :X+Y→A:2×X+Y→Y :A→X :End :Disp Y/X■

Les affichages semblent converger vers $\sqrt{2}$.

B. Une matrice

- $(x_1; y_1) = (2; 3)$, $(x_2; y_2) = (5; 7)$ et $(x_3; y_3) = (12; 17)$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- Récurrence.
- Pour l'entrée n , la sortie de l'algorithme est $\frac{y_n}{x_n}$.
- a. Saisie des matrices A et U_0 :

1[A:=[[1,1],[2,1]]:U0:=[[1],[1]]
(1, 1 1) 2, 1 1)

b. Calcul de U_1 , U_2 et U_3 :

2[U1:=A*U0:U2:=A*U1:U3:=A*U2
(2, 5 12) 3, 7 17)

c. L'instruction `jordan(A)` a pour résultat une liste de deux matrices $P = \text{jordan}(A)[0]$ et $D = \text{jordan}(A)[1]$ qui sont telles que $A = PDQ$ où Q est la matrice inverse de P et D est (ici) une matrice diagonale.

3[P:=jordan(A)[0]:D:=jordan(A)[1]:Q:=simplifier(inv(P))
(1, 1 √2+1, 0 1, √2 √2, -√2 0, -√2+1 1, -√2)

L'instruction `simplifier(P*D*Q)` a pour résultat la matrice A.

d. De $A = PDQ$ et $QP = I$, on déduit par récurrence : $A^n = PD^nQ$. Les calculs ci-dessous correspondent donc aux calculs de U_2 et U_3 :

5[simplifier(P*D^2*Q*U0):simplifier(P*D^3*Q*U0);
(5, 12) 7, 17)

6. a. $F(n)$ est égale à D^n .

6[F(n):=[[(sqrt(2)+1)^n,0],[0,-(sqrt(2))+1)^n]]:factor(P*F(n)*Q*U0)
// Interprete F // Success compiling F
(Done, $\frac{(-\sqrt{2}+2)-(-\sqrt{2}+1)^n + (-\sqrt{2}+2)-(\sqrt{2}+1)^n}{4}$ $\frac{(-\sqrt{2}+1)-(-\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}+1)^n}{2}$)

On en déduit une expression de r_n :

$$r_n = \frac{2((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1})}{(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n}.$$

b. Détermination de la limite avec Xcas :

7 U:=unapply(factor(P*F(n)*Q*U0),n);
Done
8 r:=unapply(U(n)[1][0]/U(n)[0][0],n);
Done
9 limite(r(n),n,+infinity)
√2

On a utilisé l'instruction `unapply` qui permet de définir une fonction à partir d'une expression. On aurait pu ici remplacer les lignes 7 et 8 par :

$$U(n):= \text{factor}(P*F(n)*Q*U0);$$

et

$$r(n):=U(n)[1][0]/U(n)[0][0];.$$

L'instruction `U(n)[0]` renvoie la première ligne de $U(n)$. Cette première ligne est une liste : on détermine son premier (et unique) élément par `U(n)[0][0]`.

c. Posons $a = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. On a : $r_n = \frac{2(1+a^{n+1})}{\frac{(2+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}} + \frac{(2-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}} a^n}$.

La limite en $+\infty$ est $\frac{2}{\frac{(2+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$.

C. Généralisation

- On obtiendra cette fois des approximations du nombre $\sqrt{3}$.
- On adapte la feuille de calcul formel en modifiant la matrice A et en relançant les calculs.

CAP VERS LE BAC

Sujet A

- $u_1 = 3 + 2\sqrt{2}$, $u_2 = 17 + 12\sqrt{2}$, $u_3 = 99 + 70\sqrt{2}$.
- $u_{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$ donne :
 $u_{n+1} = (3a_n + 4b_n) + \sqrt{2}(2a_n + 3b_n)$.
-

Entrée : n entier naturel non nul
Traitement :
a prend la valeur 3
b prend la valeur 2
Pour j allant de 2 à n
c prend la valeur 3a + 4b
b prend la valeur 2a + 3b
a prend la valeur c
Fin Pour
Sortie : Afficher a et b

$$4. A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. a. On vérifie que PQ est la matrice unité.

$$b. QAP = \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

6. $A = PDQ$, d'où $A^n = PD^nQ$ d'où :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})^n & \frac{\sqrt{2}}{2}(3+2\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{2}(3-2\sqrt{2})^n \\ \frac{\sqrt{2}}{4}(3+2\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2})^n & \frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})^n \end{pmatrix}$$

$$7. \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ d'où le résultat.}$$

Sujet B

1. $u_1 = 2$ et $u_3 = 12$.

2. $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$: les pavages de la planche de longueur n débutent avec un carré bleu ou un carré vert et se complètent par un pavage de la planche de longueur $n-1$ (d'où le terme $2u_{n-1}$) ou débutent par un domino (d'où le terme u_{n-2}).

3.

Pour i allant de 3 à n
 c prend la valeur b
 b prend la valeur $2b + a$
 a prend la valeur c

Fin Pour

Afficher b

4. $u_4 = 29$ et $u_5 = 70$.

$$5. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. a. On vérifie que QP est la matrice unité.

$$b. D = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

7. $A^n = PD^nQ$: par récurrence en tenant compte de QP = matrice unité.

$$8. \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } u_n = \frac{10-7\sqrt{2}}{4} \times (1-\sqrt{2})^{n-2} + \frac{10+7\sqrt{2}}{4} \times (1+\sqrt{2})^{n-2}.$$

Sujet C

$$1. B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } AB = 10I_3.$$

$$2. A^{-1} = \frac{1}{10}B.$$

$$3. \text{ Le système } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ a pour solution : } \frac{1}{10}B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'intersection des trois plans est donc constituée du point $M(-0,4; 2,1; 1,3)$.

$$4. A^3 = -10I_3 + 4A^2.$$

$$5. A^4 = AA^3 = -10A + 4A^3 = -40I_3 - 10A + 16A^2.$$

6. Par récurrence avec $A^{n+1} = AA^n$ et le résultat de la question 5.

$$7. A^5 = -160I_3 - 40A + 54A^2 \text{ et } A^6 = -540I_3 - 160A + 176A^2.$$

Sujet D

1. Proposition A fautive. Contre-exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition B fautive. Contre-exemple : prendre $B = A$.

2. Proposition C fautive. Contre-exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ vérifie } A^2 = 0_2.$$

3. Proposition D fautive puisque $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est aussi solution.

4. Proposition E vraie : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4^n - 1 & 4^n \end{pmatrix}$ (preuve par récurrence).

$$97. Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, QMQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{47}{50} \end{pmatrix}. \text{ D'où :}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{47}{50}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{47}{50}\right)^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \left(\frac{47}{50}\right)^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{47}{50}\right)^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit a_n par $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On peut aussi remarquer

que la suite $\left(\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}\right)$ est constante.

$$98. A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2z \\ 15+11z \end{pmatrix}$ est équivalent au système

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1-2z \\ 15+11z \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -94z-117 \\ 81z+103 \end{pmatrix}.$$

L'intersection des deux plans est donc la droite de représen-

$$\text{tation paramétrique } \begin{cases} x = \frac{1}{5}(-94t-117) \\ y = \frac{1}{5}(81t+103), \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

$$99. 1. \begin{cases} x = -\frac{3}{5}a + \frac{8}{5}b \\ y = \frac{7}{5}a - \frac{17}{5}b \end{cases}$$

$$2. A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a donc } A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 7 & -17 \end{pmatrix}.$$

POUR ALLER PLUS LOIN

100. 1. La récurrence s'appuie sur les formules usuelles de trigonométrie : $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$,

$$\sin a \cos b - \sin b \cos a = \sin(a-b).$$

2. Les entiers n cherchés sont les entiers tels que $n \equiv 1 \pmod{2}$.

101. 3. $N^p = N$ pour tout entier $p \geq 1$. De même $R^p = R$ pour tout entier $p \geq 1$.

4. Par récurrence : $A^n = N + (1-a-b)^n R$.

5. On retrouve ce qui précède par le calcul :

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{pmatrix} Q.$$

$$102. 2. f_2 = 2 \begin{pmatrix} 1+1, & 2 \end{pmatrix}.$$

$$f_3 = 3 \begin{pmatrix} 1+1+1, & 2+1, & 1+2 \end{pmatrix}.$$

$$f_4 = 5.$$

$$f_5 = 8 \begin{pmatrix} 1+1+1+1+1, & 2+1+1+1, & 1+2+1+1, & 1+1+2+1, \\ & 1+1+1+2, & 2+2+1, & 2+1+2, & 1+2+2 \end{pmatrix}$$

$$3. b. \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 5-\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 5+\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

a. On vérifie que $PQ = I_2$.

b. $D = QAP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

c. Récurrence simple avec $A = PDQ$ et $QP = I_3$.

5. $f_n = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.

103 1. Mots de longueur 1 : a, b, c, d . D'où $p_1 = 3$ et $i_1 = 1$.

2. Mots de longueur 2 : $aa, ab, ac, ad, ba, ca, da, bb, bc, bd, cb, db, cc, cd, dc, dd$. D'où $p_2 = 10$ et $i_2 = 6$.

3. Les mots de longueur n avec une occurrence paire pour la lettre a sont constitués des mots de longueur $n-1$ avec une occurrence paire pour a prolongés de b, c ou d et des mots avec une occurrence impaire pour a prolongés par la lettre a , d'où $p_n = 3p_{n-1} + 1i_{n-1}$.

On justifie de même la relation $i_n = p_{n-1} + 3i_{n-1}$.

4. $\begin{pmatrix} p_n \\ i_n \end{pmatrix} = B^{n-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$.

5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. $Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. $D = QBP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c. $\begin{pmatrix} p_n \\ i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 2 \times 4^n \\ -2^n + 2 \times 4^n \end{pmatrix}$.

104 Soit q un réel non nul et distinct de 1 et soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}$.

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & q+1 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1+q+q^2 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix}$,

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1+q+q^2+q^3 \\ 0 & q^4 \end{pmatrix}$ et $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1+q+q^2+q^3+q^4 \\ 0 & q^5 \end{pmatrix}$.

2. Preuve par récurrence.

5. $PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1-q^n \\ 0 & q^n \end{pmatrix}$.

6. On retrouve le résultat sur la somme de termes en progression géométrique.

105 2. Un pavage de planche de longueur n peut débiter par un domino (deux choix) suivi d'un pavage de planche de longueur $n-2$ ou par un carré (un choix) suivi d'un pavage d'une planche de couleur $n-1$: $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$.

4. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $D = QAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & (-2) \times (-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^n + 2^n & 2 \times (-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ et $u_n = \frac{1}{3}((-1)^n + 2^{n+1})$.

106 Partie A

1. $16 = 2^4$.

2. a. Le système $a + b + c + d = 1$ et $8a + 4b + 2c + d = 2$ et $27a + 9b + 3c + d = 4$ et $64a + 16b + 4c + d = 8$ s'écrit :

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b. $f(5) = \frac{1}{6} \times 5^3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 5^2 + \frac{4}{3} \times 5 = 15$.

3. a. $g(x) = \frac{1}{24}x^4 + \left(-\frac{1}{4}\right)x^3 + \frac{23}{24}x^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)x + 1$.

b. $g(6) = 31$.

Partie B

2. Avec 4, 5, 6 points : 8, 16, 31 régions.

3. Une procédure de calcul n'est pas en soi « une logique »...

107 1. a. Probabilité d'atteindre 1 en deux pas :

$$0,6^2 = 0,36.$$

b. Probabilité de revenir au point 3 en deux pas :

$$2 \times 0,6 \times 0,4 = 0,48.$$

2. $R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$,

$R_2 = \begin{pmatrix} 0,36 & 0 & 0,48 & 0 & 0,16 \end{pmatrix}$.

b. $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} M$ où :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. $R_2 = R_1 M = R_0 M^2$ en utilisant un arbre par exemple.

d. $R_n = r_0 M^n$.

3. a. En un nombre impair de pas, il est impossible de se retrouver au point 3.

b. En un nombre pair de pas, l'ivrogne ne peut pas atteindre les points 2 et 4.

4. a. p_n est la probabilité d'atteindre le point 1 en n pas.

b. On peut par exemple utiliser $R_{2n+1} = R_{2n} M$ et l'emplacement des zéros dans R_{2n} (question 3. b.) et dans la colonne 1 de M .

108 1. La probabilité d'avoir écrit MATH à la quatrième frappe est $0,25^4$.

2. a. $B = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,25 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Détailler le produit et comparer avec les calculs faits avec un arbre de probabilité.

3. a. La probabilité d'écrire MATH avec les trois premières frappes est $0,25^3$. La probabilité de frapper M suivi de ATH est $0,25^4$. $0,25^3 + 0,25^4$ est la probabilité demandée.

b. Calcul de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^4$.

Prises d'initiatives

109 On peut chercher à résoudre $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La solution est unique si et seulement si a est non nul. La matrice est inversible si et seulement si a est non nul. On peut également chercher à exprimer x', y', z' en fonction de x, y, z où

x', y', z' sont tels que $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. On obtient :

$$A^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1-3a & a & 2a-1 \\ 6a-1 & -a & -4a+1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

110 Lorsqu'on effectue le produit d'une matrice ligne de n éléments par une matrice colonne de n éléments, on effectue n multiplications et $n-1$ additions. Pour obtenir les n^2 éléments de la matrice produit, on effectue donc n^3 multiplications et $n^2(n-1)$ additions.

111 On vérifie que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est également triangulaire supérieure. Par récurrence, on vérifie que les éléments diagonaux de la puissance n de A sont les puissances n des éléments diagonaux de A . D'où la valeur de $\det(A^n)$ en fonction des éléments diagonaux de A .

112 On vérifie facilement que cette trace est le double du nombre de routes.

113 L'élève trouvera la réponse dans le cours page 91.

114 L'élève trouvera facilement sur Internet de nombreuses références sur la méthode comme par exemple :

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/fethi_aloui/m_numeri/11syslin/11syslin.htm.

L'élève pourra également s'entraîner à cette technique : <http://wims.uvsq.fr/wims/wims.cgi?lang=fr&+module=local%2Falgebra%2Foefmatrices.fr>.

A Le programme

Il s'agit d'étudier des exemples de processus discrets, déterministes ou stochastiques, à l'aide de suites ou de matrices.

Exemples de problèmes	Contenus
<p>Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets.</p> <p>Marche aléatoire sur un tétraèdre ou sur un graphe à N sommets avec saut direct possible d'un sommet à un autre : à chaque instant, le mobile peut suivre les arêtes du graphe probabiliste ou aller directement sur n'importe quel sommet avec une probabilité constante p.</p> <p>Étude du principe du calcul de la pertinence d'une page Web.</p> <p>Modèle de diffusion d'Ehrenfest : N particules sont réparties dans deux récipients ; à chaque instant, une particule choisie au hasard change de récipient.</p> <p>Modèle proie prédateur discrétisé :</p> <ul style="list-style-type: none"> – évolution couplée de deux suites récurrentes ; – étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre. 	<ul style="list-style-type: none"> • Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$: <ul style="list-style-type: none"> – recherche d'une suite constante vérifiant la relation de récurrence ; – étude de la convergence. • Étude asymptotique d'une marche aléatoire.

B Notre point de vue

Ce chapitre traite des applications des suites et des matrices à la résolution de problèmes d'évolution. Nous avons partagé la partie « Cours » en deux parties, comme l'indique le programme : une partie consacrée à l'étude des suites de matrices colonnes de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$, et une autre partie consacrée aux marches aléatoires. Chacune de ces parties est précédée de nombreux problèmes, conformément au programme de spécialité.

Pour l'étude des suites de matrices colonnes indiquées dans le programme, nous avons choisi deux problèmes conduisant à une suite vérifiant la relation $U_{n+1} = AU_n$: l'étude de l'évolution d'une population de bactéries en milieu fermé, puis l'étude du célèbre problème de l'urne d'Ehrenfest. Le problème étudiant l'évolution d'une population de chamois dans un parc permet de précéder le cours sur les suites de matrices vérifiant $U_{n+1} = AU_n + B$. Dans tous ces problèmes, l'utilisation de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel permet de s'affranchir des lourds calculs.

La seconde partie du chapitre traite des marches aléatoires. Une introduction motivante à cette notion est la promenade aléatoire d'un surfeur sur le Web : c'est l'objet du premier problème, dans le cas d'un Web de quatre pages (afin de ne pas alourdir les calculs). On peut ainsi définir la notion de matrice de transition et découvrir l'état stable d'une marche aléatoire. Nous avons choisi la définition classique d'une matrice de transition, c'est-à-dire une matrice dont les éléments sont compris entre 0 et 1, et telle que la somme des éléments de chaque ligne est 1 : ceci entraîne que les états doivent être représentés par des matrices lignes. Nous avons aussi défini le graphe associé à une matrice de transition, et donc à une marche aléatoire, car c'est une manière bien commode de se représenter une marche aléatoire. Enfin, nous avons étudié de façon détaillée les marches aléatoires à deux états : celles-ci sont introduites par le problème « les émissions concurrentes ». Nous avons démontré dans le cas de deux états la propriété relative au comportement asymptotique ; dans le cas de N états, la propriété est énoncée, et sa démonstration (beaucoup plus difficile) est proposée dans l'exercice 90.

Les exercices comportent beaucoup d'applications à des problèmes concrets. Ils nécessitent la plupart du temps la calculatrice, et l'utilisation d'un logiciel de calcul formel ou d'un tableur est recommandée. Le premier TP, cité dans le

programme, permet d'étudier avec plusieurs outils différents un phénomène classique d'évolution : celui des proies et des prédateurs. Le second TP s'intéresse à un problème classique : en combien de temps peut-on avoir une collection complète ? Il permet d'étudier le problème du temps d'attente moyen, qui est repris dans les exercices 93 et 94.

Les notions abordées dans le chapitre 4

1. Suites de matrices vérifiant $U_{n+1} = AU_n + B$
2. Marches aléatoires

C Avant de commencer

Les notions abordées dans ces exercices permettent de travailler sur les suites et les probabilités conditionnelles, notions de la partie commune du programme forts utiles dans ce chapitre, et aussi sur le calcul matriciel, découvert dans le chapitre précédent. Voir livre page 142 et le site www.bordas-index.fr pour les corrections détaillées.

D Problèmes

Problème 1 Évolution de populations de bactéries

Ce problème étudie l'évolution de populations de bactéries à l'aide de suites. Le tableur permet de conjecturer une propriété remarquable de ces suites. L'étude de ce problème sous l'aspect matriciel permet de découvrir la limite d'une suite de matrices.

Fichiers associés sur le site www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

04_TSspe_probleme1.xlsx

et 04_TSspe_correctionprobleme1.xlsx (Excel 2007) ;

04_TSspe_probleme1.xls

et 04_TSspe_correctionprobleme1.xls (Excel 2003) ;

04_TSspe_probleme1.ods

et 04_TSspe_correctionprobleme1.ods (OpenOffice).

1. On saisit **50** en **B2**, puis la formule **=500-B\$2** dans la cellule **C2** : cette formule permettra de modifier les conditions initiales en modifiant uniquement la valeur de a_0 .

Puis, dans les cellules **B3** et **C3**, on entre les relations de récurrence données dans l'énoncé.

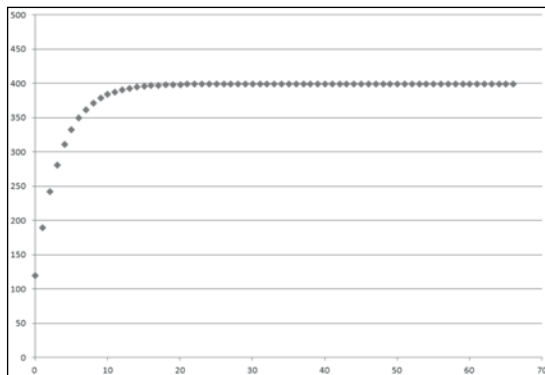
En **B3**, on saisit : **=0,95*B2+0,2*C2**.

En **C3**, on saisit : **=0,05*B2+0,8*C2**.

On recopie ensuite ces formules vers le bas.

On peut ensuite modifier la valeur de a_0 saisie en **B2**.

On constate que, quelles que soient les valeurs initiales a_0 et b_0 , les valeurs de a_n et de b_n se stabilisent au bout d'un certain nombre d'étapes autour de 400 (pour a_n) et 100 (pour b_n). On a représenté ci-après les valeurs de a_n en fonction de n .



2. a. $u_{n+1} = a_n + b_n = u_n$, donc (u_n) est constante.

$v_{n+1} = 0,75(a_n - 4b_n) = 0,75v_n$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b. L'effectif total de bactéries est 500, donc $a_0 + b_0 = 500$.

Ainsi : $u_n = a_0 + b_0 = 500$.

$v_n = 0,75^n(a_0 - 4b_0) = 5 \times 0,75^n(a_0 - 400)$.

c. On en déduit, après calculs :

$$a_n = \frac{4}{5}(a_0 + b_0) - \frac{1}{5} \times 0,75^n(a_0 - 4b_0)$$

soit : $a_n = 400 - 0,75^n(a_0 - 400)$.

$$b_n = \frac{1}{5}(a_0 + b_0) + \frac{1}{5} \times 0,75^n(a_0 - 4b_0),$$

soit : $b_n = 100 + 0,75^n(a_0 - 400)$.

d. La suite (a_n) a pour limite 400 et la suite (b_n) a pour limite 100.

On retrouve les conjectures faites avec le tableur.

3. a. $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}$.

b. On montre par récurrence que $U_n = A^n \times U_0$.

D'après la question 2. c., on a :

$$a_n = \frac{1}{5} (4 - 0,75^n) a_0 + \frac{4}{5} (1 + 0,75^n) b_0$$

$$b_n = \frac{1}{5} (1 + 0,75^n) a_0 + \frac{1}{5} (1 - 4 \times 0,75^n) b_0$$

D'où la matrice A^n :

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 - 0,75^n & 4 + 4 \times 0,75^n \\ 1 + 0,75^n & 1 - 4 \times 0,75^n \end{pmatrix}.$$

c. La limite de la suite de matrices (U_n) est la matrice $\begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Problème 2 Reproduction des chamois dans un parc

Ce problème, qui traite de la répartition d'une population de chamois dans un parc, est l'occasion de travailler avec une suite de matrices (U_n) vérifiant une relation de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$. L'étude asymptotique de cette suite permet de conclure sur l'équilibre des jeunes et des vieux chamois dans cette population.

1. a. $u_1 = 0,5 \times 400 + 2 \times 100 - 0,25 \times 400 + 20 = 320$.

$$v_1 = 0,5 \times 400 + 0,25 \times 100 = 225.$$

b. $u_{n+1} = 0,5u_n - 0,25u_n + 2v_n + 20$, soit :

$$u_{n+1} = 0,25u_n + 2v_n + 20.$$

$$v_{n+1} = 0,5u_n + 0,25v_n.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. a. I_2 - A \text{ est inversible car } I_2 - A = \begin{pmatrix} 0,75 & -2 \\ -0,5 & 0,75 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } 0,75 \times 0,75 - 2 \times 0,5 \neq 0.$$

$$\text{Son inverse est : } (I_2 - A)^{-1} = -\frac{4}{7} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$b. C = AC + B \Leftrightarrow (I_2 - A)C = B.$$

$$C \text{ existe car } I_2 - A \text{ est inversible et } C = (I_2 - A)^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -\frac{240}{7} \\ -\frac{160}{7} \end{pmatrix}.$$

$$4. V_{n+1} = U_{n+1} - C = A \times U_n + B - C \\ = A \times U_n + C - AC - C = A \times (U_n - C) \\ = A \times V_n.$$

$$5. P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

$$6. A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}\right)^n & \left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(-\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4}\right)^n - \frac{1}{4} \left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

$$7. a. V_n = A^n V_0, \text{ avec } V_0 = \begin{pmatrix} \frac{3040}{7} \\ \frac{860}{7} \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où : } V_n = \begin{pmatrix} 340 \left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{660}{7} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \\ 170 \left(\frac{5}{4}\right)^n - \frac{330}{7} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

$$b. U_n = V_n + C = \begin{pmatrix} 340 \left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{660}{7} \left(-\frac{3}{4}\right)^n - \frac{240}{7} \\ 170 \left(\frac{5}{4}\right)^n - \frac{330}{7} \left(-\frac{3}{4}\right)^n - \frac{160}{7} \end{pmatrix}.$$

$$c. u_n = 340 \left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{660}{7} \left(-\frac{3}{4}\right)^n - \frac{240}{7} \text{ et}$$

$$v_n = 170 \left(\frac{5}{4}\right)^n - \frac{330}{7} \left(-\frac{3}{4}\right)^n - \frac{160}{7}.$$

8. a. Les suites (u_n) et (v_n) ont pour limite $+\infty$.

$$b. \frac{u_n}{v_n} = \frac{340 + \frac{660}{7} \left(-\frac{3}{5}\right)^n - \frac{240}{7} \left(\frac{4}{5}\right)^n}{170 - \frac{330}{7} \left(-\frac{3}{5}\right)^n - \frac{160}{7} \left(\frac{4}{5}\right)^n}.$$

Donc la suite (w_n) a pour limite $\frac{340}{170} = 2$.

Au bout d'un grand nombre d'années, la population se stabilise avec deux fois plus de jeunes chamois que de vieux chamois.

Problème 3 L'urne d'Ehrenfest

Ce problème célèbre est d'abord étudié à l'aide du tableur : on peut faire varier le nombre initial de boules dans l'urne A, et en particulier étudier les cas $N = 2$ et $N = 4$ dont l'étude théorique est faite ensuite. Cette étude théorique est l'occasion d'introduire des suites de matrices de la forme $X_{n+1} = AX_n$.

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

04_TSspe_probleme3.xlsx et

04_TSspe_correctionprobleme3.xlsx (Excel 2007) ;

04_TSspe_probleme3.xls

et 04_TSspe_correctionprobleme3.xls (Excel 2003) ;

04_TSspe_probleme3.ods

et 04_TSspe_correctionprobleme3.ods (OpenOffice) ;

04_TSspe_probleme3.xws

et 04_TSspe_correctionprobleme3.xws (Xcas).

Partie A

Utiliser l'onglet « 500 tirages » de la feuille de calcul du tableur.

2. On génère les numéros des étapes dans la colonne C en entrant la valeur 0 en C2, puis la formule $=C2+1$ dans la cellule C3. On recopie vers le bas jusqu'en C502.

3. Pour générer l'état initial du système, on saisit la formule $=A2$ dans la cellule D2 et 0 dans la cellule E2.

4. On saisit en D3 la formule :

$$=SI(ALEA()<D2/A2;D2-1;D2+1).$$

ALEA() permet de générer un nombre au hasard de $[0 ; 1[$: si ce nombre est inférieur à $\frac{N_k}{N}$, alors l'urne A perd une boule, donc D3 est égal à D2 - 1, sinon A gagne une boule, donc D3 est égal à D2 + 1.

Puisque le nombre de boules total entre les deux urnes reste égal à N, on saisit en E3 la formule $=\$A\$2-D3$ (les références absolues pour A2 vont permettre la recopie vers le bas de cette formule, puisque le nombre de boules total doit rester fixe).

5. On peut alors faire varier N. On peut aussi, à l'aide de la touche F9, lancer d'autres simulations pour une valeur donnée de N.

La représentation graphique du nombre de boules de l'urne A en fonction du temps (des étapes en fait) s'affiche automatiquement dans le fichier tableur de l'élève.

Partie B

Correctif : Dans la matrice ligne E_n , des parenthèses ont été mal placées, il faut lire : « Soit E_n la matrice $(P(X_n=0) P(X_n=1) P(X_n=2))$. »

$$1. E_1 = (0 \ 1 \ 0); E_2 = \left(\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2} \right).$$

$$E_3 = (0 \ 1 \ 0); E_4 = \left(\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2} \right)$$

$$2. E_{2p} = \left(\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2} \right); E_{2p+1} = (0 \ 1 \ 0).$$

Le nombre de molécules ne se stabilise pas dans les urnes. En particulier, aux instants de rang impair, il y a toujours la répartition 1 – 1, et ce n'est pas le cas aux instants de rang pair.

Partie C

Correctif : Dans la matrice ligne E_n , des parenthèses ont été mal placées, il faut lire :

« Soit E_n la matrice $(P(X_n=0) P(X_n=1) P(X_n=2) P(X_n=3) P(X_n=4))$. »

$$1. P(X_1=0)=0; P(X_1=1)=0; P(X_1=2)=0; P(X_1=3)=1; P(X_1=4)=0.$$

$$2. P(X_2=0)=0; P(X_2=1)=0; P(X_2=2)=\frac{3}{4}; P(X_2=3)=0; P(X_2=4)=\frac{1}{4}.$$

$$3. a. P(X_{n+1}=0)=\frac{1}{4} P(X_n=1).$$

$$b. P(X_{n+1}=1)=P(X_n=0)+\frac{1}{2} P(X_n=2).$$

$$P(X_{n+1}=2)=\frac{3}{4} P(X_n=1)+\frac{3}{4} P(X_n=3).$$

$$P(X_{n+1}=3)=\frac{1}{2} P(X_n=2)+P(X_n=4)$$

$$P(X_{n+1}=4)=\frac{1}{4} P(X_n=3).$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a : $E_n = E_0 \times A^n$.

5. Avec le logiciel Xcas, on saisit la matrice A de la façon suivante :

$$A := [[0, 1, 0, 0, 0], [1/4, 0, 3/4, 0, 0], [0, 1/2, 0, 1/2, 0], [0, 0, 3/4, 0, 1/4], [0, 0, 0, 1, 0]]$$

On saisit aussi la matrice E comme suit :

$$E := [[0, 0, 0, 0, 1]]$$

On calcule ensuite E_3 par la formule :

$$E3 := E * A^3$$

On opère de même pour E_{10} et E_{50} .

Pour obtenir des valeurs approchées des coefficients de ces matrices, on peut utiliser la fonction **evalf** de Xcas. **evalf(E50)** donne une valeur approchée des coefficients de la matrice E_{50} , avec un nombre de chiffres significatifs qui peut être réglé dans l'onglet **Cfg** du logiciel, puis **Configuration du CAS** : on entre alors le nombre de chiffres significatifs voulu dans **Flottants**. On peut aussi préciser un nombre n de décimales directement au clavier, en saisissant **evalf(E50,n)**.

Ainsi :

$$E_3 = \left(0 \ \frac{3}{8} \ 0 \ \frac{5}{8} \ 0 \right).$$

$$E_{10} = \left(\frac{255}{2048} \ 0 \ \frac{3}{4} \ 0 \ \frac{257}{2048} \right), \text{ et une valeur approchée est : } (0,1245 \ 0 \ 0,75 \ 0 \ 0,1255).$$

$$E_{50} \approx (0,125 \ 0 \ 0,75 \ 0 \ 0,125).$$

6. a. Correctif : Il faut lire :

$$« E_n = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2^{n+1}} \ 0 \ \frac{3}{4} \ 0 \ \frac{1}{8} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) »$$

$$\text{et non pas } E_n = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2^{n+1}} \ 0 \ \frac{3}{4} \ \frac{1}{8} \ \frac{1}{2^{n+1}} \right).$$

Avec $n = 2p$, on écrit la propriété dépendant de l'entier p non nul à démontrer :

$$E_{2p} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2^{2p+1}} \ 0 \ \frac{3}{4} \ 0 \ \frac{1}{8} + \frac{1}{2^{2p+1}} \right).$$

Cette propriété est vraie pour $p = 1$, car $E_2 = \left(0 \ 0 \ \frac{3}{4} \ 0 \ \frac{1}{4} \right)$.

On suppose la propriété vraie pour un entier p non nul.

On calcule alors E_{2p+1} :

$$E_{2p+1} = \left(0 \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2p+1}} \ 0 \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2p+1}} \ 0 \right).$$

Puis on en déduit E_{2p+2} :

$$E_{2p+2} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2^{2p+3}} \ 0 \ \frac{3}{4} \ 0 \ \frac{1}{8} + \frac{1}{2^{2p+3}} \right),$$

ce qui assure que la propriété est vraie au rang $p + 1$.

Le raisonnement précédent permet alors d'obtenir la formule pour n impair, c'est-à-dire $n = 2p + 1$.

b. La suite de matrices (E_n) ne semble pas avoir de limite en $+\infty$, car les termes de rang pair et impair semblent tous deux converger vers des limites différentes : $\left(\frac{1}{8} \ 0 \ \frac{3}{4} \ \frac{1}{8} \right)$ pour les

termes de rang pair et $\left(0 \ \frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2} \ 0 \right)$ pour les termes de rang impair.

7. Pour n pair :

$$E(X_n) = 0 + 0 + 2 \times \frac{3}{4} + 0 + 4 \times \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

$$\text{soit } E(X_n) = 2 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On trouve pareil pour n impair.

On constate que la suite $(E(X_n))$ a pour limite 2 : il n'y a pas de limite pour l'état de l'urne, mais il y en a une pour la composition moyenne de l'urne.

Problème 4 Un Web en miniature

Ce problème expose le fonctionnement de l'algorithme « PageRank » utilisé par Google, pour un Web miniature de quatre pages, afin de pouvoir effectuer tous les calculs (et ces calculs sont déjà lourds avec 4 pages !). La partie A propose une version simplifiée de l'algorithme, et la partie B permet d'aborder l'algorithme dans sa généralité. Cette promenade aléatoire sur ce Web en miniature est l'occasion d'une première prise de contact avec les marches aléatoires, et de découvrir l'état stationnaire d'une marche aléatoire.

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

04_TSspe_probleme4_A2.xws

et 04_TSspe_probleme4_B3.xws (Xcas).

Partie A

1. a. $P(X_1 = 1) = 0$; $P(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$;

$P(X_1 = 3) = \frac{1}{3}$; $P(X_1 = 4) = \frac{1}{3}$.

b. $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$; $P(X_2 = 2) = \frac{1}{3}$;

$P(X_2 = 3) = 0$; $P(X_2 = 4) = \frac{1}{6}$.

2. a. D'après la formule des probabilités totales (ou avec un arbre de probabilités), on obtient :

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 2) + \frac{1}{2} P(X_n = 3).$$

b. $P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3} P(X_n = 1) + P(X_n = 4).$

$P(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{3} P(X_n = 1).$

$P(X_{n+1} = 4) = \frac{1}{3} P(X_n = 1) + \frac{1}{2} P(X_n = 3).$

c. $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

d. Avec le logiciel Xcas, on saisit la matrice A de la façon suivante :

$$A := [[0, 1/2, 0], [1/3, 0, 0, 1], [1/3, 0, 0, 0], [1/3, 0, 1/2, 0]].$$

Pour arrondir les coefficients d'une matrice M à 10^{-3} près, on saisit : **evalf(M,3)**.

En arrondissant à 10^{-3} près, on obtient :

$$A^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,375 & 0,312 & 0,125 & 0,187 \\ 0,375 & 0,313 & 0,125 & 0,188 \\ 0,375 & 0,313 & 0,125 & 0,188 \\ 0,375 & 0,312 & 0,125 & 0,187 \end{pmatrix}.$$

Puisque $U_{20} = U_0 \times A^{20}$, on peut déterminer U_{20} selon si le surfeur part de P_1 , P_2 , P_3 ou P_4 :

$P_1 : E_{20} \approx (0,375 \ 0,312 \ 0,125 \ 0,187)$

$P_2 : E_{20} \approx (0,375 \ 0,313 \ 0,125 \ 0,188)$

$P_3 : E_{20} \approx (0,375 \ 0,313 \ 0,125 \ 0,188)$

$P_4 : E_{20} \approx (0,375 \ 0,312 \ 0,125 \ 0,187)$

On se rend compte que le point de départ n'a pratiquement aucune influence sur la position du surfeur après 20 clics.

e. $A^{10} \approx \begin{pmatrix} 0,378 & 0,311 & 0,123 & 0,187 \\ 0,370 & 0,315 & 0,127 & 0,188 \\ 0,366 & 0,315 & 0,131 & 0,189 \\ 0,382 & 0,310 & 0,120 & 0,188 \end{pmatrix}$

$A^{80} \approx \begin{pmatrix} 0,375 & 0,313 & 0,125 & 0,188 \\ 0,375 & 0,313 & 0,125 & 0,188 \\ 0,375 & 0,313 & 0,125 & 0,188 \\ 0,375 & 0,312 & 0,125 & 0,188 \end{pmatrix}$

On peut conjecturer que, quel que soit le point de départ, le surfeur a 37,5 % de chance de se trouver en P_1 , 31,3 % de chance de se trouver en P_2 , 12,5 % de chance de se trouver en P_3 et 18,8 % de chance de se trouver en P_4 , après un grand nombre de clics.

La matrice ligne des probabilités à l'étape 80 est :
(0,375 0,313 0,125 0,188).

f. On résout :
$$\begin{cases} y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{3}x + t = y \\ \frac{1}{3}x = z \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}z = t \end{cases}$$

ce qui donne $x = 2t$, $y = \frac{5}{3}t$ et $z = \frac{2}{3}t$, c'est-à-dire la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 2t & \frac{5}{3}t & \frac{2}{3}t & t \end{pmatrix}.$$

Puisque X est formée de probabilités dont la somme est 1 :

$$2t + \frac{5}{3}t + \frac{2}{3}t + t = 1, \text{ soit } t = \frac{3}{16}.$$

D'où $X = \left(\frac{3}{8} \ \frac{5}{16} \ \frac{1}{8} \ \frac{3}{16} \right)$: c'est le régime stationnaire (ou l'état stable) de cette promenade aléatoire sur le Web.

Correctif : il faut lire « La matrice solution dont la somme des éléments est 1 s'appelle le régime stationnaire. ».

Partie B

1. Au bout d'un certain nombre d'étapes, le surfeur va se trouver en P_5 , d'où il ne pourra plus s'échapper !

2. Pour $c = 0$: $A' = B$: toutes les pages ont des liens entre elles et le surfeur clique au hasard sur l'une d'elles.

Pour $c = 1$: $A' = A$: le surfeur peut être « bloqué » sur une page comme à la question 1.

3. a. La nouvelle matrice A' est égale à $0,85A + 0,15B$.

B est une matrice 4×4 ne comprenant que des coefficients 0,2 : on peut la définir avec la commande **makemat** de la façon

suivante : **B:=makemat(0,2,4,4)**

On obtient ainsi A' avec la formule :

$$A1 := 0.85 * A + 0.15 * makemat(0.2, 4, 4),$$

où A est la matrice saisie dans la partie A.

On obtient : $A' = \begin{pmatrix} \frac{3}{80} & \frac{77}{240} & \frac{77}{240} & \frac{77}{240} \\ \frac{71}{80} & \frac{3}{80} & \frac{3}{80} & \frac{3}{80} \\ \frac{37}{80} & \frac{3}{80} & \frac{3}{80} & \frac{37}{80} \\ \frac{3}{80} & \frac{71}{80} & \frac{3}{80} & \frac{3}{80} \end{pmatrix}$

b. $A'^{10} \approx \begin{pmatrix} 0,358 & 0,306 & 0,138 & 0,198 \\ 0,356 & 0,307 & 0,139 & 0,198 \\ 0,355 & 0,307 & 0,140 & 0,198 \\ 0,358 & 0,306 & 0,138 & 0,198 \end{pmatrix}$

$A'^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,357 & 0,307 & 0,139 & 0,198 \\ 0,357 & 0,307 & 0,139 & 0,198 \\ 0,357 & 0,307 & 0,139 & 0,198 \\ 0,357 & 0,307 & 0,139 & 0,198 \end{pmatrix}$

$A'^{80} \approx \begin{pmatrix} 0,357 & 0,307 & 0,139 & 0,198 \\ 0,357 & 0,307 & 0,139 & 0,198 \\ 0,357 & 0,307 & 0,139 & 0,198 \\ 0,357 & 0,307 & 0,139 & 0,198 \end{pmatrix}$

On peut ainsi conjecturer que le nouvel état stationnaire est donné par la matrice ligne (0,357 0,307 0,139 0,198), à 10^{-3} près.

Remarque : la solution exacte est :

$$\begin{pmatrix} 158\,619 & 136\,213 & 15\,400 & 21\,945 \\ 444\,212 & 444\,212 & 111\,053 & 111\,053 \end{pmatrix}.$$

Problème 5 Les émissions concurrentes

Ce problème traite d'une marche aléatoire à deux états : il peut permettre d'introduire le cours sur l'étude asymptotique des marches aléatoires. On découvre que la convergence n'est pas liée aux conditions initiales.

1. a. $a_0 = 0,7$ et $X_0 = (0,7 \ 0,3)$.

b. $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,10b_n$ et $b_{n+1} = 0,15a_n + 0,90b_n$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,10 & 0,90 \end{pmatrix}$: la somme des éléments de chaque ligne

de la matrice A est égale à 1.

3. a. $A^2 = \begin{pmatrix} 0,7375 & 0,2625 \\ 0,175 & 0,825 \end{pmatrix}$.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0,6531 & 0,3469 \\ 0,2313 & 0,7688 \end{pmatrix}.$$

$$X_2 = (0,5687 \ 0,4313) ; X_3 = (0,5266 \ 0,4734).$$

b. La proportion de spectateurs regardant la chaîne A au bout de 3 semaines est environ 52,7 %.

4. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ -0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,75 \end{pmatrix}$.

5. $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,75^n \end{pmatrix}$ et $A^n = PD^nP^{-1}$, soit :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,6 \times 0,75^n + 0,4 & -0,6 \times 0,75^n + 0,6 \\ -0,4 \times 0,75^n + 0,4 & 0,4 \times 0,75^n + 0,6 \end{pmatrix}.$$

6. a. $X_n = X_0 \times A^n = (a_0 \ b_0) \times A^n$.

$$X_n = ((0,6a_0 - 0,4b_0)0,75^n + 0,4 \ (-0,6a_0 + 0,4b_0)0,75^n + 0,6).$$

b. Quand n tend vers $+\infty$, (X_n) a pour limite $(0,4 \ 0,6)$: celle-ci est bien indépendante des proportions initiales.

Problème 6 Une sauterelle dans une cage tétraédrique

Dans ce problème, on s'intéresse à la promenade aléatoire d'une sauterelle dans une cage, puis on s'intéresse au comportement asymptotique de cette marche aléatoire à quatre états.

Fichier associé sur le site www.bordas-index.fr et sur le manuel numérique premium :

04_TSspe_probleme6.xws (Xcas).

1. La probabilité que la sauterelle soit en B après une minute est $\frac{1}{3}$.

Au bout de deux minutes, pour être en B, elle peut être passée par C ou D. La formule des probabilités totales donne :

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{36}.$$

2. a. $P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(B_n) + \frac{1}{3}P(C_n) + \frac{1}{3}P(D_n)$.

b. $P(B_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{2}{3}P(C_n) + \frac{1}{4}P(D_n)$.

$$P(C_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{4}P(D_n).$$

$$P(D_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n).$$

3. $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

4. À 10^{-2} près, on trouve :

$$M^2 \approx \begin{pmatrix} 0,44 & 0,31 & 0,08 & 0,17 \\ 0,25 & 0,29 & 0,29 & 0,17 \\ 0,33 & 0,11 & 0,11 & 0,44 \\ 0,21 & 0,33 & 0,17 & 0,29 \end{pmatrix}.$$

À 10^{-4} près, on a :

$$M^{10} \approx \begin{pmatrix} 0,3151 & 0,2763 & 0,1657 & 0,2429 \\ 0,3149 & 0,2761 & 0,1659 & 0,2431 \\ 0,3149 & 0,2762 & 0,1656 & 0,2433 \\ 0,3147 & 0,2763 & 0,1658 & 0,2432 \end{pmatrix}.$$

$$M^{60} \approx \begin{pmatrix} 0,3149 & 0,2762 & 0,1657 & 0,2431 \\ 0,3149 & 0,2762 & 0,1657 & 0,2431 \\ 0,3149 & 0,2762 & 0,1657 & 0,2431 \\ 0,3149 & 0,2762 & 0,1657 & 0,2431 \end{pmatrix}.$$

5. La probabilité que la sauterelle soit en A au bout de 10 minutes est, à 10^{-4} près : 0,3151.

La probabilité que la sauterelle soit en A au bout d'une heure est, à 10^{-4} près : 0,3149.

6. Les probabilités de se trouver en A, B, C ou D se stabilisent, et ceci quel que soit le point de départ de la sauterelle.

7. $X = XM \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}t = x \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z + \frac{1}{4}t = y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}t = z \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{57}{44}t \text{ et } y = \frac{25}{22}t \text{ et } z = \frac{15}{22}t.$$

Puisque $x + y + z + t = 1$, on en déduit :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{57}{181} & \frac{50}{181} & \frac{30}{181} & \frac{44}{181} \end{pmatrix}.$$

POUR DÉMARRER

1. $X_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $X_{20} = \begin{pmatrix} 396 \\ 161 \end{pmatrix}$.

2. La suite (X_n) converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. 1. $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. $X_n = X_0 + nB = \begin{pmatrix} 2n \\ n+1 \end{pmatrix}$.

3. La suite (X_n) n'est pas convergente.

4. 1. $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

2. $X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $X_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$.

3. La suite (X_n) converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. $X_n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0,5^n \\ 1 \end{pmatrix}$.

La suite (X_n) converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. 1. On procède par récurrence.

2. $X_n = A^n \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{n-2}} - 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La suite (X_n) converge vers la matrice $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7. Voir livre p. 142.

8. 1. $c_{n+1} = -3$ et on a bien : $-3 = 2 \times (-3) + 3$.

2. $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 6 = 2v_n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2.

Alors : $v_n = 3 \times 2^n$, et $u_n = 3 \times 2^n - 3$.

9. Voir livre p. 142.

10. 1. On résout : $c = \frac{1}{4}c - 3$, soit $c = -4$.

La suite (t_n) telle que $t_n = -4$ est solution.

2. $v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{1}{4}u_n + 1 = \frac{1}{4}(u_n + 4) = \frac{1}{4}v_n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Alors : $v_n = 6 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$, et $u_n = 6 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 4$.

3. La suite (u_n) converge vers -4 .

11. 1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

donc la suite (C_n) vérifie la relation donnée.

2. $X_n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2^n} \\ 3 - \frac{2}{3^n} \end{pmatrix}$.

3. La suite (X_n) converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

12. 1. $C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 1,25 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a utilisé l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1,25 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. $X_n = C + A^n(X_0 - C)$, avec $A^n = \begin{pmatrix} 0,2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

et $X_0 - C = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $X_n = \begin{pmatrix} 1,25 + 0,75 \times 0,2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$.

La suite (X_n) n'est pas convergente, car la suite de terme général 2^n n'est pas convergente.

13. On cherche d'abord la matrice C telle que :

$$C = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci équivaut à :

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

On en déduit : $X_n = A^n(X_0 - C) + C$.

Puisque $A^n = \begin{pmatrix} 0,25^n & 0 \\ 0 & 0,4^n \end{pmatrix}$, on trouve :

$$X_n = \begin{pmatrix} 0,25^n & 0 \\ 0 & 0,4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la suite (X_n) converge vers $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

14. 1. Correctif : la matrice C est égale à $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et non $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $C = A \times C + B$.

2. a. $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. N^2 est la matrice nulle.

D'où : $D^2 = I_2 + 2N$; $D^3 = I_2 + 3N$; $D^4 = I_2 + 4N$.

c. On conjecture alors que : $D^n = I_2 + nN$, pour n entier au moins égal à 1 ; on le démontre ensuite par récurrence.

Ainsi : $D^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^n = 2^n D^n = \begin{pmatrix} 2^n & n 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

3. Puisque $X_n = A^n (X_0 - C) + C$, avec $X_0 - C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, on en déduit que la suite (X_n) n'est pas convergente. En effet, 2^n et $n2^n$ ont pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

15 $a = 0,75$; $b = 0,6$.

16 1. La probabilité est 0,9.

2. La probabilité est 0,6.

18 Voir livre p. 142.

19 $M^2 = \begin{pmatrix} 0,28 & 0,72 \\ 0,24 & 0,76 \end{pmatrix}$, donc la probabilité de retour à l'état initial après deux étapes est donnée par $M^2 \times E_0$: on trouve 0,28.

20 $a = 0,3$; $b = 0,1$; $c = 0,2$.

21 1. La probabilité est 0,1.

2. La probabilité est 0,3.

22 La matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

23 1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$

2. $M^2 = \begin{pmatrix} 0,24 & 0,44 & 0,32 \\ 0,08 & 0,60 & 0,32 \\ 0,32 & 0,32 & 0,36 \end{pmatrix}.$

0,24 représente la probabilité de passage de l'état 1 à l'état 1 en deux étapes.

0,44 représente la probabilité de passage de l'état 1 à l'état 2 en deux étapes.

0,32 représente la probabilité de passage de l'état 1 à l'état 3 en deux étapes.

24 1. La matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $M^3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{7}{27} & \frac{13}{54} & \frac{5}{18} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} & \frac{5}{18} & \frac{13}{54} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} & \frac{5}{27} \end{pmatrix}.$

La probabilité que la puce revienne en A au bout de trois sauts est $\frac{2}{9}$.

25 Voir livre p. 143.

26 1. M^n est égal, soit à M , soit à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, si l'état initial est l'état A, alors l'état suivant est l'état B, puis alternativement A et B; de même si l'état initial est l'état B.

2. Il n'y a pas d'état stable, car les états sont alternativement A et B.

27 1. La matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}.$

2. M ne possède aucun zéro, donc il y a un état stable (x, y) , qui vérifie : $(x, y) \times M = (x, y)$, avec $x + y = 1$.

D'où : $\begin{cases} 0,5x + 0,25y = x \\ 0,5x + 0,75y = y \end{cases}$, soit $y = 2x$.

Puisque $x + y = 1$, alors $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$.

L'état stable est $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

28 1. $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}.$

2. $M^2 = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,25 & 0,40 \\ 0,74 & 0,26 & 0 \\ 0,44 & 0,40 & 0,16 \end{pmatrix}$: puisque M^2 ne comporte pas de

zéro, il existe un état stable (x, y, z) , avec $x + y + z = 1$, tel que :

$$\begin{cases} 0,5x + 0,2y + 0,8z = x \\ 0,5x + 0,2z = y \\ 0,8y = z \end{cases}$$

soit $z = 1,25y$ et $x = 1,68y$.

D'où : $3,48y = 1$ et $z = \frac{20}{87}$.

D'où l'état stable : $\left(\frac{42}{87}, \frac{25}{87}, \frac{20}{87}\right)$.

POUR S'ENTRAÎNER

29 1. On le montre par récurrence.

2. $U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 \\ 2^n - 1 \end{pmatrix}.$

3. La suite (U_n) n'est pas convergente.

30 1. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$

2. $D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$. On en déduit :

$$A^n = P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2^n} - \frac{2}{2^{2n}} & -\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^{2n}} \\ \frac{3}{2^n} - \frac{3}{2^{2n}} & -\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{3}{2^{2n}} \end{pmatrix}.$$

3. $V_n = A^n V_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{2n-1}} \\ \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{3}{2^{2n}} \end{pmatrix}.$

4. La suite (V_n) converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

31 Voir livre p. 143.

32 1. On a : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 8b_n \\ b_{n+1} = 0,25a_n \end{cases}$ avec $a_0 = 20$ et $b_0 = 0$.

D'où : $X_{n+1} = A X_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}.$

2. $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

3. $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^n & 8 \times 2^n - 8 \times (-1)^{n+1} \\ 2^{n-2} - 0,25 \times (-1)^n & 2^n + 2 \times (-1)^n \end{pmatrix}$$

4. a. $X^n = A^n X_0$, d'où :

$$a_n = \frac{20}{3} (2^{n+1} + (-1)^n) = \frac{5}{3} (8 \times 2^n + 4 \times (-1)^n);$$

$$b_n = \frac{20}{3} (2^{n-2} - 0,25 \times (-1)^n) = \frac{5}{3} (2^n - (-1)^n).$$

$$\text{b. Ainsi : } c_n = a_n + b_n = \frac{5}{3} (9 \times 2^n + 3 \times (-1)^n),$$

$$\text{et } c_n = 15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n.$$

5. Les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) ont pour limite $+\infty$.

6. $\frac{a_n}{c_n} = \frac{8 \times 2^n + 4 \times (-1)^n}{9 \times 2^n + 3 \times (-1)^n}$ a pour limite $\frac{8}{9}$, en factorisant le numérateur et dénominateur par 2^n .

$\frac{b_n}{c_n} = \frac{2^n - (-1)^n}{9 \times 2^n + 3 \times (-1)^n}$ a pour limite $\frac{1}{9}$, en factorisant le numérateur et le dénominateur par 2^n .

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{15 \times 2^{n+1} + 5 \times (-1)^{n+1}}{15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n} \text{ a pour limite } 2.$$

Interprétation : à longue échéance, la proportion de souris juvéniles tend à se stabiliser autour de $\frac{8}{9}$, celle de souris adultes autour de $\frac{1}{9}$, et la population totale de souris tend à doubler chaque année.

33 1. $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

2. On fait un raisonnement par récurrence.

$$3. X_n = A^n X_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + \frac{a}{3^n} + b - \frac{b}{3^n} \\ a - \frac{a}{3^n} + b + \frac{b}{3^n} \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{cases} u_n = \frac{1}{2} \left(a + b + \frac{a-b}{3^n} \right) \\ v_n = \frac{1}{2} \left(a + b + \frac{b-a}{3^n} \right) \end{cases}$$

5. (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers $\frac{a+b}{2}$.

34 1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ -1 & 7 & -4 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$

$$2. P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3. D^n = \begin{pmatrix} 12^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

4. Puisque $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_n = A^n X_0$, il suffit de calculer la seconde colonne de la matrice A^n pour obtenir X_0 .

$$5. \text{ La seconde colonne de } A^n \text{ donne : } X_n = \begin{pmatrix} \frac{2^n - 12^n}{2} \\ \frac{2^n + 12^n}{2} \\ \frac{2^n - 12^n}{2} \end{pmatrix}.$$

6. La suite (X_n) n'est pas convergente.

35 1. $x(t+1) = 0,4 y(t)$ car le nombre d'oiseaux de plus d'un an à la date t est $y(t)$, donc le nombre de femelles de plus d'un an à la date t est $\frac{y(t)}{2}$, et ainsi le nombre d'œufs pondus

pendant l'année est $\frac{80}{100} \times \frac{y(t)}{2} = 0,4 y(t)$.

$$2. A = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

$$3. P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & -0,2 \end{pmatrix}.$$

$$4. D^t = \begin{pmatrix} 0,6^t & 0 \\ 0 & (-0,2)^t \end{pmatrix}.$$

$$A^t = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 \times 0,6^t + 6 \times (-0,2)^t & 4 \times 0,6^t - 4 \times (-0,2)^t \\ 3 \times 0,6^t - 3 \times (-0,2)^t & 6 \times 0,6^t + 2 \times (-0,2)^t \end{pmatrix}.$$

$$5. \text{ a. } N(t) = A^t N(0) = A^t \times \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$x(t) = 250 \times 0,6^t - 50 \times (-0,2)^t \text{ et } y(t) = 375 \times 0,6^t + 25 \times (-0,2)^t.$$

La suite de matrices $(N(t))_{t \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. Cette population d'oiseaux va s'éteindre.

36 1. a. $P(R_1) = \frac{1}{2} (a + b) = a - 0,25.$

$$P(R_2) = \frac{1}{2} (1 - a + 1 - b) = \frac{1}{2} (2 - a - b) = 1,25 - a.$$

$$\text{b. } P(R_{n+1}) = a \times P(R_n) + b \times P(N_n).$$

$$P(N_{n+1}) = (1 - a) P(R_n) + (1 - b) P(N_n).$$

$$\text{D'où la matrice : } A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix}.$$

2. a. On calcule $P \times Q$, et en utilisant le fait que $2a - 2b = 1$, on obtient I_2 , ce qui prouve que $Q^{-1} = P$ (et aussi $P^{-1} = Q$).

$$\text{b. } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c. } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{pmatrix}.$$

$A^n = P D^n P^{-1}$, soit :

$$A^n = 2 \begin{pmatrix} b - (a-1)0,5^n & (1-0,5^n)b \\ (1-a)(1-0,5^n) & 1-a+0,5^n b \end{pmatrix}.$$

3. a. $X_n = A^{n-1} X_1$, soit :

$$X_n = \begin{pmatrix} 2b - 0,5^n a \\ 2 - 2a + (a+b-1)0,5^n \end{pmatrix},$$

ou encore :

$$X_n = \begin{pmatrix} 2a - 1 - 0,5^n a \\ 2 - 2a + (2a - 1,5)0,5^n \end{pmatrix}.$$

b. La suite (X_n) converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 2a-1 \\ 2-2a \end{pmatrix}$.

c. Au bout d'un grand nombre de tirages, la probabilité d'avoir une boule rouge est environ $2a - 1$, et celle d'avoir une boule noire est environ $2 - 2a$.

37 C'est faux : si $A = I_2$, alors $A^n = A$ et (X_n) converge vers X_0 , qui n'est pas en général la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

38 C'est vrai : la suite (X_n) prend alternativement les valeurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

39 1. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

2. $D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$. Puis : $A^n = PD^n P^{-1}$, soit :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{2^n} - \frac{2}{4^n} & \frac{6}{4^n} - \frac{6}{2^n} \\ \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} & \frac{3}{4^n} - \frac{2}{2^n} \end{pmatrix}.$$

3. On peut poser $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et on se ramène à résoudre le

système : $\begin{cases} x - \frac{3}{2}y + 1 = x \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 1 = y \end{cases}$ ce qui donne $x = -\frac{2}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$.

D'où : $C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

4. $X_n - C = A^n(X_0 - C)$, soit $X_n = A^n(X_0 - C) + C$.

D'où $X_n = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}(\frac{9}{2^n} - \frac{8}{4^n}) - \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3}(\frac{3}{2^n} - \frac{4}{4^n}) + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

5. La suite (X_n) converge vers $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

40 1. $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{6}{5} & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. $D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}$. Puisque $A^n = PD^n P^{-1}$, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ \frac{6}{5}(-\frac{1}{2^n} + (-\frac{1}{3})^n) & (-\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}.$$

3. On cherche la matrice C telle que $C = AC + B$.

On trouve : $C = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Alors $X_n - C = A^n(X_0 - C)$ et :

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} \\ -\frac{6}{5} \times \frac{1}{2^n} - \frac{3}{10} \times (-\frac{1}{3})^n + \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

4. La suite (X_n) converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

41 1. On le démontre par récurrence.

2. On cherche d'abord la matrice C telle que $C = AC + B$.

Si on pose $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on se ramène à résoudre le système

$$\begin{cases} -x + 3y + 1 = x \\ -y = y \end{cases}, \text{ ce qui donne } x = \frac{1}{2} \text{ et } y = 0. \text{ D'où } C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $X_n = A^n(X_0 - C) + C$ et :

$$X_n = \begin{pmatrix} (-1)^n \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. La suite (X_n) n'est pas convergente : en effet, elle prend alternativement les valeurs $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

42 1. $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$. Comme $A^n = PD^n P^{-1}$, on a :

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n - 3 \times 5^n & 3 \times 3^n - 3 \times 5^n \\ 5^n - 3^n & 5^n - 3 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

4. On détermine la matrice C telle que $C = AC + B$; on trouve

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Alors $U_n = A^n(U_0 - C) + C$, avec $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

d'où : $U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(5 \times 3^n - 12 \times 5^n - 7) \\ \frac{1}{8}(-5 \times 3^n + 4 \times 5^n + 1) \end{pmatrix}$.

5. $x_n = \frac{1}{8}(5 \times 3^n - 12 \times 5^n - 7)$ et $y_n = \frac{1}{8}(-5 \times 3^n + 4 \times 5^n + 1)$.

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$.

Ces deux suites divergent.

43 1. Algorithme de calcul de u_n :

```
Saisir n
a prend la valeur 0
b prend la valeur 1
Pour i allant de 2 à n
    c prend la valeur b
    b prend la valeur 3/2 * b - 1/2 * a
    a prend la valeur c
Fin Pour
Afficher b
```

Programmes sur calculatrices :

TEXAS	CASIO
<pre>PROGRAM:EX43 :Prompt N :0→A:1→B :For(I,2,N) : B→C : 3/2*B-1/2*A→B : C→A:End :Disp B</pre>	<pre>=====EX43===== :N=" "?N :0→A:1→B :For 2 to N : B→C:3÷2×B-1÷2×A→B : C→A:Next :B</pre>

2. $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

57 C'est faux : la matrice de transition étant de la forme $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, la somme des éléments d'une colonne vaut

1 si $a = b$, ce qui donne la matrice $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

58 C'est faux. La somme des éléments diagonaux est égale à $2 - a - b$: elle peut valoir 0,5, par exemple si $a = 0,8$ et $b = 0,7$.

59 C'est faux. La matrice de transition $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $(1-a)(1-b) - ab \neq 0$, soit $a + b \neq 1$. On peut avoir $a + b = 1$, par exemple en choisissant $a = 0,1$ et $b = 0,9$.

60 1. Matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Matrice donnant l'état probabiliste au 4^e lancer :

$$U_4 = (1 \ 0 \ 0) \times M^4 = \left(\frac{117}{256} \ \frac{11}{32} \ \frac{51}{256} \right).$$

Donc la probabilité que Boris ait la balle après le 4^e lancer est $\frac{11}{32}$ soit 0,344, à 0,001 près.

$$3. P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} & \frac{16}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

$$4. D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Puisque $M^n = P D^n P^{-1}$, on trouve :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} + \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{5}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{16}{35} - \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{5}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{12}{35} - \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{9}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{16}{35} - \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{9}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{12}{35} - \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{6}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{16}{35} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{6}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{1}{5} + 4\left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

5. La probabilité qu'Alexis ait la balle au n -ième lancer est :

$$\frac{12}{35} + \frac{3}{10} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{5}{14} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n.$$

61 Voir livre p. 143.

62 1. $X_1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$.

$$2. \text{ Matrice de transition : } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$4. D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

$$M^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n & 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. $X_n = X_1 M^{n-1}$

$$= \left(1000 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \ 1000 \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \ 1000 \left(1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \right).$$

6. La suite (X_n) a pour limite $(0 \ 0 \ 1 \ 000)$. Cela signifie qu'à terme, tout le monde aura les trois images.

7. On doit avoir :

$$1000 \left(1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) > 999,$$

c'est-à-dire $2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < 0,001$.

La suite (u_n) telle que $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ est décroissante, et

la calculatrice donne $n - 1 \geq 19$, soit $n \geq 20$.

On peut considérer que toutes les personnes ont les trois images au bout de 20 semaines.

$$63 \quad 1. \text{ Matrice de transition : } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

2. a. On calcule :

$$(1 \ 0 \ 0) \times M^7 = (0,356 \ 0,339 \ 0,305), \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Donc, la probabilité qu'il fasse beau le 8 juillet est environ 0,356.

b. La probabilité qu'il fasse beau tous les jours du 1^{er} au 8 juillet est égale à $\left(\frac{1}{3}\right)^7 \approx 0,0005$.

64 1. Matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On calcule : $U_4 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \times M^4$

$$U_4 = \left(0 \ \frac{13}{256} \ \frac{27}{256} \ \frac{41}{256} \ \frac{175}{256} \right).$$

La probabilité d'avoir terminé le jeu en quatre coups est $\frac{175}{256}$, soit 0,684 à 10^{-3} près.

3. Avec la calculatrice ou un logiciel, on calcule les matrices U_n successives.

On trouve :

$$U_{10} \approx (0 \quad 0,009 \quad 0,019 \quad 0,028 \quad 0,944)$$

$$U_{11} \approx (0 \quad 0,007 \quad 0,014 \quad 0,021 \quad 0,958)$$

Il faut donc jouer au moins 11 coups pour que la probabilité de gagner dépasse 95 %.

65 C'est faux : $p_{3,2}$ est la probabilité de passer de l'état 3 à l'état 2.

66 C'est faux : l'élément $a_{1,1}$ de la matrice M^4 est égal à la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 1 en quatre étapes (sans obligatoirement rester dans l'état 1).

67 *Correctif : aux 6^e et 7^e lignes de l'énoncé, il faut lire "On note A l'état « les habitants **habitant** la capitale » et B l'état « les habitants **n'habitent pas** dans la capitale ».*

1. Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

2. L'état stable existe.

Il est défini par $(x \ y)$, avec $(x \ y) \times M = (x \ y)$ et $x + y = 1$.

On obtient : $0,6x + 0,2y = x$ et $x + y = 1$, soit $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$.

Après un certain nombre d'années, il y aura environ le tiers des habitants dans la capitale (contre 40 % en 2012).

68 1. Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

2. L'état stable existe.

Il est défini par $(x \ y)$, avec $(x \ y) \times M = (x \ y)$ et $x + y = 1$.

On obtient : $0,6x + 0,1y = x$ et $x + y = 1$, soit $x = \frac{1}{5}$ et $y = \frac{4}{5}$.

Au bout d'un grand nombre de jours, la proportion de places libres sera d'environ 20 %.

3. a. Algorithme complété :

```

n prend la valeur 2
Tant que Random < 0,9
    n prend la valeur n + 1
Fin Tant que
Afficher n
    
```

(Random est un nombre aléatoire de $[0 ; 1[$).

b. Algorithme effectuant N simulations :

```

Saisir N
S prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à N
    n prend la valeur 2
    Tant que Random < 0,9
        n prend la valeur n + 1
    Fin Tant que
    S prend la valeur S + n
Fin Pour
Afficher  $\frac{S}{N}$ 
    
```

c. Programmes sur calculatrice :

TEXAS	CASIO
<pre> PROGRAM:RESERVA :Promp N:0→S :For(I,1,N) :2→X :While NbrAléat< 0,9:X+1→X:End :S+X→S:End :Disp S/N </pre>	<pre> =====RESERVA ===== "N="?"N:0→S For 1→I To N 2→X While Ran# <0,9:X+1→X :WhileEnd:S+X→S:Next S=N </pre>

69 1. Les probabilités $p_{1,2}$, $p_{2,1}$, $p_{3,1}$, $p_{1,3}$, $p_{2,3}$ et $p_{3,2}$ sont respectivement proportionnelles à 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1 et 1.

Ainsi : $p_{1,2} = 2p_{1,3}$ et $0,9 + p_{1,2} + p_{1,3} = 1$, ce qui donne $p_{1,2} = \frac{1}{30}$ et $p_{1,3} = \frac{1}{15}$.

De même : $p_{2,1} = p_{2,3}$ et $p_{2,1} + 0,9 + p_{2,3} = 1$, ce qui donne $p_{2,1} = p_{2,3} = 0,05 = \frac{1}{20}$.

Enfin : $2p_{1,3} = p_{2,3}$ et $p_{1,3} + p_{2,3} + 0,9 = 1$, ce qui donne $p_{1,3} = \frac{1}{30}$ et $p_{2,3} = \frac{1}{15}$.

2. On calcule : $U_2 = (0 \ 0 \ 1) \times M^2$, où M est la matrice de transition.

$U_2 = \begin{pmatrix} 19 & 11 & 733 \\ 300 & 90 & 900 \end{pmatrix}$, donc la probabilité que ce pays voit sa note abaissée d'un cran en 2014 est $\frac{11}{90} \approx 0,122$.

3. Il existe un état stable, puisque la matrice M est sans zéro.

Si $(x \ y \ z)$ est cet état stable, on a :

$$(x \ y \ z) \times M = (x \ y \ z), \text{ avec } x + y + z = 1.$$

On en déduit : $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Au bout d'un grand nombre d'années, ce pays a autant de chances d'avoir toutes les notes.

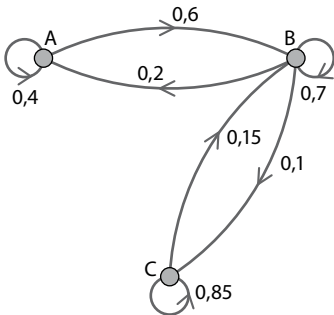
70 L'algorithme est basé sur le fait qu'il n'y a pas d'état stable pour la marche aléatoire de matrice de transition $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ si $a = 0$ et $b = 0$ ou bien $a = 1$ et $b = 1$, ce qui équivaut à ce que le produit ab soit égal à 0 ou 1 (car a et b sont compris entre 0 et 1).

```

Saisir a, b
Si ab = 0 ou ab = 1
    Alors Afficher « Pas d'état stable »
    Sinon Afficher « Etat stable : »
        Afficher  $\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}$ 
Fin Si
    
```

71 Voir livre p. 143.

72 1.



2. Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

3. $M^2 = \begin{pmatrix} 0,28 & 0,66 & 0,06 \\ 0,22 & 0,625 & 0,155 \\ 0,03 & 0,2325 & 0,7375 \end{pmatrix}$: M^2 est sans zéro, donc il

existe un état stable.

On résout $(x \ y \ z) \times M = (x \ y \ z)$, avec $x + y + z = 1$, ce qui donne $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{2}$ et $z = \frac{1}{3}$.

À long terme, il y aura $\frac{1}{6}$ des adhérents dans le groupe A, la moitié dans le groupe B et le tiers dans le groupe C.

4. Il a raison.

73 1. Matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

2. La première ligne de la matrice M^6 est la suivante :

$$\left(\frac{521}{3125} \ \frac{434}{3125} \ \frac{434}{3125} \ \frac{434}{3125} \ \frac{434}{3125} \ \frac{434}{3125} \ \frac{434}{3125} \right).$$

La probabilité cherchée est donc $\frac{521}{3125}$, soit environ 0,167.

3. On peut calculer M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{4}{25} & \frac{53}{150} & \frac{1}{30} & \frac{29}{150} & \frac{1}{30} & \frac{29}{150} & \frac{1}{30} \\ \frac{4}{25} & \frac{1}{30} & \frac{53}{150} & \frac{1}{30} & \frac{29}{150} & \frac{1}{30} & \frac{29}{150} \\ \frac{4}{25} & \frac{29}{150} & \frac{1}{30} & \frac{53}{150} & \frac{1}{30} & \frac{29}{150} & \frac{1}{30} \\ \frac{4}{25} & \frac{1}{30} & \frac{29}{150} & \frac{1}{30} & \frac{53}{150} & \frac{1}{30} & \frac{29}{150} \\ \frac{4}{25} & \frac{29}{150} & \frac{1}{30} & \frac{29}{150} & \frac{1}{30} & \frac{53}{150} & \frac{1}{30} \\ \frac{4}{25} & \frac{1}{30} & \frac{29}{150} & \frac{1}{30} & \frac{29}{150} & \frac{1}{30} & \frac{53}{150} \end{pmatrix}$$

M^2 est sans zéro, donc il existe un état stable.

L'état stable $(p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ p_7)$ est tel que :

$$p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 \text{ par symétrie.}$$

Si on pose $p_1 = x$ et $p_2 = y$, on résout :

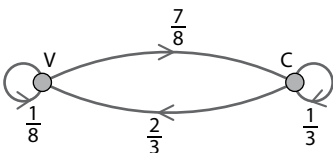
$$(x \ y \ y \ y \ y \ y \ y) \times M = (x \ y \ y \ y \ y \ y \ y) \text{ avec } x + 6y = 1.$$

Les équations se réduisent à : $\frac{6}{5}y = x$.

$$\text{D'où : } \frac{6}{5}y + 6y = 1, \text{ soit } y = \frac{5}{36} \text{ et } x = \frac{1}{6}.$$

$$\text{L'état stable est donc : } \left(\frac{1}{6} \ \frac{5}{36} \ \frac{5}{36} \ \frac{5}{36} \ \frac{5}{36} \ \frac{5}{36} \ \frac{5}{36} \right).$$

74 1.



2. Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

3. On recherche l'état stable de cette marche aléatoire :

$$(x \ y) \times M = (x \ y), \text{ avec } x + y = 1.$$

$$\text{On obtient } (x \ y) = \left(\frac{16}{37} \ \frac{21}{37} \right).$$

Il y a donc environ 43 % de voyelles et 57 % de consonnes dans cet ouvrage.

75 1. Matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. L'état initial est $U_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$.

On calcule $U_0 \times M^6$:

$$\left(\frac{575}{1728} \ \frac{221}{1152} \ \frac{193}{864} \ \frac{23}{864} \ \frac{229}{1152} \ \frac{23}{864} \right).$$

La probabilité qu'il soit dans la salle A au bout d'une heure est :

$$\frac{575}{1728} \approx 0,333.$$

3. La matrice M^6 est sans zéro, donc il existe un état stable.

$$M^6 = \begin{pmatrix} \frac{575}{1728} & \frac{221}{1152} & \frac{193}{864} & \frac{23}{864} & \frac{229}{1152} & \frac{23}{864} \\ \frac{221}{864} & \frac{15}{64} & \frac{121}{432} & \frac{19}{432} & \frac{245}{1728} & \frac{19}{432} \\ \frac{193}{864} & \frac{121}{576} & \frac{541}{1728} & \frac{17}{192} & \frac{11}{144} & \frac{17}{192} \\ \frac{23}{216} & \frac{19}{144} & \frac{17}{48} & \frac{85}{432} & \frac{7}{72} & \frac{85}{432} \\ \frac{229}{864} & \frac{245}{1728} & \frac{11}{108} & \frac{1}{216} & \frac{833}{1728} & \frac{1}{216} \\ \frac{23}{216} & \frac{19}{144} & \frac{17}{48} & \frac{85}{432} & \frac{7}{72} & \frac{85}{432} \end{pmatrix}$$

Celui-ci vérifie :

$$(x \ y \ z \ t \ u \ v \ w) \times M = (x \ y \ z \ t \ u \ v \ w).$$

Par le calcul ou avec un logiciel de calcul formel, on obtient :

$x = [x, y, z, t, u, v]$ $x^T M = x$	
$\{x, y, z, t, u, v\}$	$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{2} + \frac{2}{3}x \end{pmatrix} = x, \begin{pmatrix} \frac{5}{4} + \frac{1}{2}y \end{pmatrix} = y, \begin{pmatrix} \frac{5}{3} + \frac{1}{2}z \end{pmatrix} = z, \begin{pmatrix} \frac{5}{4} + t \end{pmatrix} = t, \begin{pmatrix} \frac{5}{4} + u + v \end{pmatrix} = u, \begin{pmatrix} \frac{5}{3} + v \end{pmatrix} = v \right\}$
résoudre_système_lineaire([2+2*x, 5+4*y, 5+3*z, 5+4*t, 5+u+v, 5+3*v], [x, y, z, t, u, v])	
$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$	

L'état stable est : $\left(\frac{1}{4} \ \frac{3}{16} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{16} \ \frac{3}{16} \ \frac{1}{16} \right)$, soit :

$$(0,25 \ 0,1875 \ 0,25 \ 0,0625 \ 0,1875 \ 0,0625).$$

4. L'état stable montre que les seules salles où la probabilité de rencontrer le gardien est inférieure à 0,1 pendant une longue durée sont les salles D et F, et ceci dès 8h du matin.

76 C'est faux : voir le cours page 120.

77 C'est vrai : c'est une propriété du cours de la page 120.

78 On cherche c tel que $c = \frac{1}{5}c - 8$, ce qui donne $c = -10$.

$$\text{Puis : } u_n + 10 = \left(\frac{1}{5} \right)^n \times (u_0 + 10) \text{ soit } u_n = 13 \times \left(\frac{1}{5} \right)^n - 10.$$

79 1. Si M est la matrice de transition, on calcule :

$$(0,4 \ 0,6) \times M^5 = (0,1435 \ 0,8565).$$

2. On résout $(x \ y) \times M = (x \ y)$ avec $x + y = 1$.

On trouve : $(x \ y) = \left(\frac{1}{7} \ \frac{6}{7} \right).$

80 On conjecture que $A^n = \begin{pmatrix} n & n \\ n & n \end{pmatrix}$, puis on le démontre par récurrence.

Alors $X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$, d'où $U_n = \begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} \\ \frac{n}{n+1} \end{pmatrix}.$

Cette suite converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 143. Les corrigés détaillés sont disponibles sur le site www.bordas-indice.fr.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Proies et prédateurs

Ce TP étudie les évolutions de populations de proies et de prédateurs en discrétisant le problème, d'abord avec un tableur, puis avec le calcul matriciel. Dans une dernière partie, on étudie le problème sans discrétisation, mais en utilisant le calcul formel pour résoudre l'équation différentielle rencontrée (car celles-ci ne sont pas au programme de la classe).

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

04_TSspe_TP1.xlsx (Excel 2007),

04_TSspe_TP1.xls (Excel 2003),

04_TSspe_TP1.ods (OpenOffice)

et 04_TSspe_TP1.xws (Xcas).

A. Première étude du problème

1. En discrétisant le problème, on remplace $x(t)$ par x_n , $y(t)$ par y_n , $x'(t)$ par $x_{n+1} - x_n$ et $y'(t)$ par $y_{n+1} - y_n$.

On obtient alors les relations données.

2. En l'absence de prédateurs : $y_n = 0$, donc on a la relation $x_{n+1} = 1,05x_n$: (x_n) est une suite géométrique, donc $x_n = 1,05^n x_0$. La population des proies est croissante et augmente indéfiniment.

3. En l'absence de proies : $x_n = 0$, donc on a la relation $y_{n+1} = 0,97y_n$: (y_n) est une suite géométrique, donc $y_n = 0,97^n y_0$. La population des prédateurs est décroissante et tend vers 0.

4. On résout $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = y_n$ pour tout naturel n .

On obtient $x_n = 150$ et $y_n = 50$.

Donc, pour les conditions initiales $x_0 = 150$ et $y_0 = 50$, le nombre de lièvres et de lynx reste constant.

B. Utilisation d'un tableur

1. Pour entrer les valeurs de n dans la colonne **C**, on saisit **0** en **D2**, puis la formule **=D2+1** dans la cellule **D3**, formule que l'on recopie ensuite vers le bas jusqu'en **D502**.

Pour les effectifs de lièvres dans la colonne **E**, on saisit en **E2** la formule **=A2**, puis en **E3** la formule de récurrence de l'énoncé

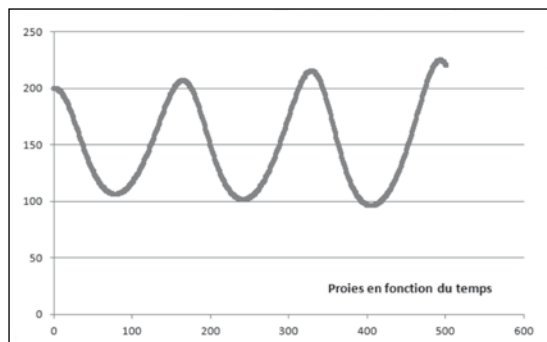
$$=1,05 \times E2 - 0,001 \times E2 \times F2.$$

Pour les effectifs de lynx dans la colonne **F**, on saisit en **F2** la formule **=B2**, puis en **F3** la formule de récurrence de l'énoncé

$$=0,97 \times F2 + 0,0002 \times E2 \times F2.$$

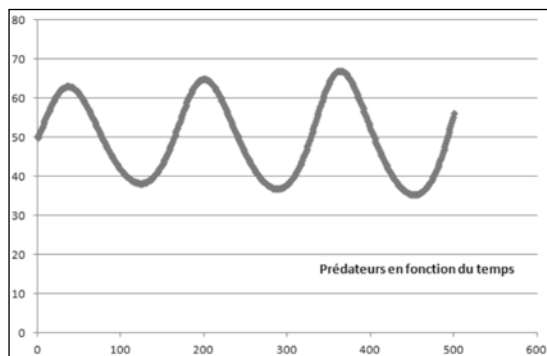
On recopie ensuite les formules entrées en **E3** et **F3** vers le bas jusqu'à la ligne **502**.

2. On constate une périodicité dans l'évolution du nombre de proies en fonction du temps ; la longueur de cette période est d'environ 180 ans.

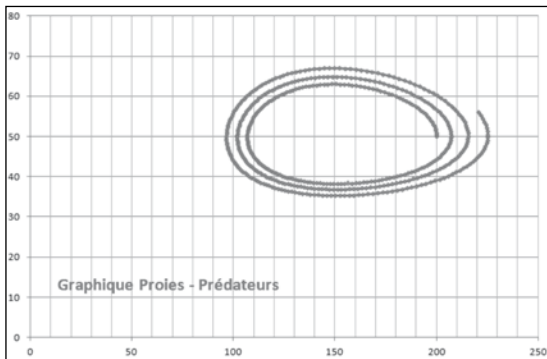


3. De la même façon que pour les proies, on constate une périodicité dans l'évolution du nombre de prédateurs en fonction du temps ; la longueur de la période semble la même que pour les proies.

Par contre, les variations sont décalées par rapport à celles des proies.



4. La représentation de l'ensemble des points de coordonnées $(x_n ; y_n)$ fait bien apparaître le caractère cyclique du nombre de proies et de prédateurs. Le point d'équilibre du système $(150 ; 50)$ se trouve « au centre » de l'ensemble des points ainsi représenté.



5. Il est intéressant de constater que, si le nombre initial de lynx est très voisin du nombre initial de lièvres, alors la périodicité des évolutions n'apparaît plus.

C. Linéarisation du problème

$$1. X_{n+1} = X_n - 0,15 Y_n - 0,001 X_n Y_n.$$

$$Y_{n+1} = 0,01 X_n + Y_n + 0,0002 X_n Y_n.$$

2. En négligeant les produits $X_n Y_n$, on obtient :

$$X_{n+1} = X_n - 0,15 Y_n \text{ et } Y_{n+1} = 0,01 X_n + Y_n.$$

$$\text{D'où : } U_{n+1} = A \times U_n, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & -0,15 \\ 0,01 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. U_n = A^n U_0, \text{ avec } U_0 = \begin{pmatrix} 200 - 150 \\ 50 - 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Pour un entier n fixé, on peut calculer A^n et ainsi en déduire U_n et donc les effectifs de ces populations.

Par exemple, pour $n = 200$:

$$A^{100} \approx \begin{pmatrix} 0,13 & -4,47 \\ 0,30 & 0,13 \end{pmatrix},$$

$$\text{d'où : } X_{200} \approx 6,5 \text{ et } Y_{200} \approx 14,9.$$

$$\text{Ainsi : } x_{200} \approx 156,5 \text{ et } y_{200} \approx 64,9.$$

D. Retour aux fonctions

$$1. X'(t) = -0,15 Y(t) - 0,001 X(t) Y(t).$$

$$Y'(t) = 0,01 X(t) + 0,0002 X(t) Y(t).$$

En négligeant les produits $X(t)Y(t)$, on obtient les équations demandées.

$$2. a. X''(t) = -0,15 \times 0,01 X(t) = -0,0015 X(t).$$

$$b. X(0) = 50; Y(0) = 0.$$

3. Avec le logiciel Xcas, on utilise la commande :

$$\text{desolve}([x''=(15/10\,000)*x, x(0)=50, x'(0)=0], x).$$

On trouve alors :

$$X(t) = 50 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{100} t\right), \text{ c'est-à-dire } x(t) = 50 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{100} t\right) + 150.$$

Ce résultat explique la « périodicité » des solutions découvertes avec le tableur.

$$\text{TP2 A. 3. b. } M^n = \begin{pmatrix} 0,25^n & 3(0,5^n - 0,25^n) & 3(0,75^n - 2 \times 0,5^n + 0,25^n) & 1 + 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,75^n - 0,25^n \\ 0 & 0,5^n & 2(0,75^n - 0,5^n) & 1 + 0,5^n - 2 \times 0,75^n \\ 0 & 0 & 0,75^n & 1 - 0,75^n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{A. 4. a. } E_n = (0,25^{n-1} \quad 3(0,5^{n-1} - 0,25^{n-1}) \quad 3(0,75^{n-1} - 2 \times 0,5^{n-1}) + 0,25^{n-1} \quad 1 + 3 \times 0,5^{n-1} - 3 \times 0,75^{n-1} - 0,25^{n-1}).$$

TP 2 Le collectionneur d'images

Ce TP s'intéresse à un jeu bien connu : faire une collection d'images que l'on trouve dans des paquets de bonbons, de chocolats... Pour que les calculs soient abordables, on a limité la collection à 4 images : dans un premier temps, on étudie cette marche aléatoire à l'aide du calcul matriciel ; dans un second temps, on s'intéresse au nombre moyen d'achats à effectuer pour obtenir toute la collection : on conjecture d'abord cette valeur à l'aide d'un programme, puis on la détermine exactement par un calcul d'espérance mathématique.

Fichiers associés sur le site www.indice-bordas.fr et sur le manuel numérique premium :

04_TSspe_TP2_B2.ggb,

04_TSspe_correctionTP2_B2.ggb

et 04_TSspe_correctionTP2_B3.ggb (GeoGebra).

Correctif : la série complète comprend quatre images **différentes**.

A. Étude de la marche aléatoire

$$1. M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $E_5 = E_1 \times M^4 = \left(\frac{1}{256} \quad \frac{45}{256} \quad \frac{75}{128} \quad \frac{15}{64} \right)$, donc la probabilité d'avoir les 4 images après 5 achats est $\frac{15}{64} \approx 0,234$.

$E_{10} = E_1 \times M^9 \approx (0 \quad 0,006 \quad 0,214 \quad 0,781)$, donc la probabilité d'avoir les 4 images après 10 achats est 0,781 à 10^{-3} près.

3. Correctif : Déterminer P^{-1} , puis $D = P^{-1}MP$ (et non pas $D = P^{-1}AP$).

$$a. P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$b. D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit M^n (voir bas de page).

4. a. $E_n = E_1 \times M^{n-1}$, d'où E_n (voir bas de page).

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$. Au bout d'un très grand nombre d'étapes, la probabilité d'avoir les 4 images est 1.

B. Étude expérimentale

1.

```
L prend la valeur {0, 0, 0, 0}
m prend la valeur 0
Tant que L[1] × L[2] × L[3] × L[4] = 0
  a prend la valeur Rand(1, 4)
  L[a] prend la valeur L[a] + 1
  m prend la valeur m + 1
Fin Tant que
Afficher m
```

2. Programme sous AlgoBox :



3. a. On introduit une boucle POUR :

```
Saisir n
c prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
  m prend la valeur 0
  L[1] prend la valeur 0
  L[2] prend la valeur 0
  L[3] prend la valeur 0
  L[4] prend la valeur 0
  Tant que (L[1] × L[2] × L[3] × L[4] = 0)
    a prend la valeur Rand(1,4)
    L[a] prend la valeur L[a]+1
    m prend la valeur m + 1
  Fin Tant que
  c prend la valeur c + m
Fin Pour
c prend la valeur  $\frac{c}{n}$ 
Afficher c
```

b. On modifie le programme sous AlgoBox.

En simulant 100 expériences, on obtient 8,64 (par exemple...).
En simulant 1 000 expériences, on obtient 8,496 (par exemple).

C. Nombre moyen de paquets à acheter

1. a. $f'(x) = S_n(x)$.

b. $f(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$.

c. $f'(x) = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

d. $S_n(x) = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

e. *Correctif : on admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n x^n = 0$.*

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

2. *Correctif : T est la variable aléatoire égale au nombre de paquets à acheter pour avoir toute la collection, après le premier achat.*

a. À l'aide d'un arbre de probabilités, on obtient :

$$P(X_1 = k) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}.$$

b. $P(X_2 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $P(X_3 = k) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$.

3. a. $\sum_{k=1}^n k \times P(X_1 = k) = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{3}{4} S_n\left(\frac{1}{4}\right)$.

b. $E(X_1) = \frac{4}{3}$; $E(X_2) = 2$; $E(X_3) = 4$.

c. $E(T) = \frac{4}{3} + 2 + 4 = \frac{22}{3}$. Donc, avec le premier achat, cela donne un nombre moyen de paquets à acheter égal à $\frac{25}{3}$, soit environ 8,33.

CAP VERS LE BAC

Sujet A

1. a. $x_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n$.

$y_{n+1} = 0,3x_n + 0,4y_n + 0,1z_n$.

$z_{n+1} = 0,3x_n + 0,3y_n + 0,7z_n$.

b. $x_n + y_n + z_n = 1$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$.

3. a. P est inversible car $1 \times 2 - (-1) \times 1 \neq 0$:

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. $D = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix}$.

c. $D^n = \begin{pmatrix} 0,1^n & 0 \\ 0 & 0,4^n \end{pmatrix}$.

$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 0,1^n + 0,4^n & -0,1^n + 0,4^n \\ -2 \times 0,1^n + 2 \times 0,4^n & 0,1^n + 2 \times 0,4^n \end{pmatrix}$.

4. a. $C = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

b. $U_n = A^n(U_0 - C) + C$, d'où :

$$U_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \times 0,1^n - \frac{1}{15} \times 0,4^n + \frac{5}{18} \\ \frac{1}{9} \times 0,1^n + \frac{2}{15} \times 0,4^n + \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

5. a. $x_n = -\frac{1}{9} \times 0,1^n - \frac{1}{15} \times 0,4^n + \frac{5}{18}$.

$y_n = \frac{1}{9} \times 0,1^n + \frac{2}{15} \times 0,4^n + \frac{2}{9}$.

$z_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{15} \times 0,4^n$.

b. Les limites des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) sont respectivement $\frac{5}{18}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{1}{2}$. Ainsi, à long terme, la marque Z va occuper la moitié du marché, la marque X et la marque Y respectivement 28 % et 22 % du marché.

Sujet B

$$1. x(t+1) = 2,25 y(t) + 0,75 x(t) - 0,25 x(t)$$

$$= 0,5 x(t) + 2,25 y(t).$$

$$y(t+1) = 0,75 y(t) + 0,25 x(t) - 0,25 y(t)$$

$$= 0,25 x(t) + 0,5 y(t).$$

$$z(t+1) = 0,25 y(t) + 0,25 z(t).$$

On en déduit l'égalité : $N(t+1) = A \times N(t)$.

$$2. A^{10} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3260 \\ 1087 \\ 272 \end{pmatrix}, \text{ en arrondissant à une unité près.}$$

Il y a donc 1 087 adultes après 10 unités de temps.

$$3. a. P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$b. D^t = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{4}\right)^t & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{5}{4}\right)^t & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^t \end{pmatrix}.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^t & -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{3}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^t & 0 \\ -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{4}\right)^t & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^t & 0 \\ \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{1}{24}\left(\frac{5}{4}\right)^t - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^t & -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{1}{8}\left(\frac{5}{4}\right)^t + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^t & \left(\frac{1}{4}\right)^t \end{pmatrix}$$

4. a. $N(t) = A^t \times N(0)$, d'où :

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^t\right)a + \left(-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{3}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^t\right)b.$$

$$y(t) = \left(-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{4}\right)^t\right)a + \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^t\right)b.$$

$$z(t) = \left(\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{1}{24}\left(\frac{5}{4}\right)^t - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^t\right)a + \left(-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{1}{8}\left(\frac{5}{4}\right)^t + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^t\right)b + \left(\frac{1}{4}\right)^t c.$$

5. a. Les suites $(x(t))$, $(y(t))$ et $(z(t))$ ont chacune pour limite $+\infty$, donc ce modèle prédit la pérennité de l'espèce.

$$b. \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b}{\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b} = 3.$$

À long terme, il y a donc trois fois plus de larves que d'adultes.

Sujet C

$$1. a. M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$b. a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$

$$D'où : X_{n+1} = X_n \times Q, \text{ avec } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c. Correctif : la matrice Q^n est égale à :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n & \frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ \frac{3}{10}\left(\frac{5}{6}\right)^n & \frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{pmatrix} \text{ et non pas } \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\left(\frac{2}{6}\right)^n & \frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ \frac{3}{10}\left(\frac{5}{6}\right)^n & \frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

On le montre par récurrence.

d. $X_n = X_0 \times Q^n$, avec $X_0 = (1 \ 0)$, donc :

$$X_n = \left(\frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n\right).$$

$$\text{Ainsi : } c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

C'est la probabilité que la guêpe soit sortie au bout de n minutes.

$$e. c_n > 0,009 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} < 0,001 \Leftrightarrow n-1 > \frac{\ln 0,001}{\ln \left(\frac{5}{6}\right)}, \text{ soit } n \geq 39.$$

Cette probabilité dépasse 0,999 au bout de 39 minutes.

$$2. a. M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

$$b. M'^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{5}{9} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{24} & \frac{53}{120} & \frac{7}{20} \\ \frac{1}{40} & \frac{7}{50} & \frac{167}{200} \end{pmatrix} : M'^2 \text{ ne contient pas de zéro, donc}$$

il existe un état stable.

On résout : $(x \ y \ z) \times M' = (x \ y \ z)$, avec $x + y + z = 1$.

$$\text{On trouve : } (x \ y \ z) = \left(\frac{3}{31} \quad \frac{8}{31} \quad \frac{20}{31}\right).$$

À long terme (c'est-à-dire au bout d'une journée), il y a 64 % de chance que la guêpe soit sortie, 26 % qu'elle soit dans la pièce B et 10 % de chance qu'elle soit dans la pièce A.

Sujet D

Correctif : dans le plan du trésor à la 4^e ligne il faut lire : « du chemin reliant B et C ... » (et non pas A et C).

1. Soit M_{n-1} et M_n les points situés aux distances u_{n-1} et u_n du puits. Alors, le point suivant M_{n+1} , situé à la distance u_{n+1} du puits, est le milieu de $[M_{n-1}M_n]$, donc :

$$AM_{n+1} = AM_n + \frac{1}{2}M_nM_{n-1} = u_n + \frac{1}{2}(u_{n-1} - u_n),$$

$$\text{d'où : } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}.$$

2. Algorithmme :

```

Saisir n
a prend la valeur 0
b prend la valeur 200
Pour i allant de 2 à n
    c prend la valeur b
    b prend la valeur  $\frac{1}{2} \times b + \frac{1}{2} \times a$ 
    a prend la valeur c
Fin Pour
Afficher b
    
```

$$3. A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4. a. P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$b. D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \text{ et } A^n = PD^n P^{-1}, \text{ d'où :}$$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

$$5. a. X_n = A^n \times X_0, \text{ avec } X_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où } X_n = \begin{pmatrix} \frac{200}{3} \left(2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ \frac{200}{3} \left(2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit : } u_n = \frac{200}{3} \left(2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{400}{3}$, donc le trésor se trouve sur la droite reliant le puits au figuier, à $\frac{400}{3}$ mètres du puits.

88 1. La matrice C telle que $C = AC + B$ est $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{D'où } X_n = A^n(X_0 - C) + C$$

$$X_n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - 3 \\ (-1)^{n+1} + 2 \end{pmatrix}.$$

2. La suite (X_n) n'est pas convergente, car les suites de terme général 2^n et $(-1)^{n+1}$ divergent.

89 La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$, en

considérant les états A : « l'habitant pratique le covoiturage » et B : « l'habitant se déplace seul en voiture ».

L'état stable vérifie $(x \ y) \times M = (x \ y)$ avec $x + y = 1$, soit $x = \frac{7}{19}$ et $y = \frac{12}{19}$.

POUR ALLER PLUS LOIN

90 Partie A

1. a. Puisque $P^{n+1} = P^n \times P$, on obtient cette relation en calculant le terme $p_{i,1}(n+1)$ de P^{n+1} .

b. Quand i varie de 1 à 3, la relation précédente donne $p_{1,1}(n+1)$, $p_{2,1}(n+1)$ et $p_{3,1}(n+1)$ et M_{n+1} est bien le plus grand de ces nombres (c'est le plus grand élément de la première colonne de M^{n+1}).

c. On a $p_{1,1}(n) \leq M_n$, $p_{3,1}(n) \leq M_n$ et $p_{i,1} + p_{i,3} = 1 - p_{i,2}$ donc :

$$p_{i,1} p_{1,1}(n) + p_{i,2} m_n + p_{i,3} p_{3,1}(n) \leq (1 - p_{i,2}) M_n + p_{i,2} m_n.$$

d. $M_{n+1} \leq M_n - p_{i,2}(M_n - m_n) \leq M_n - d(M_n - m_n)$, car $p_{i,2} \geq d$.

2. a. $M_{n+1} - M_n \leq -d(M_n - m_n)$, avec $d > 0$ et $M_n - m_n \geq 0$, donc $M_{n+1} - M_n \leq 0$: la suite (M_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge.

b. $m_{n+1} - m_n \geq d(M_n - m_n) \geq 0$, donc la suite (m_n) est croissante. Comme elle est majorée par 1, elle converge.

3. a. On a : $-m_{n+1} \leq -m_n - d(M_n - m_n)$.

Comme $M_{n+1} \leq M_n - d(M_n - m_n)$, en sommant, on a :

$$M_{n+1} - m_{n+1} \leq M_n - m_n - 2d(M_n - m_n),$$

soit : $M_{n+1} - m_{n+1} \leq (1 - 2d)(M_n - m_n)$.

b. Correctif : il faut montrer par récurrence que $0 \leq M_n - m_n \leq k^n$ et non pas $0 \leq M_n - m_n \leq k^n$.

Pour $n = 1$, on a bien : $0 \leq M_1 - m_1 \leq 1$.

Supposons $0 \leq M_n - m_n \leq (1 - 2d)^{n-1}$, alors on en déduit :

$$M_{n+1} - m_{n+1} \leq (1 - 2d)^n.$$

Ainsi : $0 \leq M_n - m_n \leq k^{n-1}$, avec $k = 1 - 2d$.

Puisque d est le plus petit élément de la matrice P , alors $d \neq 0$ (sinon P contiendrait un zéro) et $d \leq \frac{1}{9}$, et ainsi $1 - 2d \geq \frac{7}{9} > 0$.

c. D'après le b., la limite de $(M_n - m_n)$ est égale à 0, donc (M_n) et (m_n) convergent vers la même limite L .

Puisque $m_n \leq p_{i,1}(n) \leq M_n$, la suite $(p_{i,1}(n))$ converge vers L , limite indépendante de i .

d. Le raisonnement fait est similaire pour la suite $(p_{i,2}(n))$ (resp. $(p_{i,3}(n))$), en considérant pour M_n et m_n le plus grand élément et le plus petit élément de la seconde (resp. troisième) colonne de P . De plus, ces trois suites ont la même limite.

e. Chaque suite composant la matrice P^n converge, donc la suite de matrices (P^n) converge, et aussi la suite de matrices (X_n) .

Partie B

1. Soit $I =]-a; a[$ un intervalle ouvert contenant 0 ($a > 0$). Alors, à partir d'un certain rang p , pour tout naturel $n : u_{2n} \in I$.

Puisque (u_n) décroît, pour tout entier $n \geq 2p$, on a : $0 \leq u_n \leq u_{2p}$, donc $u_n \in I$, ce qui prouve la convergence de (u_n) .

2. On applique le raisonnement fait dans la partie A à la matrice P^2 , donc $0 \leq M_{2n} - m_{2n} \leq k^{2n-1}$ (avec $k = 1 - 2d$ et d le plus petit élément de P^2) ; ainsi, la suite $(M_{2n} - m_{2n})$ a pour limite 0.

3. a. La suite $(M_{2n} - m_{2n})$ est décroissante et a pour limite 0, donc la suite $(M_n - m_n)$ a pour limite 0 (d'après la question 1), et les suites (M_n) et (m_n) ont même limite L .

Puisque $m_n \leq p_{i,1}(n) \leq M_n$, alors la suite $(p_{i,1}(n))$ converge vers L .

b. De la même façon, on en déduit que la suite (P^n) converge, et la suite (U_n) aussi.

4. Le raisonnement est le même en étudiant la suite (u_n) , puis la différence $M_n - m_n$.

91 1. Fin du tableau :

8	9	10	11	12	13
DP	F	F	SP	DP	SP

2. a. $b_1 = 0$; $b_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$; $b_3 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$; $b_4 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$.

b. $P_{F_1}(B_{n+2}) = P(B_{n+1})$.

$P_{F_1 \cap F_2}(B_{n+2}) = P(B_n)$.

$P_{P_1}(B_{n+2}) = \frac{1}{3} \times P(B_n)$.

c. $b_{n+2} = P(P_1 \cap B_{n+2}) + P(F_1 \cap B_{n+2})$

$b_{n+2} = P_{P_1}(B_{n+2}) \times P(P_1) + P_{F_1}(B_{n+2}) \times P(F_1)$

$b_{n+2} = \frac{2}{9} b_n + \frac{1}{3} b_{n+1}$.

3. a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b. $U_n = A^{n-1} U_1$, où $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

c. $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

d. $D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$.

$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$.

e. $b_n = \frac{4}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{4}{9} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

4. a. $\overline{C_n} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$.

b. $P(C_n) = 1 - (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$.

$c_n = 1 - \frac{4}{9} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{4}{9} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k$

$c_n = 1 - \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$

$c_n = \frac{8}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$: il y aura apparition d'un double pile pour n assez grand.

92 1. $P(A_1) = a$; $P(B_1) = (1-a)b$;

$P(C_1) = (1-a)(1-b)$.

2. Les événements $A_1, B_1, C_1 \cap A_2, C_1 \cap B_2$ et $C_1 \cap C_2$ peuvent survenir à l'issue d'au plus deux simulations de passage.

$P(C_1 \cap A_2) = (1-a)(1-b)a$.

$P(C_1 \cap B_2) = (1-a)^2(1-b)b$.

$P(C_1 \cap C_2) = (1-a)^2(1-b)^2$.

3. $P(A_n) = (1-a)^{n-1}(1-b)^{n-1}a$.

$P(B_n) = (1-a)^{n-1}(1-b)^{n-1}b$.

$P(C_n) = (1-a)^n(1-b)^n$.

4. a. (u_n) converge vers 0 car $1-\alpha$ et $1-\beta$ appartiennent à $]0; 1[$.

b. $P(C_n)$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$, donc la probabilité qu'il y ait une panne à la n -ième simulation tend vers 1: le test fonctionne, il y aura bien une panne à un moment donné.

93 Partie A

1. On entre 1 en B1, puis la formule =B1+1 en C1, que l'on recopie vers la droite.

2. a. On saisit en B2 la formule :

=ALEA.ENTRE.BORNES(1;4)

b. On saisit en C2 la formule :

=MAX(B2;ALEA.ENTRE.BORNES(1;4))

c. On la recopie vers la droite jusqu'en CW2.

3. On entre dans la colonne A les entiers de 1 à 500, puis on recopie la zone B2:CW2 jusqu'à la ligne 501.

4. a. On saisit en CY2 la formule :

=EQUIV(4;B2:CW2;0)

On obtient ainsi le numéro du premier lancer donnant 4.

b. On recopie la formule précédente dans la colonne CY.

5. On saisit en CY503 la formule :

=MOYENNE(CY2:CY501)

En faisant plusieurs simulations, on obtient un nombre voisin de 4.

Partie B

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On calcule successivement $E_0 \times A$, $E_0 \times A^2$, $E_0 \times A^3$ et $E_0 \times A^4$. Le 4^e élément de chacune de ces matrices donne la probabilité cherchée.

Ainsi, les probabilités de gagner successivement en un coup, deux coups, trois coups et quatre coups sont : $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{37}{64}$ et $\frac{175}{256}$.

3. On montre ceci par récurrence, et on définit les suites de l'énoncé de la façon suivante :

$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = f_1 = 1$.

$a_{n+1} = 2a_n + 1$; $b_{n+1} = a_n + 3b_n + 1$;

$c_{n+1} = a_n + b_n + 4c_n + 1$; $d_{n+1} = 3d_n + 2^n$;

$e_{n+1} = d_n + 4e_n + 2^n$; $f_{n+1} = 4f_n + 3^n$.

4. a. (a_n) est une suite arithmético-géométrique. On trouve :

$a_n = 2^n - 1$.

b. $b_{n+1} + 2^{n+1} = 3(b_n + 2^n)$.

D'où : $b_n + 2^n = 3^{n-1}(b_1 + 2)$, et $b_n = 3^n - 2^n$.

c. $c_{n+1} + 3^{n+1} = 4(c_n + 3^n)$, donc :

$c_n + 3^n = 4^{n-1}(c_1 + 3)$ et $c_n = 4^n - 3^n$.

d. On trouve de la même façon : $d_n = 3^n - 2^n$, puis $e_n = f_n = 4^n - 3^n$.

D'où : $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & 3^n - 2^n & 4^n - 3^n \\ 0 & 2^n & 3^n - 2^n & 4^n - 3^n \\ 0 & 0 & 3^n & 4^n - 3^n \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

$$A^n = \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & 3^n - 2^n & 4^n - 3^n \\ 0 & 2^n & 3^n - 2^n & 4^n - 3^n \\ 0 & 0 & 3^n & 4^n - 3^n \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

$$5. E_n = E_0 \times A^n = \left(\frac{1}{4^n} \frac{2^n - 1}{4^n} \frac{3^n - 2^n}{4^n} \frac{4^n - 3^n}{4^n} \right).$$

La limite de (E_n) est la matrice $(0 \ 0 \ 0 \ 1)$.

6. On résout $\frac{4^n - 3^n}{4^n} > 0,999$, ce qui donne

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n < 0,001 \text{ et } n > \frac{\ln 0,001}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}, \text{ soit } n \geq 25.$$

Il faut faire au moins 25 lancers.

Partie C

$$1. P(T=1) = \frac{1}{4}; P(T=2) = \frac{3}{16}.$$

$$2. P(T=k) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

$$3. E(T) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \right) = \frac{1}{4} \times 16 = 4.$$

94 Partie A

$$1. \text{ a. On trouve : } \frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}.$$

$$\text{b. On trouve : } 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}.$$

$$\text{c. On trouve : } \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}.$$

$$\text{d. On trouve : } 0, 0, 0, 1.$$

$$2. M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ a. } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{b. } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2^n}{3^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}.$$

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{2^n}{3^n} & 0 & 0 & \frac{2^n}{3^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 & 1 - \frac{1}{2^n} \\ \frac{2^n}{3^n} - \frac{1}{3^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} & \frac{1}{3^n} & 1 + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} - \frac{2^n}{3^n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ a. } X_0 = (0 \ 0 \ 1 \ 0), \text{ et } X_n = X_0 \times M^n, \text{ d'où :}$$

$$X_n = \left(\frac{2^n}{3^n} - \frac{1}{3^n} \quad \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \quad \frac{1}{3^n} \quad 1 + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} - \frac{2^n}{3^n} \right).$$

$$\text{b. La suite } (X_n) \text{ converge vers } (0 \ 0 \ 0 \ 1).$$

c. Oui, car les deux compétiteurs vont être éliminés à un moment donné.

Partie B

$$1. P(T=1) = \frac{2}{3}.$$

$$2. \text{ a. } P(C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3^n}.$$

$$\text{b. } P(T > n) = \frac{1}{3^n}.$$

$$P(T=n) = \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^n}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n P(T=k) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) = 1. \text{ Cette limite est 1, car}$$

ils vont bien être éliminés à un instant ou à un autre.

$$4. \text{ a. En effet : } P(T=n) = P(T \geq n) - P(T > n) \text{ et donc :}$$

$$P(T=n) = P(T > n-1) - P(T > n).$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \sum_{k=1}^n k P(T=k) &= \sum_{k=1}^n k P(T > k-1) - \sum_{k=1}^n k P(T > k) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) P(T > j) - \sum_{k=1}^n k P(T > k) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} j P(T > j) + \sum_{j=0}^{n-1} P(T > j) - \sum_{k=1}^n k P(T > k) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \sum_{k=1}^n k P(T=k) = \sum_{j=0}^{n-1} P(T > j) - n P(T > n), \text{ et ainsi :}$$

$$n P(T > n) + \sum_{k=1}^n k P(T=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T > k).$$

$$\text{c. } n P(T > n) = \frac{n}{3^n}, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n P(T > n)) = 0.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(T > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} : \text{ la limite de } \sum_{k=0}^{n-1} P(T > k) \text{ en } +\infty \text{ est donc } \frac{3}{2}.$$

$$\text{D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n k P(T=k) \right) = \frac{3}{2}.$$

d. On a calculé l'espérance mathématique de T ; ainsi, le temps moyen de première élimination est 1,5.

$$95 \quad 1. M = \begin{pmatrix} r & p & q \\ q & r & p \\ p & q & r \end{pmatrix}.$$

2. a. Le point M reste toujours en A.

b. Le point M prend successivement les positions A, B, C, A, B, C, ...

c. Le point M a toujours la même probabilité de se trouver en A, B ou C.

$$3. \text{ a. } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b. } D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} - p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} - p \end{pmatrix}.$$

$$c. D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}-p\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}-p\right)^n \end{pmatrix}.$$

$$T^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a_n + 1 & 1 - a_n & 1 - a_n \\ 1 - a_n & 2a_n + 1 & 1 - a_n \\ 1 - a_n & 1 - a_n & 2a_n + 1 \end{pmatrix}, \text{ en posant } a_n = (1 - 3p)^n.$$

d. La probabilité que M soit en A à l'instant n est :

$$\frac{1}{3}(2(1 - 3p)^n + 1).$$

La probabilité que M soit en B à l'instant n est $\frac{1}{3}(1 - (1 - 3p)^n)$.

La probabilité que M soit en C à l'instant n est aussi $\frac{1}{3}(1 - (1 - 3p)^n)$.

e. Puisque $-\frac{1}{2} \leq 1 - 3p < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 3p)^n = 0$. On en déduit que la probabilité que M soit en A, B ou C tend vers $\frac{1}{3}$ quand n tend vers $+\infty$.

f. Ces résultats sont les mêmes, que M parte de A, B ou C.

Prises d'initiatives

96 Soit A l'état « le message est correct » et B l'état « le message est déformé en son contraire ». Alors, la matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Il existe un état stable car $p \neq 0$ et $1 - p \neq 0$.

Cet état stable est $\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right)$.

La probabilité que l'information transmise par le n -ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale devient égale à $\frac{1}{2}$ quand le nombre d'intermédiaires devient important.

97 Pour chaque chiffre du mot, la matrice de transition est la même que celle de l'exercice 96.

Donc, l'état stable est $\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right)$, et la probabilité qu'un chiffre soit inchangé à la fin du réseau est environ $\frac{1}{2}$.

Pour un mot de 5 chiffres, la probabilité est donc $\frac{1}{32}$.

