

Cheat Sheet

Wahrscheinlichkeitsrechnung

ideales Zufallsexperiment

1. gleiche Versuchsbedingungen
2. verschiedene Ergebnisse, wo nur eines der bekannten Ergebnisse möglich ist
3. nicht determiniert
4. beliebig oft wiederholbar

Ergebnisraum/Elementarereignis

1. Ω Ergebnisraum
2. $\omega \in \Omega$ Elementarereignis
3. $\{\omega_i\} \subseteq \Omega$ Ereignis

Sigma-Algebra

1. Ist $A \in \mathcal{A}$, so ist auch $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
2. $\Omega \in \mathcal{A}$
3. Wenn $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, dann auch die Vereinigung
4. Wenn Ω abzählbar unendlich, dann ist stets für $\Omega \neq \emptyset$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ eine Ereignisalgebra
5. die kleinste σ -Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$
6. größte $\mathcal{P}(\Omega)$
7. kleinste, die $A \subseteq \Omega$ enthält $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$
8. $\mathcal{A}(\mathcal{F}) =: \mathcal{B}^n$ heißt Borel'sche σ -Algebra

Wahrscheinlichkeitsmaß

$p(\Omega) = 1$

Wahrscheinlichkeitsraum

- (Ω, \mathcal{A}, p) Wahrscheinlichkeitsraum. Wenn Ω endlich groß und alle $p(\omega)$ gleich groß, heißt es Laplace-Raum
1. $p(\emptyset) = 0$
 2. $p(A) \leq 1 \forall A \in \mathcal{A}$
 3. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
 4. $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$
 5. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \leq p(A) + p(B)$
 6. $A \subset B \Rightarrow p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$

Urnenmodell

1. $(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \binom{n}{r} r!$
2. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$

	ohne Zurücklegen	mit Zurücklegen
ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	$ Kom_k^*(\Omega) = \binom{n}{k}$	$ Kom_k(\Omega) = \binom{n+k-1}{k}$
mit Berücksichtigung der Reihenfolge	$ Per_k^*(\Omega) = (n)_k$	$ Per_k(\Omega) = n^k$

bedingte Wahrscheinlichkeit

1. $p(A|B) = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$
2. $p(A \cap B) = p_B(A) \cdot p(B) = p_A(B) \cdot p(A)$
3. sind B_k disjunkt, dann gilt für beliebiges $A \in \mathcal{A}$: $p(A) = \sum p(B_k) \cdot p_{B_k}(A)$
4. $p(A) = p_B(A) \cdot p(B) + p_{\bar{B}}(A) \cdot p(\bar{B})$
5. Satz von Bayes $p_A(B_k) = \frac{p(B_k \cap A)}{p(A)} = \frac{p(B_k \cap A)}{\sum p(B_k) \cdot p_{B_k}(A)}$
6. Spezialfall 2: $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B) \cdot p_B(A) + p(\bar{B}) \cdot p_{\bar{B}}(A)}$

stochastisch unabhängig

1. $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$
2. sind A, B stochastisch unabhängig, so sind auch A, \bar{B} und \bar{A}, \bar{B} stochastisch unabhängig
3. ist $p(B) > 0$ und A, B stochastisch unabhängig $\Leftrightarrow p(A|B) = p(A)$
4. Wenn $p(A) = 0$, ist A, B stochastisch unabhängig für $\forall B \in \mathcal{A}$

Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

Zufallsvariable

1. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ZV
2. $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$
3. diskrete ZV: abzählbar unendlich oder endliche Werte annehmen kann
4. stetig, wenn ihre Verteilungsfunktion sich $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ darstellen lässt

5. X und Y heißen unabhängig, wenn für $X \leq x$ und $Y \leq y$ für beliebige $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ unabhängig sind, d.h. $p((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = p(X \leq x) \cdot p(Y \leq y)$

Verteilungsfunktion

1. $F(x) = p(X \leq x) = \sum p(X = x_j)$ heißt Verteilungsfunktion
2. $(X = x) := \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$
3. F ist monoton wachsend
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
5. F ist rechtsseitig stetig
6. $F_X(x) = p(X \leq x) = P^X((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$

Dichtefunktion

1. $f(x) \geq 0$
2. bis auf endlich viele Punkte stetig (quasi integrierbar über \mathbb{R})
3. $\int f(x) dx = 1$

Erwartungswert

1. $E(X) = \sum x_i p_i$
2. falls X stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f , so gilt $E(X) = \int x f(x) dx$
3. $E(aX + b) = aE(X) + b$
4. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
5. $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ für zwei unabhängige ZV
6. Wenn $X \leq Y$, dann $E(X) \leq E(Y)$

Varianz

1. $Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum (x_i - E(X))^2 p_i$
2. mit Dichtefunktion: $Var(X) = \int (x - E(X))^2 f(x) dx$
3. $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$
4. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
5. $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
6. sind X, Y unabhängig, so sind sie auch unkorreliert
7. Sind X_i unabhängig, so gilt $Var(X_i \dots) = \sum Var(X_i)$

Standardabweichung

1. $\sigma = \sigma_X = \sqrt{D^2(X)}$

Covarianz

1. $Cov(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

Korrelationskoeffizient

1. $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

1. Tschebyscheffsche Ungleichung $p(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

Verteilungen

Name	Verteilung $p(X = k)$	Erwartungswert $E(X)$	Varianz $Var(X)$
Binomial	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	$np(1-p)$
geometrische	$(1-p)^k \cdot p$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
negativ binomial	$\binom{k+r-1}{k} p^r q^k$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
hypergeometrisch	$\frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$	$n \cdot \frac{M}{N}$	$\frac{n}{\frac{M}{N}} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$
Poisson	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$		σ^2
Gamma	$\frac{x^{\Xi-1} e^{-x}}{\Gamma(\Xi)}$		
Student			

Grenzwertsätze

Standardisierte

$Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow E(Z) = 0$ und $Var(Z) = 1$

Satz Moivre-Laplace

Wenn $npq > 9$, dann kann sich die Binomialverteilung durch die Normalverteilung nähern

Lindenberg-Levy

$\lim_{n \rightarrow \infty} p\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$

Mehrdimensionale ZV

$p(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$ mit $F(x, y) = p(X \leq x, Y \leq y)$

Bei stetigen $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(r, s) dr ds, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Statistik

- arithmetische Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
- empirische Varianz

$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ • Median • Quantil • α -getrimmtes Mittel

Schätzer

- stetig: $L_x(\theta) = L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k; \theta)$
- diskret:

$L_x(\theta) = \prod_{k=1}^n p(X_k = x_k; \theta) \bullet L_x(\hat{\theta}(x)) = \sup\{L_x(\theta) | \theta \in \Theta\}$