

**Klausur zum Modul  
 „Lineare Algebra für Studierende  
 der Informatik“**

**Aufgabe 5.** Gegeben sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} -78 & 60 \\ -100 & 77 \end{pmatrix}.$$

**5.1.** Berechnen Sie die Determinante  $\det(A)$ , die Adjunkte  $\text{adj}(A)$  und die inverse Matrix  $A^{-1}$  von  $A$ .

3.0

**5.2.** Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A$ . Sei  $\lambda_{\min}$  der kleinste Eigenwert von  $A$ . Berechnen Sie eine Basis  $\mathcal{B}$  des Eigenraumes  $\ker(A - \lambda_{\min} E_2)$ .

3.0

**Aufgabe 6.** Gegeben sei  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom  $\chi_A(t) = \det(A - tE_3)$ , die Determinante  $\det(A)$ , die Adjunkte  $\text{adj}(A)$  und die inverse Matrix  $A^{-1}$  mit dem Verfahren von Leverrier-Faddeev.

8.0

**Leverrier-Faddeev.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Die Koeffizienten  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$  von

$$\chi_A(t) = \det(A - tE_n) = (-1)^n (t^n - p_1 t^{n-1} - p_2 t^{n-2} - \dots - p_n) \in \mathbb{R}[t]$$

lassen sich für  $k = 1, \dots, n$  sukzessive nach dem folgenden Schema berechnen:

$$B_0 = E_n, \quad A_k = AB_{k-1}, \quad p_k = \frac{\text{tr}(A_k)}{k}, \quad B_k = A_k - p_k E_n.$$

Dabei ist  $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Einheitsmatrix. Es gelten die Beziehungen

$$\text{tr}(A) = p_1, \quad \det(A) = (-1)^{n-1} p_n, \quad \text{adj}(A) = (-1)^{n-1} B_{n-1}, \quad B_n = 0.$$

Wenn  $A$  invertierbar ist, dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{p_n} B_{n-1}.$$