Satz 5.4.6 (Satz über implizite Funktionen)
Sei $F : G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, (x,y) \mapsto F(x,y)$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung sowie $(\mathring{x}, \mathring{y}) \in G$ ein Punkt mit $F(\mathring{x}, \mathring{y}) = 0$ und $D_y F(\mathring{x}, \mathring{y}) := \left(\frac{\partial F_j}{\partial y_k}(\mathring{x}, \mathring{y})_{i,k=1,\ldots,m}\right)$ regulär. Dann gilt:

1) Es ex. offene Umgebungen U von $\mathring{x}$, V von $\mathring{y}$ (mit $U \times V \subset G$) und eine $\mathcal{C}^1$ - Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x)$, so dass
$$\text{graph } f = \{(x, f(x) | x \in U\} = \{(x,y) \in U \times V | f(x,y) = 0\} = N_F(U \times V),$$
insbesondere ist $\forall_{x \in U} F(x, f(x)) = 0$.

2) Diese Abbildung besitzt die Funktionalmatrix
$$Df(x) = -(D_y F(x, f(x))^{-1} \cdot D_x F(x, f(x)) \text{ für } x \in U.$$

Bem:

1) Zur Interpretation: Ein i.A. nichtlineares Gleichungssystem
$$\begin{gathered} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{gathered}$$
lässt sich mit obigen Voraussetzungen innerhalb des Fensters $U \times V$ differenzierbar nach den Variablen $y_1 = f(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_m = f_m(x_1, \ldots, x_m)$ auflösen.

1) Für n = m = 1 lautet 2): $f'(x) = -\frac{\partial_x F(x, f(x))}{\partial_y F(x, f(x))}$

Bew:

a) Wir betrachten die $\mathcal{C}^1$-Hilfsfunktion. $\hat{F} : G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (x,y) \mapsto (x, f(x,y))$ mit regulärer Funktionalmatrix:
$$D\hat{F}(\mathring{x}, \mathring{y}) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ D_x F & D_y F \end{pmatrix} (\mathring{x}, \mathring{y}),$$
denn
$$\det D\hat{F}(\mathring{x}, \mathring{y}) = \det(E \cdot D_y(F))(\mathring{x}, \mathring{y}) = \det(D_y F(\mathring{x}, \mathring{y}) \neq 0.$$
Der lokale Umkehrsatz liefert: Es existiert eine offene Umgebung $\hat{U}$ von $(\mathring{x}, \mathring{y})$, insbesondere eine Produktumgebung $U \times V \subset \hat{U}$ um $(\mathring{x}, \mathring{y})$ und eine offene Umgebung W von $F(\mathring{x}, \mathring{y}) = (\mathring{x}, 0)$, so dass $F|_{U \times V} : U \times V \to W$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.
$\hat{F}^{-1}$ besitzt wie $\hat{F}$ die spezielle Gestalt $\hat{F}^{-1} : W \to U \times V, (x,z) \mapsto \hat{F}^{-1}(x,z) = (x, g(x,z))$ mit
$$\forall_{(x,z) \in W} \hat{F}(\hat{F}^{-1}(x,z)) = \hat{F}(x, g(x,z)) = (x, F(x, g(x,z)) \stackrel{!}{=} (x,z),$$
also
$$F(x, g(x,z)) = z \text{ für } (x,z) \in W, \tag{1}$$
$$g(x, F(x,y)) = y \text{ für } (x,y) \in U \times V. \tag{2}$$
Da $(\mathring{x}, F(\mathring{x}, \mathring{y}) = (\mathring{x}, 0)$ ein Innenpunkt von W, kann U so klein gewählt werden, dass $\forall_{x \in U}(x, 0) \in W$. Dann ist $\forall_{x \in U} g(x, 0) \in V$. Somit ist eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : U \to V, x \mapsto f(x) := g(x, 0)$ definiert mit
$$(1) \implies F(x, f(x)) = 0, \text{ d.h. graph } f \subset N_F(U \times V)$$
$$(2) \implies F(x,y) = 0 \implies f(x) = g(x,0) = y, \text{ d.h. } N_F(U \times V) \subset \text{ graph } f.$$

b) Anwendung der Kettenregel auf die $\mathcal{C}^1$-Abbildung $x \mapsto h(x) := F(x, f(x)) = 0$

$$\begin{aligned} Dh(x) &= DF(x, f(x)) \cdot \left(\begin{smallmatrix} E \\ Df(x) \end{smallmatrix}\right) = \\ &= (D_x F(x, f(x)), D_y F(x, f(x))) \cdot \left(\begin{smallmatrix} E \\ Df(x) \end{smallmatrix}\right) = D_x F(x, f(x)) + D_y F(x, f(x)) Df(x) = 0. \end{aligned}$$

Da $D\hat{F}(x, y)$ auf ganz $U \times V$ regulär, ist auch $D_y F(x, f(x))$ auf ganz U regulär (gleiche Determinante), kann eindeutig nach $Df(x)$ aufgelöst werden. $\square$