

# Análisis CBC

Exactas e Ingeniería

**SLM!** ~ política por mano propia



## Palabras previas

Este apunte surge para enfrentar una forma encubierta de arancel. Porque aunque la Universidad es gratuita hay muchas maneras indirectas de cobrarnos por estudiar, los que hacemos esta edición denunciaremos el abuso en el precio con que se venden otras ediciones, privatizando el trabajo docente, que en definitiva es propio de la Universidad y por tanto de todos.

Con el disfraz de la legitimidad, unos justifican el monopolio de la comercialización; con el pretexto de la organización, otros engañan con rebajas a medias; pero en cualquier caso, se nos separa a los estudiantes del CBC y a los de las carreras para sacar ventajas de una falsa división.

Por eso, no hacemos esta guía de copados que somos ni porque busquemos apuntes baratos y ya: este esfuerzo es la confirmación práctica de nuestra afirmación sobre el precio excesivo de otras ediciones; es el ejemplo de que un grupo de estudiantes hartos de que nos estafen somos capaces de encarar proyectos grandes con seriedad; es una invitación para que te animes a pelear por lo que creas justo, y es nuestra forma de luchar por la desarancelización completa de la UBA en una Argentina más solidaria.

En [www.slm.org.ar/cbc](http://www.slm.org.ar/cbc) podés bajarte **GRATIS** ésta y todas las guías que tenemos. La página tiene mucha más información sobre nosotros: te contamos quiénes somos, justificamos lo que acá puede parecerse descolgado, publicamos nuestras novedades, te ofrecemos varias formas de contactarnos y algunos etcéteras más.

Desde ya que también nos importa conocer tu opinión. Escribinos tus comentarios, correcciones o sugerencias sobre esta guía a [cbc@slm.org.ar](mailto:cbc@slm.org.ar) o, sobre cualquier otra cosa que para vos sea importante o quieras preguntarnos, a [hola@slm.org.ar](mailto:hola@slm.org.ar).

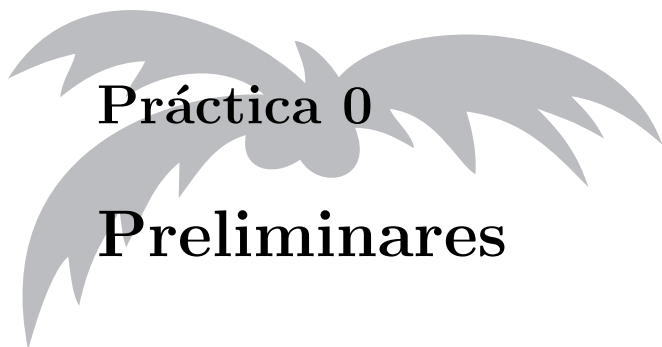
Conocenos por lo que hacemos, no por nuestros carteles.

Por último, esta guía no hubiera sido posible de no ser por el esfuerzo de SLM!, Nicolás y Patricia. GRACIAS.

# Índice general

<b>0. Preliminares</b>	<b>5</b>
<b>1. Funciones Reales</b>	<b>8</b>
1.1. Las funciones definen fenómenos . . . . .	8
1.2. Gráfico de funciones . . . . .	9
1.3. Las funciones más usuales . . . . .	10
1.4. Composición de funciones. Función inversa . . . . .	12
1.5. Funciones exponenciales y logarítmicas . . . . .	12
1.6. Funciones trigonométricas . . . . .	13
1.7. Otras funciones . . . . .	14
1.8. Problemas varios . . . . .	14
<b>2. Practica</b>	<b>16</b>
2.1. La recta real . . . . .	16
2.2. Números irracionales . . . . .	17
2.3. Supremo e ínfimo . . . . .	17
<b>3. Sucesiones</b>	<b>19</b>
3.1. Término general . . . . .	19
3.2. La noción de límite . . . . .	20
3.3. Cálculo de límites - Propiedades . . . . .	20
3.4. Sucesiones monótonas - Más propiedades . . . . .	21
3.5. Subsucesiones . . . . .	23
3.6. Sucesiones dadas por recurrencia . . . . .	23
3.7. Problemas varios . . . . .	24
<b>4. Límites y continuidad</b>	<b>27</b>
4.1. Límites en el infinito . . . . .	27
4.2. Límite en un punto . . . . .	28
4.3. Límites especiales . . . . .	29
4.4. Continuidad - Definición y propiedades . . . . .	30
4.5. Teorema de los valores intermedios . . . . .	31
4.6. Problemas varios . . . . .	32
<b>5. Derivadas</b>	<b>34</b>
5.1. Recta tangente . . . . .	34
5.2. Reglas de derivación - Función derivada . . . . .	35
5.3. Funciones derivables y no derivables . . . . .	36

5.4. Derivada de la función inversa . . . . .	37
5.5. Algunas Aplicaciones . . . . .	37
5.6. Derivadas sucesivas . . . . .	39
5.7. Problemas . . . . .	39
<b>6. Teorema del valor medio</b>	<b>41</b>
6.1. Teorema de Fermat, Rolle y Lagrange . . . . .	41
6.2. Consecuencias del Teorema del Valor Medio . . . . .	42
6.3. Regla de L'Hospital . . . . .	43
6.4. Problemas varios . . . . .	44
<b>7. Estudio de funciones</b>	<b>46</b>
7.1. Crecimiento y decrecimiento . . . . .	46
7.2. Extremos locales . . . . .	47
7.3. Asíntotas . . . . .	47
7.4. Concavidad y convexidad . . . . .	48
7.5. Construcción de curvas . . . . .	48
7.6. Cantidad de soluciones de una ecuación . . . . .	50
7.7. Continuidad en intervalos cerrados . . . . .	50
7.8. Problemas de optimización . . . . .	50
7.9. Problemas varios . . . . .	52
<b>8. Teorema de Taylor</b>	<b>55</b>
8.1. Polinomio de Taylor . . . . .	55
8.2. Expresión del resto . . . . .	57
8.3. Problemas de aproximación . . . . .	57
8.4. Problemas varios . . . . .	58
<b>9. Integrales</b>	<b>60</b>
9.1. La función área . . . . .	60
9.2. Teorema fundamental del cálculo . . . . .	61
9.3. Integración numérica . . . . .	62
9.4. Primitivas . . . . .	62
9.5. Cálculo de primitivas . . . . .	63
9.6. Fracciones simples . . . . .	65
9.7. Problemas varios . . . . .	65
<b>10. Aplicaciones de la integral</b>	<b>67</b>
10.1. Área entre curvas . . . . .	67
10.2. Ecuaciones diferenciales . . . . .	68
10.3. Sólido de revolución . . . . .	69
10.4. Problemas varios . . . . .	69
<b>11. Series</b>	<b>72</b>
11.1. Término general y sumas parciales . . . . .	72
11.2. Series geométricas y series telescópicas . . . . .	72
11.3. Criterios de convergencia . . . . .	73
11.4. Series de potencia . . . . .	74
11.5. Problemas varios . . . . .	75
<b>12. Programa</b>	<b>77</b>



## Práctica 0

# Preliminares

**Ejercicio 0.1** Calcule

(a)  $\frac{2}{3} - (-\frac{1}{2} + 1 - (-\frac{1}{2} - \frac{5}{12}) - 2) - \frac{1}{4} - (-1 - (2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{4}) + \frac{2}{3})$

(b)  $\frac{2}{5} + (-2) \cdot (-\frac{1}{2} + 1 - (\frac{1}{5} - \frac{3}{10}) - \frac{1}{4})$

**Ejercicio 0.2** Calcule

(a)  $\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2\right)^{-2}$

(b)  $\left((4 - \frac{1}{2})^2 + (-3 - \frac{1}{2})^2\right)^{1/2}$

**Ejercicio 0.3** Calcule

(a)  $\frac{3^4 \cdot 3^7}{3^{12}}$

(b)  $\sqrt{\frac{(5 \cdot 10^{-6})(4 \cdot 10^2)}{8 \cdot 10^5}}$

(c)  $81^{3/4} + \left(\frac{16}{49}\right)^{-1/2} + \left(\frac{64}{27}\right)^{2/3} + 32^{-4/5} + (2^{-6})^{2/3} + 3^{7/2} \cdot 3^{1/2}$

(d)  $\sqrt{5^2} + \sqrt{(-3)^2} + \sqrt[4]{(-9)^2} + \sqrt[3]{-8/27} + \sqrt[3]{81}$

**Ejercicio 0.4** Si  $x = -2$ ;  $y = 2/3$ ;  $z = -3/2$  calcule

(a)  $x(y + z)$

(b)  $xy + z$

(c)  $x + yz$

(d)  $(x + y)z$

**Ejercicio 0.5** Pruebe las siguientes identidades

(a)  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$

(b)  $\frac{n^3 + 3n^2 + n}{n^2 + 1} = \frac{n^2 + 3n + 1}{n + 1/n}$

**Ejercicio 0.6** Resuelva

(a)  $2x + 1 = -1$

(e)  $\frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{3}$

(b)  $-5x + 2 = -7$

(c)  $-2(3x - 1) + 4 = 7x - 3$

(d)  $\frac{9x-3}{-2x+4} = 2$

(f)  $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{2(x-1)} = \frac{6x-2}{3-3x}$

**Ejercicio 0.7** Muestre que el número  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  es solución de la ecuación  $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ .**Ejercicio 0.8** Escriba como intervalo o unión de intervalos las soluciones de las siguientes desigualdades

(a)  $2x - 1 \leq 2$

(e)  $\frac{2x-1}{x-3} < 1$

(b)  $-2x + 1 \geq 2$

(c)  $2x + 11 > 10 - 6x$

(f)  $\frac{x-3}{x-1} > 1$

(d)  $\frac{2}{2-x} > 4$

**Ejercicio 0.9** Escriba de menor a mayor los siguientes números

$$\frac{25}{2}, \quad \frac{38}{3}, \quad \frac{64}{41}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{-6}{11}, \quad \frac{-4}{7}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{5}{-2}$$

**Ejercicio 0.10** Demuestre que si  $a$  y  $b$  son números no negativos vale la desigualdad

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}.$$

Exhiba un ejemplo donde la desigualdad es estricta y otro donde valga la igualdad.

**Ejercicio 0.11** alguna de las siguientes relaciones no valen en general. Analice en qué casos son válidas.

(a)  $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

(e)  $x^2 > x$

(b)  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(f)  $x^2 < x$

(c)  $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$

(g)  $x^2 \geq 0$

(d)  $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

(h)  $x^3 \geq 0$

(i)  $2^x > 1$

(k)  $2^x > 0$

(j)  $\log(x^2) = 2 \log x$

(l)  $\log(x + 10^2) = 2 + \log x$

**Ejercicio 0.12** Resuelva

(a)  $4^{x-2} = 1$

(c)  $\log(x + 7) = 100$

(b)  $2^{5x-3} = \frac{1}{8}$

(d)  $\log(x^2 - 3x + 1) = 0$

**Ejercicio 0.13** Represente en plano los siguientes puntos:

$$(1, 3), (3, 1), (-1, 2), (-1, -5), (0, 1), (1, 0), (3, 3), (-1, -1)$$

Para cada uno de estos puntos represente los puntos simétricos respecto de:

(a) el eje x,

(c) el origen de coordenadas.

(b) el eje y,

**Ejercicio 0.14** Represente en el plano los siguientes conjuntos de  $\mathbb{R}^2$ 

(a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 1\}$

(c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0, y = 2\}$

(b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 2\}$

(d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 1, y < 1\}$

# Práctica 1

## Funciones Reales

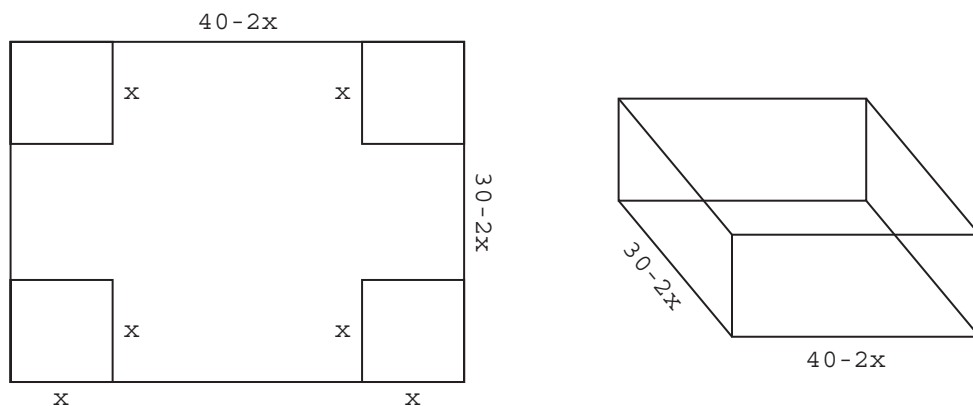
### 1.1. Las funciones definen fenómenos

**Ejercicio 1.1** Haga un gráfico que refleje la evolución de la temperatura del agua a lo largo del tiempo atendiendo la siguiente descripción:

“Saqué del fuego una cacerola con agua hirviendo. Al principio, la temperatura bajó con rapidez, de modo que a los 5 minutos estaba en  $60^\circ$ . Luego fue enfriándose con más lentitud. A los 20 minutos de haberla sacado estaba a  $30^\circ$  y 20 minutos después seguía teniendo algo más de  $20^\circ$ , temperatura de la cual no bajó, pues era la temperatura que había en la cocina”.

El gráfico que hizo, ¿es el único que respeta las consignas anteriores?

**Ejercicio 1.2** Con una lámina rectangular de  $40 \times 30$  queremos hacer una caja como muestra la figura:



- Busque la expresión del volumen de la caja en función de  $x$ .
- ¿Cuál es el dominio?
- Haga un gráfico aproximado a partir de una tabla de valores.

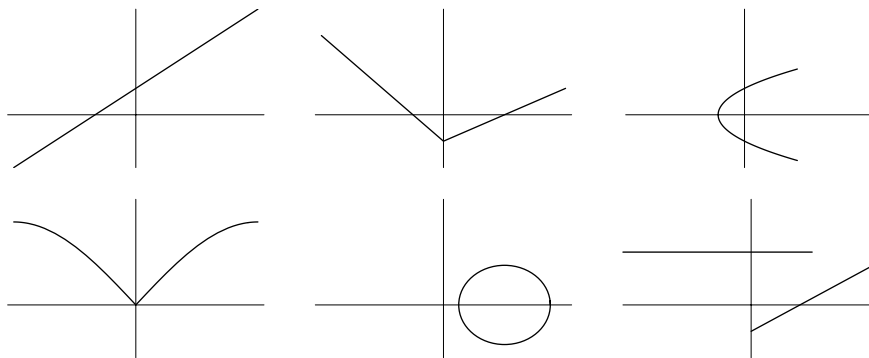


**Ejercicio 1.3** Entre todos los rectángulos de perímetro 20, halle la función que relaciona la base  $x$  con la altura  $y$ . Haga un gráfico que la represente. ¿Cuál es el dominio?

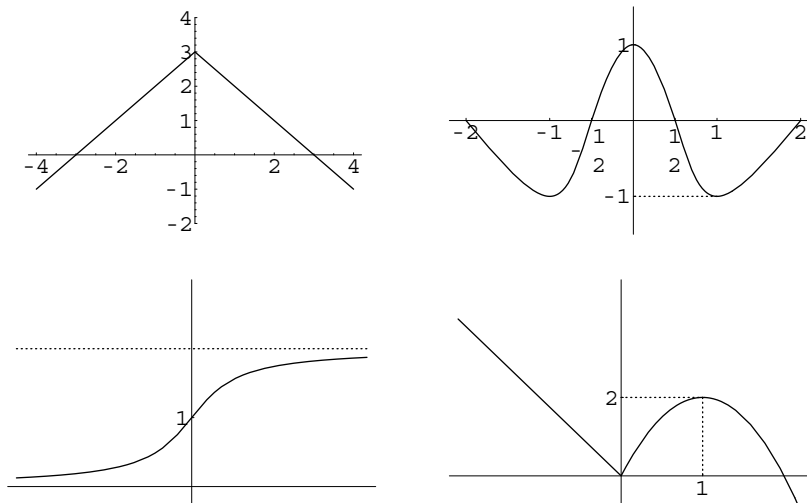
**Ejercicio 1.4** Halle el área de un triángulo rectángulo isósceles en función del cateto. Dibuje el gráfico de la función hallada a partir de una tabla de valores. Indique cuál es el dominio.

## 1.2. Gráfico de funciones

**Ejercicio 1.5** Dados los siguientes conjuntos del plano, determine, en cada caso, si existe una función cuyo gráfico sea el dado:



**Ejercicio 1.6** Dados los siguientes gráficos de funciones, determine, en cada caso, en qué intervalos es creciente, en qué intervalos es decreciente, en qué punto alcanza su máximo, cuál es dicho valor máximo, en qué punto alcanza su mínimo y cuál es el valor mínimo.



**Ejercicio 1.7** Dibuje una función que sea creciente en los intervalos  $(-\infty, -1)$  y  $(2, +\infty)$ . Además, que el valor máximo sea 4 y se alcance en  $x = -1$  y que el valor mínimo sea  $-3$  y se alcance en  $x = 2$ .

### 1.3. Las funciones más usuales

#### Ejercicio 1.8

(a) Encuentre en cada caso una función lineal que satisfaga:

I-  $f(1) = 5; \quad f(-3) = 2$

II-  $f(-1) = 3; \quad f(80) = 3$

III-  $f(0) = 4; \quad f(3) = 0$

IV-  $f(0) = b; \quad f(a) = 0 \quad a \text{ y } b \text{ fijos.}$

(b) Calcule en i- y en ii-  $f(0)$ . Calcule en iii-  $f(-2)$ .

(c) Encuentre la pendiente de las rectas que son gráficas de las funciones lineales dadas en (a). Haga un gráfico de tales rectas.

**Ejercicio 1.9** Halle la ecuación de la recta de pendiente  $m$  que pasa por el punto  $p$ , siendo:

(a)  $p = (2, 3) \quad m = 1$

(c)  $p = (3, -4) \quad m = -2$

(b)  $p = (1, 5) \quad m = 0$

(d)  $p = (0, b) \quad m = 1$

Haga el gráfico de cada una de ellas. Decida cuáles son crecientes y cuáles decrecientes.

**Ejercicio 1.10** Encuentre la función lineal  $g$  que da la temperatura en grados Fahrenheit, conocida la misma en grados Celsius, sabiendo que  $0^\circ\text{C} = 32^\circ\text{F}$  y  $100^\circ\text{C} = 212^\circ\text{F}$ . Recíprocamente, encuentre la función  $h$  que da la temperatura en grados Celsius, conocida la misma en grados Fahrenheit. Compruebe que  $g(h(x)) = h(g(x)) = x$

**Ejercicio 1.11** Trace el gráfico de las siguientes funciones cuadráticas:

(a)  $f(x) = x^2$

(c)  $f(x) = x^2 - 3$

(b)  $f(x) = -2x^2$

(d)  $f(x) = -(x - 5)^2$

Determine en cada caso el conjunto imagen.

**Ejercicio 1.12** Para las siguientes funciones cuadráticas determine en qué intervalo crece, en qué intervalo decrece, dónde es positiva, dónde negativa, en qué puntos se anula y en qué punto alcanza su extremo:

(a)  $f(x) = -2x^2$

(d)  $f(x) = x^2 + 2x + 1$

(b)  $f(x) = -2x(x - 3)$

(c)  $f(x) = -2x^2 + x$

(e)  $f(x) = -2(x + 3)(x - 5)$

**Ejercicio 1.13** Se arroja una pelota desde el suelo y la altura, en metros, viene dada por la función  $h(t) = -5t^2 + 10t$ , siendo  $t$  el tiempo medido en segundos.

(a) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?

(b) ¿Cuál es dicha altura?

**Ejercicio 1.14** Represente gráficamente las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = x^3$

(c)  $f(x) = x^3 - 1$

(b)  $f(x) = (x - 2)^3$

(d)  $f(x) = x^4$

Analice en cada caso la monotonía.

**Ejercicio 1.15** Represente gráficamente las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = \frac{4}{x}$

(d)  $f(x) = \frac{4}{x - 3} + 2$

(b)  $f(x) = -\frac{4}{x}$

(e)  $f(x) = \frac{4x + 5}{x - 2}$

(c)  $f(x) = \frac{4}{x - 3}$

(f)  $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 1}$

Indique en cada caso el dominio de la función. Indique también en qué intervalos es creciente, y en cuáles decreciente.

**Ejercicio 1.16** Represente gráficamente las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = \sqrt{x}$

(c)  $f(x) = \sqrt{x + 3}$

(b)  $f(x) = -\sqrt{x}$

(d)  $f(x) = \sqrt{(x - 2)^2}$

Indique en cada caso el dominio de la función. Analice la monotonía.

**Ejercicio 1.17** Halle el dominio de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

(c)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

(b)  $f(x) = \sqrt{x - 8}$

(d)  $f(x) = \sqrt{x(x - 1)}$

## 1.4. Composición de funciones. Función inversa

**Ejercicio 1.18** Considere las funciones reales definidas por las fórmulas:

$$f(x) = 2x^2 + 5x$$

$$g(x) = \frac{1}{x+3}$$

$$h(x) = 2x - 6$$

(a) Calcule si es posible:

$$(f \circ f)(-1)$$

$$(f \circ h)(1)$$

$$(g \circ f)(-1)$$

$$(h \circ g)(2)$$

(b) Halle fórmulas para las composiciones que se indican a continuación:

$$f \circ g$$

$$g \circ f$$

$$(f \circ g) \circ h$$

$$f \circ h$$

$$f \circ f$$

(c) ¿ $(f \circ g)$  y  $(g \circ f)$  son la misma función?

**Ejercicio 1.19** Halle la función inversa de:

(a)  $f(x) = 3x - 5$

(d)  $f(x) = x^3$

(b)  $f(x) = 2x^2 - 1, \quad x \geq 0$

(e)  $f(x) = x^2 - 6x + 4, \quad x \geq 3$

(c)  $f(x) = 3 - \sqrt{x+5}$

(f)  $f(x) = x^2 - 6x + 4, \quad x \leq 3$

**Ejercicio 1.20** Pruebe que la función  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$  satisface  $f(\frac{1}{x}) = \sqrt{x} \cdot f(x)$  para todo  $x$  positivo.

## 1.5. Funciones exponenciales y logarítmicas

**Ejercicio 1.21** Dadas las funciones exponenciales  $f(x) = r^x$  ( $r = 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$ ):

(a) haga el gráfico de cada una de ellas;

(b) determine el dominio y la imagen;

(c) analice la monotonía.

**Ejercicio 1.22** Si notamos  $\log_r(x)$  a la función inversa de  $r^x$  ( $r > 0$ ,  $r \neq 1$ )

- (a) Haga el gráfico de  $y = \log_r(x)$  para  $r = 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$ .
- (b) Determine el dominio y la imagen.
- (c) Analice la monotonía.

**Ejercicio 1.23** Encuentre el dominio de las siguientes funciones:

- (a)  $f(x) = \ln(2x)$
- (b)  $f(x) = \ln(3x^2 + 2x)$

En cada caso determine los valores de  $x$  para los cuales  $f(x) = 1$ .

**Ejercicio 1.24** Halle la función inversa de:

- (a)  $f(x) = \ln(2x)$
- (c)  $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
- (e)  $f(x) = e^{x+3}$
- (b)  $f(x) = \ln(x^2 + 4)$
- (d)  $f(x) = 2^{\sqrt{x}} + 5$
- (f)  $f(x) = e^{x^2}$ ,  $x > 0$

## 1.6. Funciones trigonométricas

**Ejercicio 1.25** A partir de los gráficos de  $g(x) = \sin x$  y  $h(x) = \cos x$  haga el gráfico de:

- (a)  $f(x) = \sin(x - \pi)$
- (c)  $f(x) = \cos(2x + \pi)$
- (b)  $f(x) = \cos(2x)$
- (d)  $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

**Ejercicio 1.26** Determine todos los valores de  $x \in \mathbb{R}$  tales que:

- (a)  $\sin x = \frac{1}{2}$
- (d)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- (b)  $\cos x = \frac{3}{2}$
- (e)  $\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$
- (c)  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$
- (f)  $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

**Ejercicio 1.27** Haga el gráfico de las funciones inversas de  $g(x) = \sin x$  y  $h(x) = \cos x$ . Determine los valores de  $x \in \mathbb{R}$  tales que:

- (a)  $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$
- (c)  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$
- (b)  $\arccos x = \pi$

## 1.7. Otras funciones

**Ejercicio 1.28** Represente las siguientes funciones:

- (a)  $f(x) = |x + 5|$  (c)  $f(x) = |\operatorname{sen} x|$   
 (b)  $f(x) = |x - 5|$  (d)  $f(x) = |e^x|$

**Ejercicio 1.29**

- (a) Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -1 \\ -x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 3x-4 & \text{si } 1 < x \end{cases}$ , calcule  $f(-3)$ ,  $f(1)$  y  $f(4)$ . Determine para qué valores de  $y$  la ecuación  $f(x) = y$  tiene solución. ¿Cuándo es única?
- (b) Idem para la función  $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x < -4 \\ \frac{1}{x+2} & \text{si } x \geq -4 \end{cases}$ .

**Ejercicio 1.30** El impuesto a la riqueza es igual al \$0,50 por cada mil pesos por encima de \$100 mil y de \$1 por cada mil pesos por encima de \$200 mil. Escriba el monto impuesto en función de la riqueza. ¿Cuál es la riqueza de alguien que paga \$530 de impuesto?

## 1.8. Problemas varios

**Problema 1.1** La función  $f$  es lineal y la función  $g$  es cuadrática. Los gráficos de ambas funciones se cortan en los puntos  $p = (-1, 2)$  y  $q = (2, 0)$ . Además  $g$  se anula en  $x = -2$ . Halle las fórmulas de  $f$  y  $g$  y encuentre el conjunto de los  $x$  tales que  $f(x)$  es mayor que  $g(x)$ . Haga un gráfico.

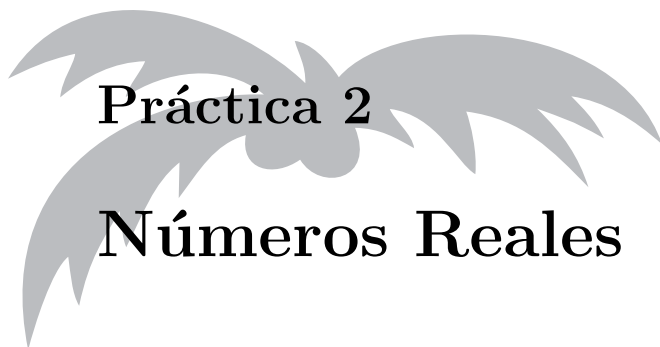
**Problema 1.2** Se definen  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  y  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Pruebe que

- (a)  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$   
 (b) Los gráficos de ambas funciones no se cortan.

**Problema 1.3** Un cántaro vacío con capacidad para 20 litros pesa 2550 gramos.

- (a) Represente la función que da el peso total del cántaro en función de la cantidad de agua, en litros, que contiene. Halle su fórmula. ¿Cuál es el dominio?
- (b) Si disponemos de 3 litros de mercurio, cuyo peso total es de 40,8 kg, repita el ítem anterior sustituyendo el agua por el mercurio.
- (c) Si se representan las funciones de (a) y (b) en los mismos ejes, ¿qué significa el punto de intersección?
- (d) ¿Es cierto que a doble de líquido corresponde doble peso total?

**Problema 1.4** Si  $f(n) = \frac{2^{3n}}{4n+1}$ , calcule  $\frac{f(n+1)}{f(n)}$  y obtenga su valor numérico para  $n = 1, 2, 3, 4$  y  $5$ .



# Práctica 2

## Números Reales

### 2.1. La recta real

**Ejercicio 2.1** Represente en la recta numérica

- (a)  $-5, -1, 3, 6, \frac{3}{8}, 1 + \frac{2}{5}, 1 - \frac{2}{5}, -\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1$
- (b)  $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, -\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, (3,14), (-3,14)$

**Ejercicio 2.2** Represente en la recta numérica los siguientes conjuntos (escribalos como intervalos o como unión de intervalos).

- (a) Todos los números reales mayores que  $-1$ .
- (b) Todos los números reales menores o iguales que  $2$ .
- (c) Todos los números reales que distan del  $0$  menos que  $3$ .
- (d)  $\{x \in \mathbb{R} / 2x - 3 > 5\}$
- (e)  $\{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 3\}$
- (f)  $\{x \in \mathbb{R} / 1 < 2x - 3 < 5\}$
- (g)  $\{x \in \mathbb{R} / x(2x - 3) > 0\}$
- (h)  $\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 36 < 0\}$
- (i)  $\{x \in \mathbb{R} / x^3 - x < 0\}$
- (j)  $\{x \in \mathbb{R} / 1 + \frac{2}{x} < 3\}$
- (k)  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} < \frac{4}{x}\}$
- (l)  $\{x \in \mathbb{R} / |x| < 3\}$
- (m)  $\{x \in \mathbb{R} / |x - 2| < 3\}$
- (n)  $\{x \in \mathbb{R} / |x + 2| < 3\}$
- (ñ)  $\{x \in \mathbb{R} / |x| > 3\}$

**Ejercicio 2.3** Represente en la recta los siguientes conjuntos

- (a)  $[2, 4] \cap [3, 6]$
- (b)  $[2, 4] \cup [3, 6]$
- (c)  $(-\infty, 3) \cap (1, +\infty)$
- (d)  $(-1, 3) \cap [3, +\infty)$
- (e)  $(-1, 3) \cup [3, +\infty)$
- (f)  $(-1, 3) \cup (3, 5)$



**Ejercicio 2.4** Represente en la recta los siguientes conjuntos

- (a)  $\{n \in \mathbb{N} / 4 \leq n < 6\}$  (c)  $\left\{x = \frac{n}{n+1} / n \in \mathbb{N} \wedge n < 6\right\}$   
 (b)  $\{n \in \mathbb{N} / n < 13\}$  (d)  $\left\{x = \frac{n}{n+1} / n \in \mathbb{N}\right\}$

## 2.2. Números irracionales

**Ejercicio 2.5** Demuestre que  $\sqrt{3}$  no es racional

**Ejercicio 2.6** Dados los números 3, 14 y  $\pi$

- (a) Halle un número racional comprendido entre ambos.  
 (b) Halle un número irracional comprendido entre ambos (ayuda: escriba su desarrollo decimal).

## 2.3. Supremo e ínfimo

**Ejercicio 2.7** Considere los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\right\} & F &= \{1, 2, 3, 4\} \\ B &= \left\{\frac{n}{n+1} / n \in \mathbb{N}\right\} & G &= \{5; 5, 9; 5, 99; 5, 999; \dots\} \\ C &= (0; 7) & H &= \{x \in \mathbb{R} / |x - 2| < 1\} \\ D &= \mathbb{N} & I &= \{x \in \mathbb{R} / |x| > 3\} \\ E &= \left\{n - \frac{1}{n^2} / n \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

En cada caso:

- (a) Determine si 7 es una cota superior.  
 (b) Determine si 0 es una cota inferior.  
 (c) Decida si está acotado superiormente.  
 (d) Decida si está acotado inferiormente.  
 (e) En caso afirmativo, encuentre el supremo y/o el ínfimo del conjunto. Decida si alguno de ellos es el máximo y/o el mínimo del conjunto correspondiente.

**Ejercicio 2.8** Considerere el conjunto  $B$  del conjunto anterior.

- (a) Muestre que 1 es cota superior de  $B$ .
- (b) Exhiba un elemento  $b$  de  $B$  que satisfaga  $0,9 < b < 1$ .
- (c) Exhiba un elemento  $b$  de  $B$  que satisfaga  $0,99 < b < 1$ .

**Ejercicio 2.9** Considerere el conjunto  $P = \left\{ \frac{2n-1}{n+2} / n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- (a) Muestre que 2 es una cota superior de  $P$ .
- (b) Exhiba un elemento  $p$  de  $P$  que satisfaga  $1,99 < p < 2$ .
- (c) Muestre que si  $t < 2$  existe un elemento  $p$  de  $P$  que satisface  $t < p < 2$ . Deduzca entonces que  $\sup P = 2$ .

**Ejercicio 2.10** Muestre que existe un número natural  $n$  que satisface  $\frac{1}{n} < 0,001$ . En general, muestre que, cualquiera sea  $x$  positivo, existe un número natural  $n$  que satisface  $\frac{1}{n} < x$ . Deduzca de aquí que  $\inf \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \right\} = 0$ .

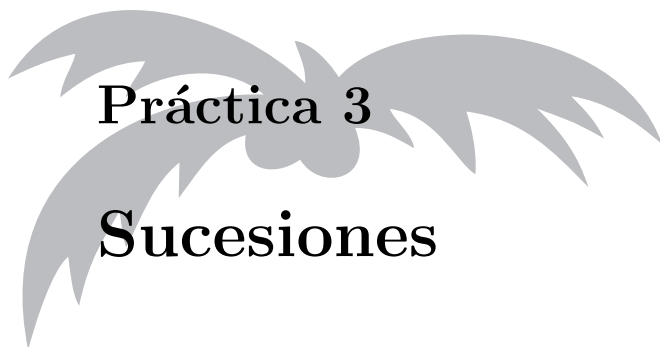
**Ejercicio 2.11** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos de números reales no vacíos y acotados de modo que  $A \subset B$ . Ordene de menor a mayor los siguientes números:

$$\sup A, \quad \sup B, \quad \inf A, \quad \inf B$$

Escriba un ejemplo donde  $\sup A = \sup B$  y otro donde la desigualdad es estricta.

**Ejercicio 2.12** Determine, en caso de que existan, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes conjuntos:

- (a)  $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 < 0\}$
- (b)  $B = \{y = x^2 - 3x + 2, x \in (0, 2)\}$
- (c)  $C = \{y = x^2 - 3x + 2, x \in \mathbb{R}\}$



## Práctica 3

# Sucesiones

### 3.1. Término general

**Ejercicio 3.1** ⚡ Escriba los primeros cinco términos de las siguientes sucesiones:

(a)  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

(c)  $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

(b)  $b_n = \frac{2^{n-1}}{(2n-1)^3}$

(d)  $d_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}$

**Ejercicio 3.2** ⚡ Para cada una de las siguientes sucesiones:

I.  $1, 2, 3, 4, \dots$

VI.  $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \dots$

II.  $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$

VII.  $1, -1, 1, -1, \dots$

III.  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$

VIII.  $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$

IV.  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$

IX.  $1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \dots$

V.  $-1, 2, -3, 4, \dots$

X.  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$

- (a) Encuentre el término 100 y el término 200.
- (b) Halle, si es posible, el término general  $a_n$
- (c) Clasifíquelas en convergentes o no convergentes.

### 3.2. La noción de límite

**Ejercicio 3.3** Halle un valor de  $n \in \mathbb{N}$  a partir del cual haya certeza de que:

- (a)  $n^2 - 5n - 8$  sea mayor que (i) 10 (ii) 1000
- (b)  $2^n - 100$  sea mayor que (i) 10 (ii) 1000
- (c)  $\frac{(-1)^n}{n+1} + 2$  esté entre (i) 1,9 y 2,1 (ii) 1,999 y 2,001
- (d)  $\frac{\sin n}{n}$  esté entre (i)  $-0,1$  y  $0,1$  (ii)  $-0,001$  y  $0,001$

**Ejercicio 3.4** Considere la sucesión  $a_n = \frac{n+1}{n-1000,2}$ . A partir de que el  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  responda cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, explicando en cada caso, en qué se basa para responder.

- (a) Existe un  $n \in \mathbb{N}$  a partir del cual  $a_n > 0$ .
- (b) Existe un  $n \in \mathbb{N}$  a partir del cual  $a_n > 1/2$ .
- (c) Existe un  $n \in \mathbb{N}$  a partir del cual  $a_n < 1$ .
- (d) Existe un  $n \in \mathbb{N}$  para el cual  $a_n = 1$ .
- (e) La sucesión  $a_n$  está acotada.

Escriba las afirmaciones que correspondan, con la nomenclatura pctn.

### 3.3. Cálculo de límites - Propiedades

**Ejercicio 3.5** Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones. En cada caso, explique las propiedades que usa para obtener su respuesta.

- (a)  $a_n = \frac{-4n^3 + 2n^2 - 3n - 1}{5n^2 + 4}$  (e)  $a_n = \frac{4n^2 + 3}{3n^2 + 4000}$
- (b)  $a_n = \frac{7n^3 - 5}{n + 3}$  (f)  $a_n = \frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n}$
- (c)  $a_n = \frac{\sqrt{n^3} + 2}{n^2 - 1}$  (g)  $3, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{8}{5}, \frac{7}{3}, \frac{16}{9}, \frac{9}{4}, \frac{32}{17}, \frac{11}{5}, \frac{64}{33}, \dots$
- (d)  $a_n = \sqrt{\frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 2}}$  (h)  $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \dots$

**Ejercicio 3.6** Continúe con las siguientes sucesiones

- (a)  $\frac{n^2 - 5n + 7}{n + 3} + \frac{n^2 + 5}{n + 1}$  (c)  $\sqrt{n^2 + n - 2} + n$
- (b)  $\frac{n^2 - 5n + 7}{n + 3} - \frac{n^2 + 5}{n + 1}$  (d)  $\sqrt{n^2 + n - 2} - n$
- (e)  $\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - n + 3}$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(f)} & \sqrt{\frac{2n^2-1}{3n^2+2}} + \frac{3n-1}{2n+3} \qquad \text{(i)} \qquad \frac{n}{\sqrt{n+1}-n} \\
 \text{(g)} & \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \\
 \text{(h)} & n \cdot (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \qquad \text{(j)} \qquad \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n})
 \end{array}$$

**Ejercicio 3.7** Muestre que cada una de las siguientes situaciones constituye una indeterminación. Para ello exhiba por lo menos dos ejemplos donde los límites sean distintos (finitos o infinitos). Suponga, cuando haga falta, condiciones suficientes para que las sucesiones estén bien definidas para todo  $n$ .

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \quad \text{(i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \quad \text{(ii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \\
 \text{(b)} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad \text{(i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{(ii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} \\
 \text{(c)} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \quad \text{(i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) \quad \text{(ii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{a_n}
 \end{array}$$

**Ejercicio 3.8** Marque, en cada caso, la única respuesta correcta.

- (a) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  y  $b_n$  oscila finitamente entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$   
☐ oscila    ☐ tiende a más infinito    ☐ es una indeterminación
- (b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  y  $a_n > 0$  entonces hay certeza de que  
☐  $L > 0$     ☐  $L = 0$     ☐  $L \geq 0$     ☐ ninguna de las anteriores
- (c) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$   
☐ es igual a 0    ☐ tiende a más infinito  
☐ es una indeterminación    ☐ no existe
- (d) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n}$   
☐ es igual a 0    ☐ tiende a más infinito  
☐ es una indeterminación    ☐ no existe

### 3.4. Sucesiones monótonas - Más propiedades

**Ejercicio 3.9** Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones. Como siempre, explique las propiedades que usa para llegar al resultado.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \frac{\sin n}{n} \qquad \text{(e)} \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^n \\
 \text{(b)} & (-1)^n (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \qquad \text{(f)} \qquad \frac{2^n + 5}{3^n} (-1)^n \\
 \text{(c)} & (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \text{(g)} \qquad (1, 5)^n \\
 \text{(d)} & (-1)^n (\sqrt{n+2} + \sqrt{n}) \qquad \text{(h)} \qquad (0, 95)^n
 \end{array}$$

- |   |  |
|---|--|
| (i) $\frac{3^n + 4^{n+1} + 2}{2^{2n} + 2^n}$      | (o) $\left(1 + (-1)^n\right)^n \frac{1}{n}$                        |
| (j) $\sqrt[n]{n^2 + 1}$                           | (p) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\left(\frac{8}{11}\right)^n}$       |
| (k) $\sqrt[n]{\frac{3n^3 + 2n^2 + 1}{n^2 + 2}}$   | (q) $\left(\frac{8}{11}\right)^{\left(\frac{5}{3}\right)^n}$       |
| (l) $\sqrt[n]{\frac{5n + 1}{3n + 1}}$             | (r) $\left(\frac{8}{11}\right)^{\left(\frac{5}{3}\right)^{1/n}}$   |
| (m) $\left(\frac{n^2 + 2}{5n^2 + 3}\right)^{1/n}$ | (s) $\frac{3^{2n+1} + \cos n}{2 \cdot 9^n + \operatorname{sen} n}$ |
| (n) $\sqrt[n]{2^n + 5^n}$                         |  |
| (ñ) $(n^4 + 1)^{1/2n}$                            |  |

**Ejercicio 3.10** Calcule el límite de las siguientes sucesiones:

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\left(\frac{3n + 1}{3n - 5}\right)^n$        | (f) $\left(\frac{2n^2 - 5n}{3n - 1}\right)^{n^3 + 2n}$   |
| (b) $\left(\frac{4n + 1}{3n - 5}\right)^n$        | (g) $\left(\frac{3n^2 + 2n + 1}{3n^2 - 5}\right)^{\frac{n^2 + 2}{2n + 1}}$                               |
| (c) $\left(\frac{3n - 2}{3n + 1}\right)^{2n + 1}$ | (h) $\left(1 + \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}\right)^n$  |
| (d) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$            | (i) $\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{2}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)}}$ |
| (e) $\left(1 + \frac{17}{n}\right)^n$             | (j) $\left(1 + \frac{\cos n}{5n^3 + 1}\right)^{2n^2 + 3}$  |

**Ejercicio 3.11** Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones:

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| (a) $\frac{n}{2^{n+1}}$              | (f) $\frac{2^{2n+1}}{(2n)!}$                   |
| (b) $\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$ | (g) $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n}\right)^n$ |
| (c) $\frac{n2^n}{n!}$                | (h) $\frac{n^2}{n!}$                           |
| (d) $\sqrt[n]{n!}$                   | (i) $\frac{n!}{n^n}$                           |
| (e) $\frac{n^3 + n!}{2^n + 3^n}$     | (j) $\frac{n^4 4^n n!}{n^n}$                   |

**Ejercicio 3.12** En cada caso, la sucesión  $a_n$  se encuentra sujeta a las condiciones indicadas. Analice la existencia de límite y, en caso afirmativo, calcúlelo.

- (a)  $\frac{1}{a_n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$  (c)  $2 - \frac{3}{2^n} < 5 - 2a_n \leq 1 + \sqrt[n]{4}$
- (b)  $0 < 3a_n + 2 < \frac{2^n n!}{n^{2n+1}}$  (d)  $2a_n + 6 > \frac{1}{\sqrt[n]{n+1} - 1}$

### 3.5. Subsucesiones

**Ejercicio 3.13** Dada la sucesión  $1, 3, 5, 7, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, \dots$ , escriba el término general de  $a_{2n}$ ,  $a_{4n}$  y  $a_{8n-3}$ . Encuentre dos subsucesiones convergentes.

**Ejercicio 3.14** Usando subsucesiones, pruebe que cada una de las siguientes sucesiones carece de límite:

- (a)  $0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$  (f)  $\begin{cases} \sqrt[n]{n} & \text{si } n \text{ es múltiplo de } 5 \\ 2 + 1/n & \text{en otro caso} \end{cases}$
- (b)  $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  (g)  $\left(1 + \frac{\cos(n\pi)}{n}\right)^n$
- (c)  $\cos(n\pi) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  (h)  $e^{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$
- (d)  $(-1)^{3n+1} + 4(-1)^n$
- (e)  $\cos(n\pi) \frac{3n+1}{5n-2}$

**Ejercicio 3.15** Se sabe que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L > 0$ . Calcule:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1}$  (c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$
- (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{2n} - a_{3n})$

### 3.6. Sucesiones dadas por recurrencia

**Ejercicio 3.16** Considere la sucesión definida recurrentemente como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

- (a) Calcule el cociente de D'Alembert. Concluya que la sucesión es creciente.
- (b) Muestre que  $a_n = 2^{n-1}$ ,  $n \geq 1$ .

**Ejercicio 3.17** Considera la sucesión definida recurrentemente como

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n(1 - a_n), \quad n \geq 1$$

- (a) Observe que  $0 < a_n < 1$ ,  $n \geq 1$ .
- (b) Calcule el cociente de D'Alembert. Concluya que la sucesión es decreciente y acotada y, por lo tanto, convergente.
- (c) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

**Ejercicio 3.18** Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones. Previamente, mediante el cociente de D'Alembert, determine si es posible, la monotonía de ellas.

- (a)  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, \quad n \geq 1$
- (b)  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 + 1/a_n}, \quad n \geq 1$
- (c)  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, \quad n \geq 1$
- (d)  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{4}{a_n} \right), \quad n \geq 1.$  (sug.: use  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ )

### 3.7. Problemas varios

**Problema 3.1** Sea  $(a_n)$  una sucesión definida en forma recurrente como

$$a_1 = 5, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{5n} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

- (a) Pruebe que  $a_{n+1} < a_n$  para todo  $n$ .
- (b) ¿Por qué se puede asegurar que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ?
- (c) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- (d) Si se define  $b_n = n^2 a_n$ , calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Problema 3.2** Se invierte un capital de \$1000 en acciones. El primer mes suben el 10 % respecto al precio de compra; el segundo mes, bajan el 10 % respecto del mes anterior; el tercer mes suben el 10 % respecto del mes anterior; y así alternadamente, un mes suben el 10 % y al siguiente bajan el 10 %.

- (a) Halle  $c_n$  el capital que se tiene después de  $n$  meses.
- (b) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .
- (c) Estudie cómo cambia la situación si las bajas son del 9 % en lugar del 10 %.



**Problema 3.3** Sea  $a_n = n(0,95)^n$ .

- (a) Pruebe que  $a_n$  es decreciente ptn. Halle un  $n$  a partir del cual haya certeza de que  $a_{n+1} < a_n$ .
- (b) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . ¿En qué se basa para calcularlo?

**Problema 3.4** Muestre que el valor del  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{b}{n^2}\right)^{n^2}$  no depende de la constante  $b$ .

**Problema 3.5** Halle en cada caso, el término general de  $a_n$  y calcule, si existe, su límite. En caso de que no exista, muéstrelo por medio de subsucesiones.

- (a)  $\frac{3}{\sqrt{1+1}}, \frac{5}{\sqrt{4+1}}, \frac{7}{\sqrt{9+1}}, \dots$
- (b)  $2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots$
- (c)  $2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, \dots$

**Problema 3.6** Sea  $(a_n)$  una sucesión creciente de números positivos.

- (a) Pruebe que la sucesión  $b_n = \frac{3a_n}{2a_n+1}$  es siempre convergente.
- (b) ¿Cuál es el valor más grande que puede tomar  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ? ¿En qué caso?

**Problema 3.7** Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{n+1} + (-1)^n \cdot \frac{n^5 + \cos n}{2 - 6^n} \right).$$

Explique las propiedades y/o resultados que usa para obtener su respuesta.

**Problema 3.8** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ 4x & \text{si } x > -1 \end{cases}$ .  
Calcule el  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$  siendo  $a_n = -2 + \sqrt[n]{n+4}$ .

**Problema 3.9** Sea  $(a_n)$  una sucesión de números reales no nulos tales que

$$4 - \frac{3}{n} < 3 - \frac{7}{a_n} < 4\sqrt[n]{9} + 5 \cdot 2^{-n^2+n}.$$

Calcule, si existe, el  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Explique las propiedades y/o resultados que usa para obtener su conclusión.

**Problema 3.10** Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  sabiendo que  $0 < 5 - 3a_n \leq 7^n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$ .  
Explique las propiedades y/o resultados que usa para obtener su respuesta.

**Problema 3.11** Sea  $(x_n)$  una sucesión monótona creciente de la cual se sabe que  $1 < x_n < 3$ . Halle los posibles valores del  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x_n}\right)$ . ¿En qué propiedades basa su respuesta?

**Problema 3.12** Halle los valores de  $a$  y  $b$  para que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^6 + 3bn^4 + 2\sqrt{n}}{5n^4 - 3n + 4} = 4.$$

**Problema 3.13** Se definen  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{3n-1}{7n+2}$  y  $b_n = (a_n)^2$ .

- (a) Pruebe por medio de subsucesiones que  $a_n$  no tiene límite.
- (b) Calcule el  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Problema 3.14** Se define la sucesión  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \cdot a_n$ ,  $n \geq 1$ .

- (a) Pruebe que existe el  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . ¿Cuál es su valor?
- (b) La sucesión  $b_n$  satisface  $a_n < b_n < na_n$ . Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Problema 3.15** Se define la sucesión de números reales de la forma  $x_1 = a$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2$  donde  $a > 0$ .

- (a) Pruebe que  $(x_n)$  es una sucesión monótona creciente.
- (b) Determine los valores de  $a > 0$  para los cuales  $(x_n)$  es convergente.

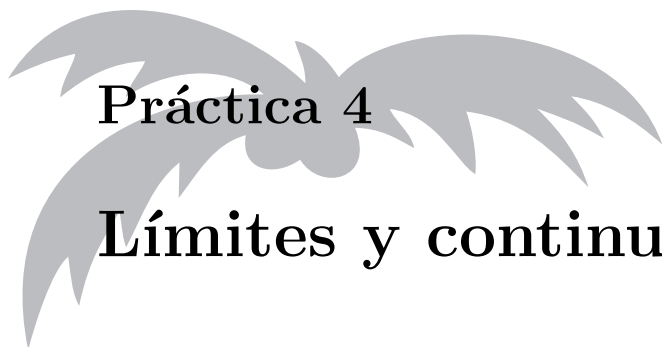
**Problema 3.16** Halle todos los valores de  $x$  para los cuales la sucesión

$$a_n = \frac{x^{2n+1}}{n^3 5^{n+1}}$$

es convergente. Para los  $x$  hallados calcule el  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Problema 3.17** Considere la sucesión  $a_n = (0,95)^{2n+1} n^2$ .

- (a) Pruebe que es decreciente para casi todo  $n$ . ¿A partir de qué  $n$ ?
- (b) Calcule el  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .



## Práctica 4

# Límites y continuidad

### 4.1. Límites en el infinito

**Ejercicio 4.1** Calcule los siguientes límites

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^7 - 10x^5 + 3)$                           | (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$           |
| (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 - x^6 + \sqrt{x})$                      | (j) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x-10)(x+4)} - x)$       |
| (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1}$        | (k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ 5 - x }{5 - x}$          |
| (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - x}{x + 5}$            | (l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6^{x+1} + 3}{6^x - 5}$                 | (m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x$                          |
| (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$ | (n) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$                            |
| (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 6}}{5x - 1}$              | (ñ) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$                         |
| (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}$          | (o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{1}{x} \right)$ |

**Ejercicio 4.2** Calcule, si es posible, los límites cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  de las siguientes funciones

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| (a) $f(x) = x^3 - x^2$                | (f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - x$        |
| (b) $f(x) = \sqrt{9 + x^2}$           | (g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} + x$        |
| (c) $f(x) = \sqrt{1 - x}$             | (h) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ |
| (d) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x - 1}$   | (i) $f(x) = e^x$                            |
| (e) $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2}{x + 3}$ | (j) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$                   |

En cada caso, grafique la función que represente los límites hallados.

## 4.2. Límite en un punto

**Ejercicio 4.3** Calcule, según corresponda, los límites infinitos y los límites laterales que permitan detectar asíntotas horizontales y/o verticales. Haga, en cada caso, un dibujo que refleje la información obtenida.

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| (a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$     | (h) $f(x) = \ln x$                           |
| (b) $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$  | (i) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$      |
| (c) $f(x) = \frac{5x^2}{x+3}$  | (j) $f(x) = \frac{2x^3-5}{(x+3)(x-1)^2}$     |
| (d) $f(x) = \frac{x+3}{x^2}$   | (k) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| (e) $f(x) = e^x$               | (l) $f(x) = \frac{x^3-5x^2}{x+3}$            |
| (f) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$ |  |
| (g) $f(x) = e^{-x}$            |  |

**Ejercicio 4.4** Considere la curva  $y = x^2 - 1$ . Halle la pendiente de la recta

- que pasa por el  $(1, 0)$  y el  $(2, y(2))$ .
- que pasa por el  $(1, 0)$  y el  $(\frac{3}{2}, y(\frac{3}{2}))$ .
- que pasa por el  $(1, 0)$  y el  $(1, 1, y(1, 1))$ .
- que pasa por el  $(1, 0)$  y el  $(1+h, y(1+h))$  en términos de  $h$ .
- en (d), si  $m(h)$  es el valor de la pendiente obtenida, calcule el  $\lim_{h \rightarrow 0} m(h)$ .

Interprete geométricamente.

**Ejercicio 4.5** En cada una de las siguientes funciones calcule, además del límite que se indica, los límites cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Represente gráficamente los límites obtenidos.

- |  |   |
|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - 2}{x^3}$   | (f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$       |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{4x - 12}$  | (g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x+7} - 3}$    |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{x^2 - 2x - 3}{4x - 12} \right)^{\frac{2}{x-3}}$       | (h) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^4 - 16}{h}$             |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$                                   | (i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^{-1} - \frac{1}{4}}{h}$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 1}{x - 2} - \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} \right)$ | (j) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$           |

$$\begin{array}{ll}
 \text{(k)} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+1}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{x-3}} \quad \text{(m)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \\
 \text{(l)} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} \quad \text{(n)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}
 \end{array}$$

**Ejercicio 4.6** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $x^2 - \frac{3}{4}x^4 < f(x) < x^2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ; calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$

**Ejercicio 4.7** Calcule los siguientes límites

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\
 \text{(b)} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} \\
 \text{(c)} & \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \left( \frac{1}{f(x) + 2} \right) \text{ donde } 2 \leq f(x) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

### 4.3. Límites especiales

**Ejercicio 4.8** Calcule los siguientes límites

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} \quad \text{(i)} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} \\
 \text{(b)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \quad \text{(j)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \\
 \text{(c)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} \quad \text{(k)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 4 \sin 2x}{x^2 + 5 \sin x} \\
 \text{(d)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2x} \quad \text{(l)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2 \sin x + \sin^2 x}{x \sin^2 4x} \\
 \text{(e)} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 + x - 6)}{x^2 + x - 6} \quad \text{(m)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)} \\
 \text{(f)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \quad \text{(n)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \\
 \text{(g)} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h+a) - \sin(a)}{h} \quad \text{(ñ)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{\tan^2(\pi x)} \\
 \text{(h)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \text{(o)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}
 \end{array}$$

**Ejercicio 4.9** Calcule los siguientes límites

- |  |   |
|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+1}{3x+4} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-3}}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{2x+2}{5x-2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{5}{x} \right)^{\frac{2x^3+1}{x^2-3}}$ | (g) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$                             |
| (c) $\lim_{t \rightarrow 0} (1+3t)^{\frac{1}{t}}$  | (h) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(2+h) - \ln 2}{h}$                         |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$                                  | (i) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$                                 |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{3x+2}{5x-2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$          | (j) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$                                  |

**Ejercicio 4.10** Marque la única respuesta correcta.

- (a) El  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} + x \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right)$   
☐ no existe   ☐ es igual a 1   ☐ es igual a 0   ☐ es infinito
- (b) El  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \sin \frac{1}{x} \right)$   
☐ no existe   ☐ es igual a 1   ☐ es igual a 0   ☐ es infinito
- (c) El  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cos x)$   
☐ no existe   ☐ es igual a 1   ☐ es igual a 0   ☐ es infinito
- (d) ¿Para qué valores de  $a$  el  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+ax+1}-1}{x} = 2$ ?  
☐ ningún valor de  $a$    ☐ para  $a = 4$    ☐ para  $a = 0$    ☐ para todo  $a$

## 4.4. Continuidad - Definición y propiedades

**Ejercicio 4.11** Determine los puntos de discontinuidad de las funciones dadas a continuación. Vea si en esos puntos la discontinuidad es evitable.

- (a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
- (b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} & \text{si } x \geq -2, x \neq 7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
- (c)  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$
- (d)  $f(x) = \frac{\sin x}{x(x-\pi)}$
- (e)  $f(x) = \frac{x^2}{1-\cos x}$

**Ejercicio 4.12** En cada caso, determine el o los valores de la constante  $a$  para los cuales las funciones resulten continuas.

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ 3x + a & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} |3 - x| & \text{si } x < a \\ 4x + 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

$$(e) \quad f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$(f) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ ax + 3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 4.13** Muestre, con la ayuda de sucesiones, que la función  $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  tiene una discontinuidad inevitable en  $x = 0$ .

**Ejercicio 4.14** Marque la única respuesta correcta.

Si  $f$  es continua en el punto  $x = a$  y  $f(a) > 0$ . Entonces hay certeza de que

- ☐  $f(x) > f(a)$  para todo  $x$  en un entorno de  $a$ .
- ☐  $f(x) > \frac{1}{2}f(a)$  para todo  $x$  en un entorno de  $a$ .
- ☐  $f(x) \neq f(a)$  para todo  $x$  en un entorno de  $a$ .
- ☐  $f(x) > 2f(a)$  para todo  $x$  en un entorno de  $a$ .

## 4.5. Teorema de los valores intermedios

**Ejercicio 4.15** Considere la función continua  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

- (a) Muestre que la ecuación  $f(x) = 0$  tiene al menos una solución en el intervalo  $(-1, 1)$ .
- (b) Encuentre un intervalo de longitud menor que 0,2 que contenga a tal solución.

**Ejercicio 4.16** Considere las funciones hiperbólicas

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Pruebe que existe algún valor de  $x$  tal que  $\cosh x - \sinh x = \frac{1}{2}$ .

**Ejercicio 4.17** Pruebe que las siguientes ecuaciones tienen alguna solución real.

- |  |                                |
|--|--------------------------------|
| (a) $2x - 1 = \cos x$                          | (d) $\frac{x}{x^4 + 1} = 0, 2$ |
| (b) $x^{2n+1} + x^2 + 1 = 0, n \in \mathbb{N}$ | (e) $e^{-x^2} = \ln x$         |
| (c) $\ln x = -3x$                              | (f) $x^6 + 3x = 2$             |

**Ejercicio 4.18** Adapte convenientemente el teorema de Bolzano para probar que la ecuación

$$\frac{x^2 + 1}{x + 2} + \frac{x^4 + 1}{x - 3} = 0$$

tiene alguna solución en el intervalo  $(-2, 3)$ .

**Ejercicio 4.19** Para cada una de las siguientes funciones determine ceros y puntos de discontinuidad. A partir de ellos, use el Teorema de Bolzano para hallar el conjunto donde la función es positiva.

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| (a) $f(x) = x^2(x + 3)(x - 2)$ | (c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$     |
| (b) $f(x) = x \ln x$           | (d) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ |

## 4.6. Problemas varios

**Problema 4.1** Sea  $f(x) = \frac{2x^4}{x^3 + 1}$ . Halle los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

**Problema 4.2** Determine el valor de la constante  $a$  para la cual

- |  |
|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 4x + 1} - 1}{x} = 5$                |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + ax - 1} - \sqrt{x^3 + ax - 1}}{x - 1} = 2$ |

**Problema 4.3** Calcule el  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x + 2^x)^{1/x}$

**Problema 4.4** ¿Para qué valores de la constante  $a$  la siguiente función es continua?

$$f(x) = \begin{cases} 2 + e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 3x + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**Problema 4.5** Pruebe que la función  $\ln(\ln x) - 10^6$  tiene una raíz real en el intervalo  $(e, +\infty)$ .



**Problema 4.6** Encuentre cuatro intervalos disjuntos en cada uno de los cuales la ecuación  $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$  tenga una raíz real.

**Problema 4.7** Pruebe que las siguientes ecuaciones tienen alguna solución real.

(a) 
$$x^{50} + \frac{133}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 70$$

(b) 
$$x \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 15 \operatorname{sen} x = 15$$

**Problema 4.8** (*optativo*) Para recorrer 400 kilómetros en un automóvil tardamos 4 horas, contando las eventuales paradas técnicas y sin llevar una velocidad constante. Pruebe que hubo un lapso de una hora donde se recorrieron exactamente 100 kilómetros (ayuda: considere la función  $g(t) = f(t+1) - f(t)$  siendo  $f(t)$  los kilómetros recorridos en  $t$  horas y use argumentos de continuidad).

**Problema 4.9** (*optativo*) Dado un cuadrilátero convexo, pruebe que se puede trazar un segmento a partir de uno de los vértices, que divida al mismo en dos figuras de igual área (ayuda: use el Teorema de los Valores intermedios).

**Problema 4.10** Sea  $f$  una función continua sobre  $[0, 1]$  y tal que  $0 < f(x) < 1$  para todo  $x$  del intervalo. Pruebe que debe existir un número  $c \in (0, 1)$  tal que  $f(c) = c$  (ayuda: considere la función  $D(x) = f(x) - x$  y use el Teorema de Bolzano).

**Problema 4.11** Sea  $a_n$  una sucesión de números positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = 3$$

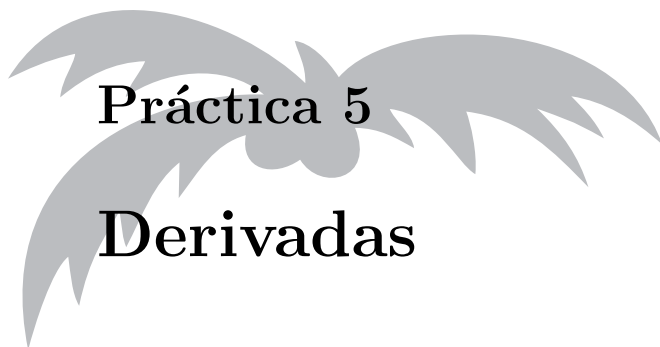
(a) Halle el  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

(b) Calcule el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(5a_n)}{na_n^2}$

Explique las propiedades y/o resultados que usa para obtener su respuesta.

**Problema 4.12** Calcule, si existe, el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$

**Problema 4.13** Halle algún valor del parámetro  $b$  de modo que la ecuación  $x^5 - 3bx + 5 = 0$  tenga alguna solución en el intervalo  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ .



## Práctica 5

# Derivadas

### 5.1. Recta tangente

**Ejercicio 5.1** Considere la curva  $y = x^2 - 1$ . Halle la pendiente y la ecuación de recta

- (a) que pasa por los puntos  $(1; 0)$  y  $(2; y(2))$ .
- (b) que pasa por los puntos  $(1; 0)$  y  $(\frac{3}{2}; y(\frac{3}{2}))$ .
- (c) que pasa por los puntos  $(1; 0)$  y  $(1, 1; y(1, 1))$ .
- (d) tangente a la curva por el punto  $(1, 0)$ .

Represente en un mismo gráfico las cuatro rectas y la curva.

**Ejercicio 5.2** Justifique, por medio de los cocientes incrementales, las siguientes igualdades:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $y = \text{const} \Rightarrow y' = 0$             | (f) $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| (b) $y = ax + b \Rightarrow y' = a$                   | (g) $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$                      |
| (c) $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$                     | (h) $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$            |
| (d) $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$                   | (i) $y = \text{sen } x \Rightarrow y' = \cos x$         |
| (e) $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$ | (j) $y = \cos x \Rightarrow y' = -\text{sen } x$        |

**Ejercicio 5.3** Halle, usando el cociente incremental, el valor de la derivada de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Escriba la ecuación de la recta tangente en esos mismos puntos.

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| (a) $y = x^2 - 4x + 7$ en $x = 3$  | (f) $y = \frac{2}{x}$ en $x = 4$   |
| (b) $y = \frac{2}{x-1}$ en $x = 5$ | (g) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ en $x = 0$            |
| (c) $y = \sqrt{x+12}$ en $x = 13$  | (h) $y = \begin{cases} x^2 \text{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$ |
| (d) $y = x + \ln x$ en $x = 1$     |  |
| (e) $y = 5x + 3$ en $x = 0$        |  |

**Ejercicio 5.4** Considerare la curva  $y = t^3 + 1$

- Describa el haz de rectas (excluida la vertical) que pasan por el punto de coordenadas  $(1, y(1))$ . Haga un dibujo alusivo.
- Calcule  $y'(1)$  y escriba la ecuación de la recta tangente en el punto  $(1, y(1))$ . Marque sobre el dibujo esta recta.

**Ejercicio 5.5** ¿En qué punto de la gráfica de la función  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  la recta tangente es paralela al eje de las  $x$ ?

## 5.2. Reglas de derivación - Función derivada

**Ejercicio 5.6** Usando las reglas de derivación, halle las derivadas de las siguientes funciones en su dominio de definición.

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| (a) $f(x) = x^3 + x^2 + \sin x$    | (j) $f(x) = (x + 2)(x^3 + 1) \ln x$                           |
| (b) $f(x) = x^2 \cos x$            | (k) $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$                          |
| (c) $f(x) = 3 \sin x$              | (l) $f(x) = \log_a x$   |
| (d) $f(x) = x \ln x$               | (m) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}}$ |
| (e) $f(x) = x^5 + \frac{1}{x}$     | (n) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$          |
| (f) $f(x) = e^x + \ln x$           | (ñ) $f(x) = x^{1/3} \ln x$                                    |
| (g) $f(x) = x \sin x + e^x \cos x$ | (o) $f(x) = (\ln x)(\log_a x) - (\ln a)(\log_a x)$            |
| (h) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$      | (p) $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$                 |
| (i) $f(x) = \tan x$                | (q) $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$                 |

**Ejercicio 5.7** Calcule por medio de la regla de la cadena, la función derivada de  $f$  siendo  $f(x)$  igual a

- |   |  |
|---|--|
| (a) $(1 + x)^2$                         | (n) $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$                                      |
| (b) $(1 + x)^3$                         | (ñ) $3^{\sin x} + \sin^2 x$                                      |
| (c) $(1 + x)^{2001}$                    | (o) $\sqrt{1 + \tan^2 x}$  |
| (d) $e^{x+3}$                           | (p) $(a + bx^2)^{(1/2)}$   |
| (e) $(1 - x)^3$                         | (q) $\ln(5x) - \ln(3x)$  |
| (f) $\cos(3x)$                          | (r) $\frac{(2x^3 + 3)^2}{\ln(x^2 + 1)}$                          |
| (g) $\tan(-3x^5)$                       | (s) $\sin^2 x + \cos^2 x$  |
| (h) $3 \sin^4 x$                        | (t) $\cosh^2 x - \sinh^2 x$                                      |
| (i) $\ln(x + 1)$                        | (u) $(\ln(x^4 + 1))^{1/2}$                                       |
| (j) $\ln(2 + \sin x)$                   | (v) $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ |
| (k) $2e^{\sin x}$                       | (w) $\ln(\sqrt{x^2 + 1})$  |
| (l) $\ln^2(x^2 + 1)$                    |  |
| (m) $(3 \cos^2 x)^{-1} - (\cos x)^{-1}$ |  |

**Ejercicio 5.8** Calcule la derivada de la función  $f$  en su dominio de definición, siendo  $f(x)$  igual a

- |                              |                             |
|------------------------------|-----------------------------|
| (a) $x^x$                    | (d) $x^{\sqrt{x}}$          |
| (b) $x^{3x} + a^x$ , $a > 0$ | (e) $(1 + \sin x)^{\cos x}$ |
| (c) $(\sin^3 x)^{\ln x}$     | (f) $(1 + \frac{1}{x})^x$   |

**Ejercicio 5.9** Sean  $f$ ,  $g$  y  $h$  funciones tales que  $f(x) = 1 + x^2$ ;  $g'(x) = \sin^2(\sin(1 + 3x))$ ;  $g(0) = 4$ ;  $h(x) = g(1 + 2x)$ ; calcule

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| (a) $(f \circ g)'(0)$ | (b) $(h \circ f)'(0)$ |
|-----------------------|-----------------------|

**Ejercicio 5.10** Pruebe que la función  $y = Ce^{kx}$  es solución de la ecuación diferencial  $y'(x) = ky(x)$  donde  $k$  y  $C$  son constantes.

### 5.3. Funciones derivables y no derivables

**Ejercicio 5.11** Para cada una de las siguientes funciones

- (a) haga un gráfico de ellas;
- (b) estudie la continuidad y, mediante el estudio del cociente incremental, la derivabilidad en el punto indicado.

- |       |  |                      |
|-------|--|----------------------|
| (i)   | $f(x) =  2x - 1 $  | en $x = \frac{1}{2}$ |
| (ii)  | $g(x) = x^{1/3}$   | en $x = 0$           |
| (iii) | $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$                 | en $x = 2$           |
| (iv)  | $r(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x > 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$          | en $x = 1$           |
| (v)   | $s(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$   | en $x = 0$           |
| (vi)  | $t(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ | en $x = 0$           |

En las funciones que resulten derivables en los puntos indicados, escriba la ecuación de la recta tangente.

**Ejercicio 5.12** Marque la única respuesta correcta. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida como  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{0,2} \sin x}{x+2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ . Entonces en  $x = 0$

- ☐  $f$  es continua pero no derivable.
- ☐  $f$  es continua y derivable.
- ☐  $f$  no es continua pero sí es derivable.
- ☐  $f$  no es continua ni derivable.

## 5.4. Derivada de la función inversa

**Ejercicio 5.13** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5e^{x^3+2x}$ .

- (a) Muestre que  $f'(x) > 0$  para todo  $x$ . Además note que  $f(0) = 5$ .
- (b) Use el Teorema de la función inversa para justificar la existencia de  $(f^{-1})'(5)$  y calcular su valor.

**Ejercicio 5.14** Pruebe, usando el Teorema de la función inversa, las siguientes fórmulas de las derivadas de las funciones inversas de las funciones trigonométricas. En cada caso, analice la región donde es válida la fórmula.

- (a)  $y = \arcsen x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (c)  $y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$
- (b)  $y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (d)  $y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$

**Ejercicio 5.15** Sea  $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x - \sqrt{x+1}$

- (a) Muestre que  $f'(x) < 0$  para todo  $x > -1$ . Además note que  $f(3) = -5$ .
- (b) Use el teorema de la función inversa para justificar la existencia de  $(f^{-1})'(-5)$  y calcular su valor.

**Ejercicio 5.16** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- (a) Muestre que  $f'(x) > 0$  para todo  $x$ .
- (b) Use el Teorema de la función inversa para justificar la existencia de  $(f^{-1})'(x)$ . Calcule  $(f^{-1})'(0) = (\sinh^{-1})'(0)$ .

## 5.5. Algunas aplicaciones (velocidad, razón de cambio, diferencial)

**Ejercicio 5.17** La ley de movimiento de un punto a lo largo de una recta es

$$s(t) = 3t - t^2$$

(en el instante  $t = 0$  el punto se encuentra en el origen). Halle la velocidad del movimiento del punto para los instantes  $t = 0$ ,  $t = 1$  y  $t = 2$ .

**Ejercicio 5.18** Un objeto circular va aumentando de tamaño con el tiempo, de modo que su radio  $r$ , en centímetros, viene dado por  $r = 3t + 2$  siendo  $t$  el tiempo en minutos.

- (a) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento del radio  $r$ ?
- (b) ¿Cuál es la velocidad de variación del área?

**Ejercicio 5.19** La temperatura  $C$  de un cuerpo, que inicialmente estaba a  $90^{\circ}\text{C}$  se enfría de acuerdo a la ley

$$C(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$$

(se está suponiendo que la temperatura ambiente es  $20^{\circ}\text{C}$ ) donde  $t$  es el tiempo en minutos.

- Calcule con qué velocidad se está enfriando el cuerpo a los 5 minutos.
- Muestre que la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura  $C$  y la temperatura ambiente. Más precisamente:  $C'(t) = -0,1(C(t) - 20)$ .
- Muestre que la velocidad de enfriamiento va tendiendo a 0 conforme avanza el tiempo.

**Ejercicio 5.20** Cada arista de un cubo se dilata a razón de 1 cm por segundo. ¿Cuál es la razón de variación del volumen cuando la longitud de cada arista es de 10 cm? Si la razón de variación del volumen es igual a  $108 \text{ cm}^3/\text{seg}$ , ¿cuál es la longitud de la arista?

**Ejercicio 5.21** Un barco navega paralelamente a una costa recta, a una velocidad de 12 millas por hora y a una distancia de 4 millas. ¿Cuál es la velocidad de aproximación a un faro de la costa, en el instante en que diste precisamente 5 millas del faro?

**Ejercicio 5.22** Para  $y = x + \frac{1}{x}$ , halle

- $\Delta y$  ( $\Delta y = y(x+h) - y(x)$ )
- $dy$  ( $dy = y'(x)dx$ ,  $dx = \Delta x = h$ )
- $\Delta y - dy$
- $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x}$
- $\frac{dy}{dx}$

**Ejercicio 5.23** Mediante diferenciales calcule aproximadamente

- $\sqrt[3]{25}$
- $\ln(1,12)$
- $\cos(0,5)$

## 5.6. Derivadas sucesivas

**Ejercicio 5.24** Calcule las siguientes derivadas

- (a)  $f(x) = \operatorname{sen} x$ ,  $f^{(v)}(x)$ ,  $f^{(70)}(0)$       (d)  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $f^{(4)}(x)$   
 (b)  $f(x) = e^x$ ,  $f^{(19)}(x)$ ,  $f^{(2001)}(0)$       (e)  $f(x) = 5x^3 + 8x$ ,  $f'''(x)$ ,  $f^{(iv)}(x)$ ,  
 (c)  $f(x) = e^{kx}$ ,  $f^{(20)}(x)$        $f^{(800)}(2)$

**Ejercicio 5.25** Muestre que las funciones  $\operatorname{sen} x$  y  $\cos x$  son soluciones de la siguiente ecuación

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

Pruebe que  $y(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$  también es solución de la ecuación.

**Ejercicio 5.26** Considere la función  $f(x) = (1+x)^n$ , con  $n$  natural. Calcule  $f^{(k)}(0)$  para todo valor de  $k$ .

## 5.7. Problemas

**Problema 5.1** Para cada una de las funciones dadas a continuación:

- (a) determine si es continua y/o derivable en los puntos indicados;  
 (b) en los casos que resulte derivable estudie la continuidad de la función derivada;  
 (c) en los casos en que resulte derivable, escriba la ecuación de la recta tangente.

$$(I) \quad f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$(II) \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x+3 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 3$$

$$(III) \quad h(x) = \begin{cases} (x-1)^{3/2} \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1$$

$$(IV) \quad r(x) = \begin{cases} x^{5/2} \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \\ x \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$(V) \quad s(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1$$

**Problema 5.2** Dadas las siguientes funciones, escriba en cada caso la ecuación de la recta tangente en los puntos que se indican:

- (a)  $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  en  $x = 0$  y en  $x = -\frac{\pi}{4}$   
 (b)  $f(x) = x\sqrt{x + \sqrt{x+1}}$  en  $x = 0$   
 (c)  $f(x) = (1+x^2)^{\operatorname{sen} x}$  en  $x = 0$  y en  $x = \pi$

**Problema 5.3** Pruebe que la función  $f(x) = x|x|$  es derivable para todo  $x$ , que  $f'(x)$  es continua pero que no existe  $f''(0)$ .

**Problema 5.4** Pruebe que la curva  $y = t + \ln t$  no tiene ninguna recta tangente que pase por el origen.

**Problema 5.5** Halle, si existen, la o las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva  $y = t + \frac{1}{t}$  que pasen por el punto

(a)  $(1, 0)$

(b)  $(0, 0)$

(c)  $(0, 4)$

**Problema 5.6** Halle, si existen, la o las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva  $y = t + \frac{1}{t}$  que tengan pendiente igual a  $-3$ .

**Problema 5.7** La recta tangente de la función  $f$  en el punto de abscisa  $x = -1$  tiene ecuación  $y = -5x + 3$ . Calcule la ecuación de la recta tangente a la función  $g(x) = f(-x^2 + \sin(\pi x))$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

**Problema 5.8** Considere la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } |x| > 5 \\ a + bx^2 & \text{si } |x| \leq 5 \end{cases}$ . Halle los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales existe  $f'(5)$ .

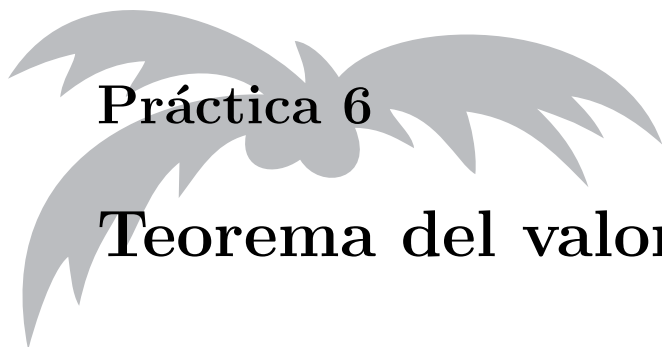
**Problema 5.9** Considere la función  $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ . Halle los valores de  $a$  y  $b$  para que  $f$  resulte derivable.

**Problema 5.10** Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $x = 0$  pero no necesariamente derivable. Pruebe que la función  $f(x) = g(x) \sin 3x$  es derivable en  $x = 0$ .

**Problema 5.11** Suponga que se introduce un gas en un globo esférico a la razón constante de  $50 \text{ cm}^3$  por segundo. Suponga que la presión del gas permanece constante y que el globo tiene siempre forma esférica. ¿Cuál es la rapidez con que aumenta el radio del globo cuando su longitud es de 5 cm? (vol. globo  $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ).

**Problema 5.12** Cierta población crece de acuerdo a la ecuación  $y = 1 + 0,2e^{0,1t}$ , donde  $t$  es el tiempo medido en meses e  $y$  es el número de individuos en miles. Calcule la velocidad de crecimiento de la población después de un año.





## Práctica 6

# Teorema del valor medio

### 6.1. Teorema de Fermat, Rolle y Lagrange

**Ejercicio 6.1** La función  $f(x) = x^{2/3}$  tiene en  $x = 0$  un mínimo. ¿Qué puede decir sobre la aplicación del Teorema de Fermat?

**Ejercicio 6.2** Considere la función  $f$  del ejercicio anterior definida en el intervalo  $[-1, 1]$ . Esta función es continua sobre este intervalo y  $f(-1) = f(1)$ . Sin embargo, su derivada no se anula nunca. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Rolle?

**Ejercicio 6.3** Considere la parábola  $y = x^2 - 2x$  y cualquier intervalo cerrado, por ejemplo el  $[-1, 3]$ . Compruebe que el valor  $c \in (-1, 3)$  al que hace referencia el Teorema del Valor Medio es calculable en este caso. Haga un gráfico que ilustre la situación. Compruebe que si el intervalo es el  $[a, b]$  el valor intermedio  $c$  es calculable en términos de  $a$  y de  $b$ .

**Ejercicio 6.4** Desde el piso se arroja un proyectil hacia arriba y, después de unos minutos, cae al piso. Pruebe que en algún momento la velocidad del proyectil fue nula.

**Ejercicio 6.5** Un automóvil pasa por dos controles camineros separados entre sí 10 km. Por el primero pasa a las 12:00 y por el segundo a las 12:04. La velocidad máxima permitida en esa región es de 120 km/h. ¿Hubo infracción al tope de velocidad?

**Ejercicio 6.6** Pruebe que para cada  $x > 0$  existe  $\xi$  entre 0 y  $x$  que satisface  $\sin x = x \cos \xi$ .

## 6.2. Consecuencias del Teorema del Valor Medio

**Ejercicio 6.7** Pruebe que si dos funciones  $f$  y  $g$  tienen la misma función derivada entonces  $f(x) = g(x) + c$  donde  $c$  es una constante.

**Ejercicio 6.8** Pruebe las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} & \text{(c)} \quad 2 \arctan x &= \arctan \left( \frac{2x}{1 - x^2} \right) \\ \text{(b)} \quad \arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(ayuda: use el ejercicio anterior)

**Ejercicio 6.9** Pruebe que las únicas soluciones de la ecuación  $y'(x) = y(x)$  son de la forma  $y(x) = ke^x$  (ayuda: si  $u(x)$  es una solución de la ecuación estudie la derivada de  $h(x) = \frac{u(x)}{e^x}$ )

**Ejercicio 6.10** Para las siguientes funciones:

- (a) pruebe que son estrictamente monótonas en el conjunto indicado.
- (b) indique en cada caso si es creciente o decreciente.
- (c) determine, si es posible, cuántas veces corta el gráfico el eje  $x$ .

$$\begin{aligned} \text{I. } f(x) &= -3x + \sin 2x, x \in \mathbb{R} & \text{VI. } f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 2, x > 0 \\ \text{II. } f(x) &= e^{-x} + \ln x, x > 1 & \\ \text{III. } f(x) &= x + \ln x, x > 0 & \text{VII. } f(x) &= \frac{1}{x^2 + 2} - 3, x > 0 \\ \text{IV. } f(x) &= x^{2n+1} + x^3 + x + 1, & & \\ & x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} & \text{VIII. } f(x) &= \frac{\sin x}{x}, x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \text{V. } f(x) &= \sqrt{x + \ln x}, x > 1 & \end{aligned}$$

**Ejercicio 6.11** Pruebe las siguientes desigualdades. Para ello estudie el signo de la derivada de una función conveniente.

- (a)  $\sin x < x, x > 0$
- (b)  $e^x \geq 1 + x$
- (c)  $\ln(1+x) < x$
- (d)  $\ln x > 1 - \frac{1}{x}, x > 1$
- (e)  $\sin x > \frac{2}{\pi}x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$
- (f)  $\arctan x < x, x > 0$
- (g)  $(1+x)^a > 1+ax, x > 0, a > 1$

**Ejercicio 6.12** Considere la función  $f(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ .

- (a) Muestre que  $f'(0) = 1$  (estudie el cociente incremental).
- (b) Muestre que en cualquier intervalo que contenga al 0, hay valores negativos y valores positivos de la función.

(c) Determine la validez de las siguientes afirmaciones:

1. si una función  $g$  tiene derivada en  $x = 0$  y  $g'(0) > 0$  entonces  $g$  es creciente en un intervalo abierto que contiene al cero.
2. si una función  $g$  tiene derivada continua en  $x = 0$  y  $g'(0) > 0$  entonces  $g$  es creciente en un intervalo abierto que contiene al cero.

### 6.3. Regla de L'Hospital

**Ejercicio 6.13** ⚡ Considere las funciones  $f(x) = x^3 + 1$  y  $g(x) = x^2 + 1$  definidas en cualquier intervalo  $[a, b]$ . Muestre que el valor de  $\xi$  donde se cumple el Teorema de Cauchy es calculable en términos de  $a$  y de  $b$ .

**Ejercicio 6.14** ⚡ Sea  $R(x)$  una función con 3 derivadas continuas en  $x = 0$  y tal que  $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$ . Pruebe que  $\frac{R(x)}{x^3} = \frac{R'''(c)}{3!}$  para algún  $c$  entre 0 y  $x$  (ayuda: use el Teorema de Cauchy tres veces).

**Ejercicio 6.15** ⚡ Calcule los siguientes límites

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$                   | (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$     |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)(e^x - 1)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$              | (g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$       |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\tan(x + \pi/2)}$      | (h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2} \ln x$    |

**Ejercicio 6.16** ⚡ Continúe con estos límites

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ | (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^k x}{\sqrt{x}}, k \in \mathbb{N}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{1/\ln x}$                                  | (f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 2^x)^{\sin x}$                             |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x)(\ln(1-x))$                            | (g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x, n \in \mathbb{N}$                    |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{1/x}$                             | (h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x}, n \in \mathbb{N}$               |

**Ejercicio 6.17** ⚡ Sea  $R(x)$  una función con 10 derivadas continuas en  $x = 0$  y tal que  $R^{(k)}(0) = 0, 0 \leq k \leq 9, R^{(10)}(0) = 1$ . Calcule el  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{x^{10}}$ .

**Ejercicio 6.18** ⚡ Explique por qué no es correcta la siguiente aplicación de la Regla de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x + 2}{2} = 4$$

**Ejercicio 6.19** Muestre por qué no se puede utilizar la Regla de L'Hospital para calcular el límite indicado en cada caso y encuentre el límite por otros medios.

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$$

**Ejercicio 6.20** Justifique las siguientes afirmaciones

$$(a) \text{ No existe el } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = 0$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = 1$$

**Ejercicio 6.21** Considere la función  $f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ . Marque la única afirmación correcta.

- ☐  $f$  no es continua ni derivable en  $x = 0$ .
- ☐  $f$  es continua pero no derivable en  $x = 0$ .
- ☐  $f$  es derivable pero no continua en  $x = 0$ .
- ☐  $f$  es continua y derivable en  $x = 0$ .

**Ejercicio 6.22** Considere la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+3-3\cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 6 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ . Determine el valor de  $a$  para que  $f$  resulte continua. Para el valor de  $a$  hallado calcule, si existe,  $f'(0)$ .

## 6.4. Problemas varios

**Problema 6.1** Considere la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{bx^2+a(1-\cos x)}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

Encuentre los valores de  $a$  y de  $b$  para que  $f$  resulte derivable en  $x = 0$  y además sea  $f'(0) = -3$ .

**Problema 6.2** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función con dos derivadas continuas tal que  $f(0) = 2$ ,  $f'(0) = \frac{5}{6}$ ,  $f''(0) = 5$ . Se define  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(6x)-2}{5x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Calcule, explicando las propiedades que usa en cada caso:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  (b)  $g'(0)$

**Problema 6.3** Considere la función  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = 3^{5x + \cos(2x)} + 8x + \ln((4x + 1)^{-2})$$

Pruebe que  $f(x) \neq 1 \ \forall x \geq 0$ .

**Problema 6.4** Considere  $f(x) = 4\sqrt{x} + 3 \ln x - 2 \ \forall x > 0$ .

- (a) Pruebe que  $f$  es monótona.  
 (b) Justifique la existencia de la función inversa  $f^{-1}(x)$ . Calcule  $(f^{-1})'(2)$  (observe que  $f(1) = 2$ ).

**Problema 6.5** ¿Para qué valores reales de  $p$  es el  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - px + p - 1}{(x - 1)^2} = 3$ ?

**Problema 6.6** Sea  $f$  un función continua y derivable tal que  $f(-2) = f(5) = 0$ . Pruebe que existe un  $c \in (-2, 5)$  tal que  $f'(c) = 200f(c)$  (ayuda: considere  $g(x) = e^{-200x}f(x)$ ).

**Problema 6.7** Sea  $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente creciente. Pruebe que  $2^{h(x)-5} + 3x \neq \sin x \ \forall x \geq 0$ .

**Problema 6.8** Considere la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x) = e^{4x} + x^5 + 2$$

- (a) Pruebe que es biyectiva y que  $f^{-1}(3) = 0$   
 (b) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^{-1}(y)}{2y - 6}$

**Problema 6.9** Pruebe la siguiente desigualdad

$$x^6 + x^4 + x^2 + 3 \geq 12x - 6, \quad x \geq 1$$

**Problema 6.10** Considere la función  $f(x) = x^2 - 3e^{-x/3}$ . Pruebe que existe  $c \in [0, 4; 0, 5]$  tal que  $f'(c) = 0$ . Decida si en  $c$  la función alcanza un máximo o un mínimo relativo.



## Práctica 7

# Estudio de funciones

### 7.1. Crecimiento y decrecimiento

**Ejercicio 7.1** Pruebe que las siguientes funciones son monótonas en el conjunto indicado. Indique en cada caso si son crecientes o decrecientes.

- (a)  $f(x) = x^7 + 7x^5 + 4x$ , en  $\mathbb{R}$
- (b)  $f(x) = 2 - x^{1/3}$ , en  $\mathbb{R}$
- (c)  $f(x) = e^{-1/x}$ , en  $x > 0$
- (d)  $f(x) = x + 3x^{1/3} - 2x^{2/3}$ , en  $\mathbb{R}$
- (e)  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$ , en  $\mathbb{R}$

**Ejercicio 7.2** Encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones

- (a)  $f(x) = \ln |x|$
- (b)  $f(x) = e^{(x-1)^2}$
- (c)  $f(x) = xe^x$
- (d)  $f(x) = x^2e^{-x}$
- (e)  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in [-\pi, 6\pi]$
- (f)  $f(x) = x \ln x$
- (g)  $f(x) = \frac{1-x}{2x+3}$
- (h)  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
- (i)  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
- (j)  $f(x) = x \ln^2 x$

**Ejercicio 7.3** Aníbal realiza un régimen de comidas para adelgazar. Ha podido establecer que la cantidad de kilos que adelgaza está en función del tiempo durante el cual hace régimen según la siguiente fórmula:

$$k(t) = \frac{24e^t}{3e^t + 1} - 6, \quad t > 0$$

- (a) Pruebe que cuánto más tiempo persista, más adelgazará.
- (b) Pruebe que con este régimen no podrá adelgazar más de 2 kilos.

## 7.2. Extremos locales

**Ejercicio 7.4** Decida si las siguientes funciones alcanzan un extremo local en  $x = 0$ .

(a)  $f(x) = \sin^3 x$

(c)  $f(x) = \cos^2 x$

(b)  $f(x) = 2 + x^2 \sin x$

(d)  $f(x) = x^8 + 3$

**Ejercicio 7.5** Estudie, utilizando únicamente la primera derivada, la existencia de extremos de las siguientes funciones.

(a)  $f(x) = x^4$

(k)  $f(x) = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$ , en  $[0, 2\pi]$

(b)  $f(x) = x^4 - 2x^2$

(l)  $f(x) = \frac{x^2 + 100}{x^2 - 25}$

(c)  $f(x) = xe^{-x}$

(d)  $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$

(m)  $f(x) = x\sqrt{4-x}$

(e)  $f(x) = x \ln x$

(n)  $f(x) = x^{x \ln x}$

(f)  $f(x) = x \ln^2 x$

(ñ)  $f(x) = x^2(2-x)^2$

(g)  $f(x) = x^2 e^{-x}$

(o)  $f(x) = x^{2/3}(1-x)$

(h)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

(p)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(i)  $f(x) = x \ln x$  (está repetido)

(q)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(j)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

**Ejercicio 7.6** Determinar el valor de  $k \in \mathbb{R}$  tal que la función  $f(x) = \frac{x+k}{x^2+1}$  alcance un extremo local  $x = 2$ . ¿Es un máximo o mínimo local? ¿En absoluto?

**Ejercicio 7.7** De la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en todo su dominio, se sabe que su derivada se anula en  $-1$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $0$  y  $\frac{3}{2}$ . Además se tiene que

(I)  $\{x \in \mathbb{R} / f'(x) > 0\} = (-\infty, -1) \cup (0, \frac{3}{2})$

(II)  $\{x \in \mathbb{R} / f'(x) < 0\} = (-1, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

Encuentre los máximos y los mínimos locales.

## 7.3. Asíntotas

**Ejercicio 7.8** Encuentre, si las hay, las ecuaciones de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas (tanto para  $x \rightarrow +\infty$  como para  $x \rightarrow -\infty$ ) de las siguientes funciones. Localice en un dibujo la posición del gráfico de la función con respecto a las asíntotas halladas.

(a)  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 1}$

(c)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)(x + 1)}$

(b)  $f(x) = x + e^x \sin x$

(d)  $f(x) = xe^{1/x}$

(e)  $f(x) = x \ln \left( e - \frac{1}{x} \right)$

(g)  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

(f)  $f(x) = 2x + \sqrt{1+x^2}$

(h)  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$

**Ejercicio 7.9** Pruebe que la recta  $y = -x + \frac{2}{3}$  es la única asíntota de la función

$$f(x) = (2x^2 - x^3)^{1/3}$$

**Ejercicio 7.10** Encuentre los valores de  $a$  y  $b$  tales que la recta  $y = 2x + 7$  resulte una asíntota oblicua de  $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + 1}{x^2 + 5}$  para  $x \rightarrow -\infty$

## 7.4. Concavidad y convexidad

**Ejercicio 7.11** Determine los intervalos de concavidad y convexidad y localice los puntos de inflexión de las siguientes funciones

(a)  $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 12$

(d)  $f(x) = xe^{-x}$

(b)  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

(e)  $f(x) = (2ax^2 - x^3)^{1/3}$ ,  $a > 0$  fijo

(c)  $f(x) = e^{-x^2}$

(f)  $f(x) = x^2 \ln x$

**Ejercicio 7.12** Considere la función  $f(x) = \frac{x}{x^2+a}$ ,  $a > 0$ . Pruebe que  $f$  alcanza dos extremos locales y tiene tres puntos de inflexión. Muestre que las abscisas de estos cinco puntos sobre el eje de las  $x$  son equidistantes. ¿Dónde es cóncava?

## 7.5. Construcción de curvas

**Ejercicio 7.13** Para cada una de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = x^{2/3}(1-x)$

10.  $f(x) = \begin{cases} \frac{8x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ 3x - x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

2.  $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

3.  $f(x) = x^5 - 5x + 2$

11.  $f(x) = \frac{3x+11}{(x+3)(x+1)}$

4.  $f(x) = (1+x+2x^2)e^x$

12.  $f(x) = xe^{-x^2}$

5.  $f(x) = \frac{|x-3|}{(x-1)^2}$

13.  $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

6.  $f(x) = \sqrt{x-2} - 5 \ln(x-2)$

14.  $f(x) = 4x - 5x^{4/5}$

7.  $f(x) = x - 3(x-5)^{2/3}$

15.  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

8.  $f(x) = x^3 \ln x$

16.  $f(x) = xe^{1/x}$

9.  $f(x) = x \ln^2 x$

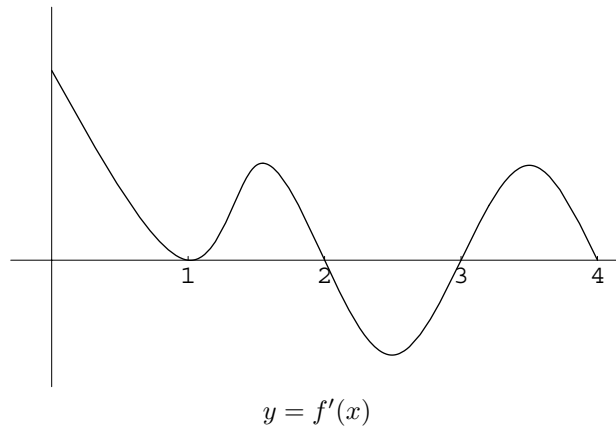
(a) Halle el dominio de  $f$  y de su función derivada  $f'$ .

(b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.



- (c) Halle los extremos locales. Determine cuáles de ellos son absolutos.
- (d) Escriba la ecuación de las asíntotas.
- (e) Determine, si la cuenta lo permite, los intervalos de concavidad.
- (f) Halle los puntos de inflexión.
- (g) Con la información obtenida, construya un gráfico aproximado.

**Ejercicio 7.14** Sea  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y derivable, tal que el gráfico de la función derivada  $y = f'(x)$  es el que se ve en la figura.



- (a) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ .
- (b) Determine extremos locales y puntos de inflexión.
- (c) Si  $f(0) = 1$ , haga un gráfico aproximado de  $y = f(x)$ .

**Ejercicio 7.15** Dibuje, si es posible, el gráfico de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaga las siguientes condiciones.

1. Es continua en  $\mathbb{R}$ .
2. No es derivable en  $x = 3$ .
3.  $f(2) = 3$ ,  $f(-2) = 5$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
5.  $f'(x) > 0$  si  $x > 3$ ,  $f$  es decreciente en  $(-\infty, 2)$

## 7.6. Cantidad de soluciones de una ecuación

**Ejercicio 7.16** Determine la cantidad de soluciones que tienen las siguientes ecuaciones.

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| (a) $x^7 + 3x^5 + 2x + 1 = 0$ | (e) $\frac{x^3}{(x-1)^2} = 7$  |
| (b) $e^x = 1 - x$             | (f) $xe^{1/x} = 1$   |
| (c) $xe^{-x^2} = \frac{1}{5}$ | (g) $f(x) = 2$ siendo  |
| (d) $4x - 5x^{4/5} = 2$       | $f(x) = \begin{cases} \frac{8x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ 3x - x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ |

## 7.7. Continuidad en intervalos cerrados

**Ejercicio 7.17** Para cada una de las siguientes funciones indique si está acotada superiormente y/o inferiormente. Decida si alcanza su máximo y/o su mínimo.

- |  |  |
|--|--|
| (a) $a(x) = 3x + 1, \quad [-1, 3]$                 | (e) $i(x) = x^2, \quad [-3, 4]$                        |
| (b) $f(x) = x^2 - 1, \quad [-1, 1]$                | (f) $j(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad (0, 2]$             |
| (c) $g(x) = \frac{1}{x-1}, \quad [2, 5]$           | (g) $k(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad (-\infty, +\infty)$ |
| (d) $h(x) = \frac{1}{x-1}, \quad [0, 2], x \neq 1$ | (h) $t(x) = \sin(2x), \quad [0, \pi]$                  |

**Ejercicio 7.18** Considere las siguientes afirmaciones.

- I. Una función continua en  $[a, b]$  siempre está acotada.
- II. Una función continua en  $(a, b]$  siempre alcanza su máximo.
- III. Una función continua en  $[a, b]$  siempre alcanza su mínimo.
- IV. Una función continua en  $(a, b)$  nunca esta acotada.

Marque la única respuesta correcta

- ☐ Todas las afirmaciones son verdaderas.
- ☐ I. y III. son verdaderas, II. y IV. son falsas.
- ☐ Sólo I. es verdadera.
- ☐ Todas las afirmaciones son falsas.

## 7.8. Problemas de optimización

**Problema 7.1** Se quiere ahorrar el máximo de material al hacer un tanque recto de base cuadrada y sin tapa, de manera tal que el volumen sea de  $32 \text{ m}^3$ . Halle las dimensiones del tanque. Haga lo mismo pero ahora con tapa.

**Problema 7.2** Con una lámina cuadrada de un metro se quiere construir una caja sin tapa. Para ello se recortan unos cuadrados de los vértices. Calcule el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo. Si la altura de la caja no puede pasar de  $20\text{ cm}$ , ¿cuál es la medida del lado del cuadrado que debemos recortar?

**Problema 7.3** En la fabricación de latas de conserva, se quiere minimizar el uso de hojalata. Supuesto que se ha prefijado el volumen  $V$ , halle la relación entre el diámetro  $D$  de la base y la altura  $H$  de la lata que producen el menor gasto de hojalata.

**Problema 7.4** Determine las dimensiones de un rectángulo de área  $169\text{ cm}^2$  que tengan la diagonal de menor longitud.

**Problema 7.5** Por el punto  $(2,1)$  pasan rectas que determinan triángulos al cortarse con los semiejes positivos. Entre estas rectas, halle la que genera un triángulo de área mínima.

**Problema 7.6** Entre todos los triángulos inscriptos en una semicircunferencia de  $10\text{ cm}$  de diámetro, halle el de área máxima.

**Problema 7.7** Entre todos los triángulos isósceles de perímetro  $30$ , halle el de área mínima.

**Problema 7.8** Pruebe que entre todos los números positivos  $x$  e  $y$  que satisfacen  $x^2 + y^2 = r^2$ , la suma es máxima cuando  $x = y$ .

**Problema 7.9** Si de un disco metálico de radio  $R$  quitamos un sector circular podemos construir en vaso cónico. Determine el sector circular que debemos quitar para que el volumen del vaso sea máximo.

**Problema 7.10** ¿Cuál de los puntos de la recta de ecuación  $ax + by = 1$  está más cerca del origen?

**Problema 7.11** Una carretera que corre de norte a sur y otra que lo hace de este a oeste se cortan en el punto  $P$ . Un ciclista que se dirige al este con una velocidad de  $20\text{ km/h}$  pasa por  $P$  a las 11 de la mañana. En el mismo momento otro ciclista que viaja hacía el sur con una velocidad de  $40\text{ km/h}$  se encuentra a  $20\text{ km}$  al norte de  $P$ . Calcule cuándo se encuentran los dos ciclistas más cerca el uno del otro.

**Problema 7.12** Un triángulo isósceles pero no equilátero tiene su lado desigual de longitud  $12\text{ cm}$  y la altura sobre dicho lado es de  $5\text{ cm}$ . Determine los

puntos sobre esa altura tales que la suma de sus distancias a los tres vértices sea máxima y mínima respectivamente.

**Problema 7.13** Considerare el recinto determinado por la gráfica de  $y = \sqrt{x}$ , el eje de las  $x$  y las rectas de ecuación  $x = 0$ ,  $x = a$  ( $a$  fijo). Inscriba allí un rectángulo de área máxima. ¿Hay alguno de área mínima?

**Problema 7.14** Una compañía de bienes raíces es dueña de 180 departamentos que se alquilan en su totalidad cuando el alquiler es de \$310 mensuales. La compañía calcula que por cada 10 pesos de aumento en el alquiler se desocupan 5 departamentos. El gasto que le ocasiona a la compañía cada departamento desocupado es de 30 pesos mensuales, mientras que por cada departamento ocupado el gasto es de 20 pesos mensuales. ¿Cuál es el precio del alquiler por departamento con el que la compañía obtendría la mayor ganancia?

**Problema 7.15** Considerare la curva  $y = xe^{-x}$ ,  $0 \leq x < +\infty$ . De entre todos los triángulos de vértices  $(0,0)$ ,  $(x,0)$  y  $(x,y)$  encuentre el de área máxima.

## 7.9. Problemas varios

**Problema 7.16** Considerare la ecuación  $x^2 \ln x = k$  con  $k$  real.

- (a) ¿Cuántas soluciones tiene si  $k = -\frac{1}{6}$ ?
- (b) ¿Para qué valores de  $k$  hay una sola solución?

**Problema 7.17** Determine el mayor valor de  $k$  para que la desigualdad  $x^2 \ln x \geq k$  sea verdadera para todo  $x > 0$ .

**Problema 7.18** Considerare las funciones  $f(x) = e^x$  y  $g(x) = \ln x$ . Pruebe que existe un único  $c > 0$  donde los gráficos de ambas funciones tienen rectas tangentes paralelas en el punto de abscisa  $x = c$ . Determine un intervalo de longitud menor que 1 que contenga a  $c$ .

**Problema 7.19** Halle todos los valores reales de  $b$  para los cuales la ecuación  $x^3 - 3x + b = 0$  tiene una sola solución.

**Problema 7.20** Pruebe la siguiente desigualdad

$$xe^{-8x^2+1} < \frac{9}{20}, \quad x > 0$$

**Problema 7.21** Considerare el arco de parábola definido por  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 3(x-2)^2, 2 \leq x \leq 5\}$  y el punto  $P = (5,0)$ . Se traza desde  $P$  una recta que interseca a la curva en el punto  $Q$ . Halle las coordenadas de  $Q$  para que el

triángulo rectángulo limitado por dicha recta, el eje de las  $x$  y la recta vertical que para por  $Q$  tenga área máxima.

**Problema 7.22** Una función  $f$  satisface la siguiente ecuación diferencial

$$xf''(x) + 3x(f'(x))^2 = 1 - e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- (a) Pruebe que si  $f$  tiene un extremo en  $x_0 \neq 0$  entonces es un mínimo.
- (b) ¿Qué pasa si  $x_0 = 0$  es un punto crítico?

**Problema 7.23** Considere la función  $f(x) = e^{2x+1}(x^2 - 7x + \frac{1}{2})$ . Encuentre todos los puntos para los cuales la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  resulte mínima.

**Problema 7.24** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  considere la función  $f_n(x) = x^{1/n} - x$ . Sea  $x_n \in [0, 1]$  el punto donde  $f$  alcanza su máximo absoluto en el intervalo  $[0, 1]$ . Calcule, si existe,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n)$ .

**Problema 7.25** Considere la función  $f(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}}$ . Haga un gráfico aproximado señalando su dominio, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos y mínimos locales y asíntotas. Determine los valores de  $c$  para los cuales la ecuación  $f(x) = c$  tiene una única solución.

**Problema 7.26** De la función  $f$  se sabe que su derivada  $f'(x) = (x^2 - 1)x^2 e^{\sin x}$ .

- (a) Encuentre los extremos locales de  $f$ .
- (b) ¿Cuál es la cantidad máxima de ceros que puede tener  $f$ ?
- (c) Si se define  $h(x) = f(x^2 + 1)$ , encuentre los extremos locales de  $h$ .

**Problema 7.27** Halle todos los  $a \in \mathbb{R}$  tales que  $ax^2 - \ln x = 0$  tenga exactamente dos soluciones.

**Problema 7.28** Pruebe que  $x^n \ln x + 1 \geq 0$  cualquiera sea el  $n \in \mathbb{N}$ .

**Problema 7.29** Se dispone de un alambre de un metro de largo para construir un cuadrado y un aro. ¿Dónde se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas de las dos figuras sea

- (a) máxima?
- (b) mínima?

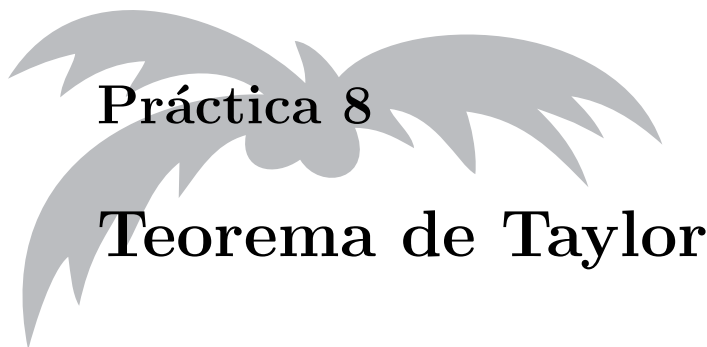
**Problema 7.30** Para cada  $x \in [0, 1]$ , la recta tangente a la curva  $y = \sqrt{1-x}$  forma con los ejes coordenados un triángulo. Halle el de menor área. ¿Existe un triángulo de área máxima?

**Problema 7.31** Un bañista que se encuentra nadando a 60 metros de una costa recta pide auxilio al guardavidas que se encuentra en la orilla a 100 metros del bañista. El guardavidas en tierra corre a una velocidad de 3,2 metros por segundo y en el agua nada a 1,1 metros por segundo. ¿En qué punto de la playa le conviene arrojarse al agua para llegar al bañista en el menor tiempo posible? ¿Cuánto más tarda si se arroja directamente al agua? ¿Y si corre por la costa hasta quedar enfrente del bañista?

**Problema 7.32** Pruebe que  $\ln^2(3x) \leq 3x$ , si  $x \geq \frac{1}{3}$

**Problema 7.33** Considere la función polinómica  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ . Encuentre dos intervalos cerrados sin puntos en común tales que  $f$  tenga una única raíz en cada uno de ellos.

**Problema 7.34** La lata de una gaseosa tiene una capacidad de  $354 \text{ cm}^3$ . Si el costo del material de la tapa es el doble que el del resto de la lata, ¿cómo deben ser las dimensiones de la lata para que el costo del material sea mínimo? (Suponga que la lata es un cilindro).



# Práctica 8

## Teorema de Taylor

### 8.1. Polinomio de Taylor

**Ejercicio 8.1** Considera la función  $f(x) = \ln(x+1)$ . Encuentra un polinomio  $P(x)$  de grado 3 tal que  $P(0) = f(0)$ ,  $P'(0) = f'(0)$ ,  $P''(0) = f''(0)$ ,  $P'''(0) = f'''(0)$ .

**Ejercicio 8.2** Calcule el polinomio de Taylor de las siguientes funciones, hasta el orden indicado alrededor de  $x_0$

- |   |  |
|---|--|
| (a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , orden 5, $x_0 = 0$ | (e) $f(x) = \ln x$ , orden 4, $x_0 = 1$    |
| (b) $f(x) = \sin x$ , orden 4, $x_0 = 0$        | (f) $f(x) = \sqrt{x}$ , orden 3, $x_0 = 4$ |
| (c) $f(x) = \cos x$ , orden 5, $x_0 = 0$        | (g) $f(x) = e^x$ , orden 10, $x_0 = 0$     |
| (d) $f(x) = \cos x$ , orden 5, $x_0 = 0$        | (h) $f(x) = (1+x)^6$ , orden 6, $x_0 = 0$  |

**Ejercicio 8.3** Comprueba que el polinomio de Taylor de orden  $n$  de la función  $f(x) = e^x$  es

$$P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

**Ejercicio 8.4** Obtenga el polinomio de Taylor de orden  $n$  de las siguientes funciones alrededor de  $x = 0$ .

- |                            |                              |
|----------------------------|------------------------------|
| (a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ | (e) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ |
| (b) $f(x) = \cos x$        | (f) $f(x) = \cosh x$         |
| (c) $f(x) = \sin x$        | (g) $f(x) = \arctan x$       |
| (d) $f(x) = e^{-x}$        | (h) $f(x) = \ln(1+x)$        |

**Ejercicio 8.5** Considerere el polinomio  $q(x) = x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ .

- (a) Halle los polinomios de Taylor de  $q$  en  $x = 0$  de órdenes 0 a 6.
- (b) Haga lo mismo, sin hacer cálculos, para  $q(x) = x^{20} + x^{19} + x^3 + x^2 + x + 1$ .

**Ejercicio 8.6** Considerere el polinomio de  $p(x) = (1 + x)^n$ , con  $n$  natural.

- (a) Obtenga el polinomio de orden  $n$  en  $x = 0$ .
- (b) A partir de (a), deduzca la fórmula del *binomio de Newton*.

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

Donde  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ . Ayuda:  $(a + b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$ .

**Ejercicio 8.7** Si el polinomio de Taylor de  $f$  de orden 5 en  $x = 2$  es

$$P(x) = (x - 2)^5 + 3(x - 2)^4 + 3(x - 2)^2 - 8$$

calcule

- (a)  $f^{(4)}(2)$  y  $f^{(3)}(2)$ .
- (b) ¿Puede conocer el valor de  $f^{(6)}(2)$ ?
- (c) ¿Cuánto vale  $f^{(6)}(2)$  si el polinomio es de orden 7?

**Ejercicio 8.8** Si el polinomio de Taylor de  $f$  de orden 2 en  $x = 5$  es

$$P(x) = 3 - (x - 5) + 9(x - 5)^2$$

- (a) Halle el polinomio de Taylor de orden 2 en  $x = 1$  de  $g(x) = \frac{2}{4-f(5x)}$
- (b) Halle el polinomio de Taylor de orden 2 en  $x = 5$  de  $h(x) = (1 + x^2)f(x)$

**Ejercicio 8.9** Los polinomios de Taylor de orden 4 en  $x = 2$  de las funciones  $f$  y  $g$  son, respectivamente

$$\begin{aligned}P(x) &= -2 + 3(x - 2) - 3(x - 2)^2 + (x - 2)^3 \quad \text{y} \\ Q(x) &= 5 + 12(x - 2) + (x - 2)^2 - 7(x - 2)^4\end{aligned}$$

Halle el polinomio de Taylor de orden 2 de  $t(x) = f(x)g(x)$  y  $s(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  en  $x = 2$ .



## 8.2. Expresión del resto

**Ejercicio 8.10** Considera la función del primer ejercicio,  $f(x) = \ln(x+1)$ , y sea  $P(x)$  el polinomio de Taylor de orden 3 en  $x = 0$ . Apelando al Teorema generalizando del Valor Medio (Teorema de Cauchy) compruebe que

$$\frac{f(x) - P(x)}{x^4} = f^{(4)}(c)$$

para algún valor  $c$  entre 0 y  $x$ .

**Ejercicio 8.11** Encuentre la expresión del resto en cada caso

- (a)  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x)$
- (b)  $\frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + R_5(x)$
- (c)  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_5(x)$
- (d)  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_6(x)$
- (e)  $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + R_3(x)$
- (f)  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + R_8(x)$

**Ejercicio 8.12** Considere la función  $f(x) = \cos x$ .

- (a) Obtenga el polinomio de  $P_4(x)$  de Taylor de orden 4 en  $x = 0$ .
- (b) Escriba la expresión de  $R_4(\frac{1}{2})$ .
- (c) Usando la calculadora encuentre el valor de  $f(\frac{1}{2}) - P_4(\frac{1}{2})$ .
- (d) Teniendo en cuenta que  $|\sin c| \leq 1$ , pruebe que  $|R_4(\frac{1}{2})| \leq \frac{1}{2^5 5!} < 0,0003$ . Compare con (c).

## 8.3. Problemas de aproximación

**Ejercicio 8.13** Se quiere aproximar  $e^{1/3}$

- (a) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 5 en  $x = 0$ , pruebe que el error cometido es menor que  $\frac{1}{174960}$ .
- (b) ¿De qué grado hay que tomar el polinomio de Taylor para que el error que se cometa al usar dicho polinomio sea menor que  $10^{-8}$ ?

(Ayuda: para las estimaciones, use que  $e$  es menor que 3).

**Ejercicio 8.14** Utilice el polinomio de Taylor de orden 4 en  $x = 0$  para aproximar el valor  $\sin(0,25)$  y dar una cota para el error que se ha cometido al tomar esa aproximación.

**Ejercicio 8.15** Considera la función  $f(x) = x \ln x$ .

- (a) Halle el polinomio  $P$  de orden 3 de  $f$  en  $x = 1$ . Escriba la expresión del resto.
- (b) Estime, acotando el resto, el error que se comete al calcular  $f(1,5)$  por medio de  $P(1,5)$ .

**Ejercicio 8.16** ¿Cuántos términos es suficiente tomar en el desarrollo de Taylor en  $x = 0$  de  $f(x) = e^x$  para obtener un polinomio que aproxime a dicha función en todo el intervalo  $[-1, 1]$  con un error menor que  $10^{-4}$ ? Use el polinomio hallado para hallar las tres primeras cifras decimales del número  $e$ ?

**Ejercicio 8.17** Considera la función  $f(x) = \ln(1+x)$ . ¿De qué grado hay que tomar el polinomio de Taylor en  $x = 0$  para poder calcular  $\ln(1,5)$  con un error menor de 0,001?

**Ejercicio 8.18** ¿Para qué valores de  $x$  la diferencia entre

- (a)  $\cos x$  y  $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$  es menor que  $5 \cdot 10^{-5}$ ?
- (b)  $\sin x$  y  $x$  es menor que  $10^{-3}$ ?

## 8.4. Problemas varios

**Problema 8.1** Hallar los valores de  $a$  y  $b$  de modo que el polinomio de Taylor de orden 2 de  $f(x) = a \ln(1+bx)$  en  $x = 0$  sea  $P(x) = 2x + \frac{3}{2}x^2$ .

**Problema 8.2** Considera la función  $f(x) = 1 - \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ .

- (a) Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de  $f$  en  $x = 0$ .
- (b) Pruebe que si  $R(x)$  es la expresión del resto en  $x = 0$  y si  $|x| \leq \frac{1}{2}$  entonces
 
$$|R(x)| \leq \frac{\pi^3}{6 \cdot 2^3 \cdot 4^3}$$

**Problema 8.3** Considera la función  $f(x) = 1 + 3x + \sin x$ .

- (a) Escriba el polinomio de Taylor en  $x = 0$  de orden 4 de  $f$ .
- (b) Calcule, estimando el resto, el error que se comete al calcular  $f\left(\frac{1}{3}\right)$  con  $P\left(\frac{1}{3}\right)$ .

**Problema 8.4** Calcule aproximadamente  $\sqrt{16,5}$  utilizando el polinomio de Taylor de orden 2 en  $x = 0$  de la función  $f(x) = \sqrt{16+x}$ . Estime, acotando el resto, el error que se comete.

**Problema 8.5** Determine un intervalo que contenga al origen, donde el polinomio de Taylor de orden 6 aproxime a  $\sin x$  con un error menor que  $10^{-4}$ .

**Problema 8.6** Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 en  $x = 0$  de  $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ . Estime el error que se comete al calcular los valores de la función por medio del polinomio hallado cuando  $-\frac{1}{2} \leq x < 1$ .

**Problema 8.7** Determine los valores de  $a$  y  $b$  para que el polinomio de Taylor de  $f(x) = \ln(1+x) + ax^2 + bx$  en  $x = 0$  empiece con la potencia de  $x$  de exponente lo más grande posible.

**Problema 8.8** Considere la función  $f(x) = \sin(2x)$ .

- (a) Halle el polinomio de Taylor de orden  $n$  de la función en  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- (b) Si  $R_n(x)$  es el resto, halle la expresión de  $R_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$ . Calcule el  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

**Problema 8.9** Considere la función  $f(x) = xe^{x-2}$

- (a) Calcule el polinomio de Taylor de orden  $n$  en  $x = 2$ .
- (b) Si  $R_n(x)$  es la expresión del resto, pruebe que  $\frac{n+3}{(n+1)!} \leq R_n(3) \leq \frac{3(n+4)}{(n+1)!}$ .
- (c) Calcule el  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(3)$ .

**Problema 8.10** La función  $f(x) = \sqrt[n]{ax+1}$  tiene como polinomio de Taylor de orden 2 en  $x = 0$  a  $P(x) = 1 + 5x - \frac{75}{2}x^2$ . Halle los valores de  $a$  y de  $n$ .

**Problema 8.11** La función  $f$  satisface la ecuación diferencial

$$(5x+1)f'(x) + f(x) = 1, \quad f(0) = 2.$$

Encuentre el polinomio de Taylor de orden 5 en  $x = 0$ .

**Problema 8.12** Considere la función  $f(x) = \sin x^2 + \cos x$ .

- (a) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 en  $x = \frac{\pi}{2}$
- (b) Pruebe que el error que se comete al calcular  $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  con el polinomio es menor que  $\frac{7\pi^3}{6000}$ .

**Problema 8.13** Considere la función  $f(x) = \sin x - 0,3x$ .

- (a) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 en  $x = \pi$ .
- (b) Use el polinomio obtenido en (a) para hallar una solución aproximada de  $f(x) = 0$ .

# Práctica 9

## Integrales

### 9.1. La función área – Propiedades de la integral

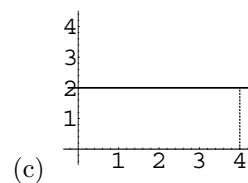
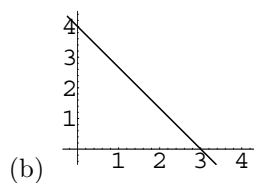
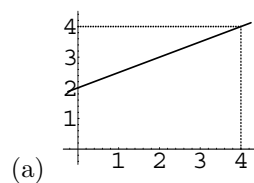
**Ejercicio 9.1** El espacio recorrido por un móvil, a partir del instante  $t = 0$ , viene dado por  $e(t) = 3t$ .

- (a) Haga un gráfico de las funciones espacio recorrido y velocidad del móvil.  
 (b) Complete la siguiente tabla.

tiempo transcurrido ( $t$ )	1	2	3	4	5	6	...	$t$
espacio transcurrido								
área bajo la curva velocidad (de 0 a $t$ )								

- (c) El espacio recorrido por otro móvil a partir del instante  $t = 0$ , viene dado por  $s(t) = t + \frac{1}{4}t^2$ . Repita los incisos (a) y (b) para este caso.

**Ejercicio 9.2** Halle, en cada caso, la función área bajo la curva entre 0 y  $x$ . Compruebe que  $A'(x) = f(x)$ .

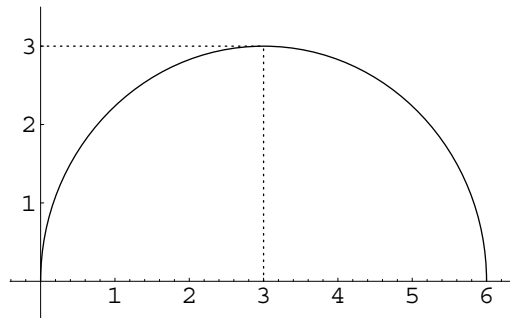


**Ejercicio 9.3** Se sabe que las funciones  $f$  y  $g$  son integrables y que

- (a)  $\int_{-3}^4 (3f(x) - 4g(x)) dx = 23$ ,  $\int_{-3}^4 g(x) dx = 7$  y  $\int_{-3}^1 f(x) dx = 12$ ; calcule  $\int_1^4 f(x) dx$ .  
 (b)  $\int_1^2 2f(x) dx = 5$ ,  $\int_1^2 g(x) dx = 7$ ; calcule  $\int_1^2 (f(x) + 2g(x)) dx$ .

## 9.2. Teorema fundamental del cálculo – Regla de Barrow

**Ejercicio 9.4** Sea  $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Se define  $A(x) = \int_0^x f(t)dt$ . El gráfico de  $A(x)$  es el siguiente:



- (a) Calcule  $\int_0^6 f(t)dt$ .
- (b) ¿Cuánto vale  $f(3)$ ?
- (c) Halle el conjunto donde  $f$  es positiva.
- (d) Pruebe que  $\int_0^6 |f(t)|dt = 2 \int_0^3 f(t)dt$ .

**Ejercicio 9.5** Calcule las derivadas de las siguientes funciones.

- (a)  $A(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$
- (b)  $B(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin u}{1+u} du, x > 0$
- (c)  $C(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t^2} dt, x > 0$
- (d)  $D(x) = \int_0^{\sin x} \frac{y}{2+y^3} dy$
- (e)  $E(x) = \int_2^{\tan x} \arctan z dz, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- (f)  $F(x) = \int_x^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt$

**Ejercicio 9.6** Considere las funciones

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 3, & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2, & \text{si } 0 < t \leq 2 \end{cases}.$$

- (a) La función  $f$  no es continua; ¿lo es  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ?
- (b) La función  $g$  no es derivable; ¿lo es  $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ ?

**Ejercicio 9.7** ⚡ Sabiendo que

- (a) la función continua  $f$  satisface  $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$ , calcule  $f(2)$ .  
 (b) la función continua  $g$  satisface  $\int_0^{x^2} g(t)dt = x^2(1+x)$ ,  $x > 0$ , calcule  $g(2)$ .

**Ejercicio 9.8** ⚡ Calcule las siguientes integrales, usando la Regla de Barrow y las propiedades de linealidad de la integral.

- (a)  $\int_0^3 3(x-2)dx$  (c)  $\int_\pi^{5\pi} (\sin x - \cos x)dx$   
 (b)  $\int_{-2}^2 (x^3 + 2x)dx$  (d)  $\int_0^{64} (2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$

**Ejercicio 9.9** ⚡

- (a) Compruebe que la segunda derivada de  $\int_0^x (x-t)f(t)dt$  es  $f(x)$ .  
 (b) Compruebe que la tercera derivada de  $\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f(t)dt$  es  $f(x)$ .  
 (c) Generalice.

**Ejercicio 9.10** ⚡ Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, compruebe las siguientes igualdades y calcule, en cada una de ellas, el valor de  $K$

- (a)  $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{3t+5}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+5} + K$   
 (b)  $\int_0^x \frac{\cos t}{2\sin t + 3} dt = \frac{1}{2} \ln |3 + 2\sin x| + K$   
 (c)  $\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{-x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + K$

### 9.3. Integración numérica

**Ejercicio 9.11** ⚡ Estime la integral de la función  $f(x) = \frac{1}{x}$  en el intervalo  $[1, 2]$  usando la fórmula de los trapecios partiendo el intervalo en diez intervalos de igual longitud. Calcule el error cometido con esta aproximación. Repita el cálculo usando la fórmula de Simpson. Estime el error en este caso y compare los resultados.

### 9.4. Primitivas

**Ejercicio 9.12** ⚡ Halle en cada caso, una función  $g(x)$  que satisfaga

- (a)  $g'(x) = 2$  (e)  $g'(x) = \cos x$   
 (b)  $g'(x) = x$  (f)  $g'(x) = x^5$   
 (c)  $g'(x) = \sin x$  (g)  $g'(x) = x + x^3$   
 (d)  $g'(x) = e^x$  (h)  $g'(x) = 3x + \frac{4}{x}$

**Ejercicio 9.13** Encuentre en cada caso, la función  $G(x)$  que satisface

- (a)  $G'(x) = 6x + 1$ ,  $G(1) = 3$
- (b)  $G''(x) = 6x + 1$ ,  $G'(1) = 3$ ,  $G(0) = 1$
- (c)  $G'''(x) = x + \sen x$ ,  $G''(0) = G'(0) = G(0) = 5$

**Ejercicio 9.14** Un móvil se desplaza por un camino. Se sabe que la aceleración en el instante  $t$  viene dada por  $a(t) = t(t - 100) \text{ km/h}^2$ . Si en el instante inicial  $t = 0$  el móvil se encuentra en la posición  $s_0$  y parte a una velocidad de  $30 \text{ km/s}$ , ¿cuál es la posición  $s(t)$ ,  $0 \leq t \leq 100$ ?

## 9.5. Cálculo de primitivas – Métodos de sustitución y de integración por partes

**Ejercicio 9.15** Calcule las siguientes integrales

- (a)  $\int 4x^6 dx$
- (b)  $\int_0^1 \sqrt{x} (3x + \sqrt{x}) dx$
- (c)  $\int \sen(x - 1) dx$
- (d)  $\int \frac{7dx}{\cos^2 x}$

**Ejercicio 9.16** Usando el método de sustitución, calcule las siguientes integrales.

- (a)  $\int (3x + 1)^2 dx$
- (b)  $\int \frac{dx}{2x + 5}$
- (c)  $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3 + 2}} dx$
- (d)  $\int \tan(2x) dx$
- (e)  $\int e^{-3x} dx$
- (f)  $\int_0^1 x e^{2x^2} dx$
- (g)  $\int \sen x \cos^2(x) dx$
- (h)  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$
- (i)  $\int \frac{\cos x}{\sen^4 x} dx$
- (j)  $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$
- (k)  $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx$
- (l)  $\int \frac{dx}{1 + (2x - 1)^2}$
- (m)  $\int a^{5x} dx$
- (n)  $\int x^3 e^{x^4 + 1} dx$
- (ñ)  $\int_0^\pi \sqrt{(1 + \cos x)^3} \sen x dx$
- (o)  $\int \frac{4x dx}{\sqrt[4]{5 - 2x^2}}$
- (p)  $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$
- (q)  $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$
- (r)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}}$
- (s)  $\int \frac{(1 + \ln x)^2}{x} dx$

- |  |   |
|--|---|
| (t) $\int \sqrt{(3x+5)^7} dx$                  | (y) $\int \frac{dx}{2+2x+x^2}$                |
| (u) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$             | (A) $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx$           |
| (v) $\int (x-1)\sqrt{x^2-2x} dx$               | (B) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}} dx$   |
| (w) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$  | (C) $\int \sin(\cos x) \sin x dx$             |
| (x) $\int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ | (D) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ |

**Ejercicio 9.17** Marque con una cruz la única respuesta correcta. Dada la función continua  $f$  ponemos  $A = \int_2^3 f(x)dx$  y  $B = \int_8^{11} f\left(\frac{t-2}{3}\right) dt$ , entonces es cierto que

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> $A = 3B$ | <input type="checkbox"/> $3A = B$                  |
| <input type="checkbox"/> $A = B$  | <input type="checkbox"/> ninguna de las anteriores |

**Ejercicio 9.18** Aplique la integración por partes para calcular

- |                         |                                |
|-------------------------|--------------------------------|
| (a) $\int x \ln x dx$   | (f) $\int \frac{x}{e^x} dx$    |
| (b) $\int_1^e \ln x dx$ | (g) $\int_0^\pi x^3 \cos x dx$ |
| (c) $\int x \sin x dx$  | (h) $\int x^3 e^{2x} dx$       |
| (d) $\int x e^x dx$     | (i) $\int \arccos x dx$        |
| (e) $\int \arctan x dx$ | (j) $\int_0^\pi e^x \sin x dx$ |

**Ejercicio 9.19** Si llamamos  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$  pruebe la fórmula de reducción

$$I_n = e - nI_{n-1}$$

**Ejercicio 9.20** Demuestre las siguientes fórmulas de reducción

- (a)  $I_n = \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + nJ_{n-1}$
- (b)  $J_n = \int x^n \cos x dx = x^n \sin x - nI_{n-1}$

**Ejercicio 9.21** La función  $f$  tiene derivada continua y satisface  $f(-\pi) = 3$  y  $\int_{-\pi}^{\pi/2} f(x) \sin x dx = 4$ . Calcule  $\int_{-\pi}^{\pi/2} f'(x) \cos x dx$ .



## 9.6. Fracciones simples

**Ejercicio 9.22** Halle las primitivas de las siguientes funciones racionales

$$(a) f(x) = \frac{4}{(x+1)(x-2)}$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$(b) f(x) = \frac{3x-2}{(x+2)(x-2)(x+3)}$$

$$(f) f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

$$(c) f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$$

$$(g) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3(x+1)^2}$$

$$(d) f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1}$$

$$(h) f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2(x-1)^2}$$

## 9.7. Problemas varios

**Problema 9.1** La función  $f$  satisface  $f(x) = 5xf'(x)$ . Si  $\int_0^2 f(t)dt = 12$ , calcule  $f(2)$ .

**Problema 9.2** Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 en  $x = 0$  de  $f(x) = \int_0^x (1+t)^3 \ln(1+t)dt$ .

**Problema 9.3** Encuentre una primitiva  $g$  de la función  $f(x) = \frac{e^{3x}}{4+e^{3x}}$  que satisfaga  $g(0) = -3 \ln 4$ .

**Problema 9.4** Halle una función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  derivable que satisfaga la ecuación integral  $(x+3)f(x) = x^2 + 1 + \int_1^x f(t)dt$  y  $f(1) = \frac{1}{2}$ .

**Problema 9.5** Halle una función continua  $g$  tal que  $1 + \int_0^{\ln x} g(e^t)dt = x^2 + \ln x$ ,  $x > 0$ .

**Problema 9.6** Pruebe que  $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$  si  $x > 0$ .

**Problema 9.7** Considere la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln x}{3x} & 0 < x \leq 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases}$ .

(a) Calcule  $\int_{e^{-3}}^1 f(x)dx$ .

(b) Determine el valor de  $k > 0$  para el cual  $\int_{e^{-3}}^k f(x)dx = 35$ .

**Problema 9.8** Si  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt$  pruebe que

$$nI_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2}, \quad \text{si } n \geq 2$$

**Problema 9.9** La función  $f$  es continua. Se define

$$G(x) = -\frac{1}{5}x + \int_0^{x^3+3} \sqrt{1+f^2(t)} dt.$$

Pruebe que  $G$  es estrictamente creciente.

**Problema 9.10** La función  $f$  tiene tres derivadas continuas y vale  $f(0) = 2$ ,  $f'(0) = 3$ ,  $f''(0) = 4$ ,  $|f'''(x)| < \frac{1}{8} \forall x$ . Si se aproxima  $\int_0^{0.5} f(t)dt$  por  $\int_0^{0.5} P(t)dt$ , donde  $P$  es el polinomio de Taylor de orden 2 en  $x = 0$ , calcule el error que se comete.

**Problema 9.11** Pruebe que

$$I_n = \int x^n \ln^n(x) dx = \frac{x^{p+1} \ln^n(x)}{p+1} - \frac{n}{p+1} I_{n-1}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

**Problema 9.12** ¿Para qué valores de  $p$  el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^p}$  es finito?

**Problema 9.13** Se define la función Gamma como

$$\Gamma(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n > 0.$$

(a) Calcule  $\Gamma(1)$  y  $\Gamma(2)$ .

(b) Pruebe que  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ . Deduzca que  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .



## Práctica 10

# Aplicaciones de la integral

### 10.1. Área entre curvas

**Ejercicio 10.1** Calcule el área de la región comprendida entre las curvas

- (a)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x - 2$ ,  $x = 0$
- (b)  $y^2 = x$ ,  $y = 2 - x$
- (c)  $y = x$ ,  $y = x^2 + 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$
- (d)  $y = x^3 - 12x$ ,  $y = x^2$
- (e)  $y = -2 + \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = e$
- (f)  $y = -x$ ,  $y = x - x^2$
- (g)  $y = (1 - \sqrt{x})^2$ , eje  $x$ , eje  $y$
- (h)  $y = \sin(2x)$ , eje  $x$
- (i)  $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ , eje  $x$
- (j)  $y = x \ln x$ , eje  $x$ ,  $x = e$

**Ejercicio 10.2** Determine  $c > 1$  de modo que el área de la región limitada por las curvas  $y = e^{2(x-5)}$ ,  $y = e^{-2(x-5)}$  y la recta de la ecuación  $y = c$  sea igual a 1.

**Ejercicio 10.3** El área de la región limitadas por las rectas  $y = ax$ ,  $y = a^2$  y la curva  $y = x^2$  es igual a  $\frac{7}{48}$ . Calcule el valor de  $a$ .

**Ejercicio 10.4** Determine el área de la región limitada por la curva  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ , y las dos rectas que unen el origen de coordenadas con los puntos de la curva  $(2, \frac{1}{2})$  y  $(\frac{1}{2}, 2)$ , respectivamente.

**Ejercicio 10.5** Marque la única respuesta correcta.

El área de la región del plano limitada por  $y = x - 2$ ,  $x = 4$ , el eje  $x$  y el eje  $y$  se obtiene calculando

☐  $\int_0^4 (x - 2) dx$

☐  $\int_0^4 (2 - x) dx$

☐  $\int_0^2 (x - 2) dx + \int_2^4 (2 - x) dx$

☐  $\int_0^2 (2 - x) dx + \int_2^4 (x - 2) dx$

## 10.2. Ecuaciones diferenciales

**Ejercicio 10.6** Halle  $y = f(x)$  que satisfaga la siguiente ecuación con condiciones iniciales  $f'(x) + 2xf(x) = 0$ ,  $f(0) = 3$ .

**Ejercicio 10.7** Encuentre todas las funciones  $f$  que satisfacen  $f'(t) + af(t) = 0$ ,  $a > 0$ . Estudie el comportamiento para  $t \rightarrow \infty$ .

**Ejercicio 10.8** De entre todas las funciones  $f$  que satisfacen la ecuación diferencial  $f'(x)f(x) = x^3 + x$ , encuentre la que cumpla  $f(1) = 3$ .

**Ejercicio 10.9** Encuentre todas las soluciones de la ecuación  $\frac{f'(x)}{f(x)} = xe^x$ .

**Ejercicio 10.10** Los átomos de elementos radiactivos son inestables. En un intervalo de tiempo dado, una fracción fija de los átomos se escinde espontáneamente para formar un nuevo elemento; de modo que si  $N(t)$  denota el número de átomos existentes en el tiempo  $t$  entonces  $N'(t)$ , el número de átomos que se desintegra por unidad de tiempo, es proporcional a  $N(t)$ ; es decir,

$$N'(t) = -kN(t)$$

donde  $k > 0$  se conoce como la constante de decaimiento de la sustancia. Si en el instante  $t = 0$ ,  $N(0) = N_0$

- (a) Calcule  $N(t)$  para  $t > 0$ .
- (b) ¿En qué momento habrá la mitad de átomos que había inicialmente? (semivida)
- (c) ¿Cómo varía la semivida?

**Ejercicio 10.11** Resuelva la siguiente ecuación diferencial (ecuación logística):

$$y'(t) = 0,5 y(t)(100 - y(t)), \quad y(0) = 1$$

### 10.3. Volumen de un sólido de revolución – Longitud de curva

$$\begin{aligned}\text{Volumen} &= \pi \int_a^b f^2(x) dx \\ \text{Longitud del arco} &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx\end{aligned}$$

**Ejercicio 10.12** Halle el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje  $x$  la parábola  $y = 3x^2$ , desde 0 hasta 3.

**Ejercicio 10.13** Halle el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje  $x$  la curva  $y = \frac{1}{x}$  desde 1 hasta 4.

**Ejercicio 10.14** Calcule el volumen del sólido engendrado por la curva  $y = x^3$ ,  $0 < x < 2$

- (a) al girar alrededor del eje  $x$ .
- (b) al girar alrededor del eje  $y$ .

**Ejercicio 10.15** Calcule la longitud del arco de las curvas

- (a)  $y = 2x^{3/2}$ ,  $0 \leq x \leq 11$ .
- (b)  $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{2}$ ,  $1 \leq x \leq 2$

### 10.4. Problemas varios

**Problema 10.1** Encuentre el área limitada entre las curvas  $y = 1 - x^2$ ,  $y = 1 - 4x^2$  y el eje  $x$ .

**Problema 10.2** Calcule el área limitada por las curvas  $y = x^3 - 2x$ ,  $y = x^2$  y las rectas verticales  $x = -2$  y  $x = 3$ .

**Problema 10.3** Calcule el área de la región limitada entre las curvas  $y = 2 \sin x$  y  $y = \sin(2x)$  para  $x \in [0, \pi]$ .

**Problema 10.4** Para cada  $n$  natural se define  $a_n = \int_0^{\pi/2} x \sin nx \, dx$ . Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Problema 10.5** Calcule el área de las dos regiones determinadas por las curvas  $y = \frac{x}{2x+1}$ ,  $y = \frac{1}{4}$ ,  $x = \frac{1}{3}$  y  $x = 5$ . ¿Cuál es la mayor?

**Problema 10.6** Calcule el área de la región comprendida por el eje  $y$ , la curva  $y = 1 + 5x - e^{5x}$  y la recta  $y = 5x - 2$ . Haga un gráfico aproximado indicando la región.

**Problema 10.7** Considere la función  $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ .

- (a) Determine su dominio de definición y zonas de crecimiento y de decrecimiento.
- (b) Calcule el área de la región limitada por el gráfico de  $f$  y el eje  $x$ .

**Problema 10.8** Calcule el área de la región comprendida entre la curva  $y = x^3 - x$  y la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa  $x = -1$ .

**Problema 10.9** La temperatura de un cuerpo que se enfría cambia a una tasa que es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente. Así, si  $C(t)$  es la temperatura del cuerpo en el tiempo  $t$  y  $a$  es la temperatura ambiente a la que supondremos constante, se tiene

$$C'(t) = -k(C(t) - a)$$

en donde  $k > 0$  es la constante de proporcionalidad.

- (a) Halle todas las soluciones de la ecuación en términos de  $k$ ,  $a$  y la temperatura inicial  $C(0)$ .
- (b) Calcule  $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$ . Ensaye alguna explicación física para el límite encontrado.
- (c) Si un cuerpo inicialmente está a  $26^\circ$  y una hora después a  $24^\circ$ , ¿cuál es la constante de proporcionalidad? (Suponga la temperatura ambiente de  $22^\circ$ ).

**Problema 10.10** Halle la longitud de la curva  $y = \int_0^x \sqrt{t^2 - 1} dt$  entre  $x = 1$  y  $x = 3$ .

**Problema 10.11** Considere la curva  $y = e^{-x}$ . Para cada  $n$  natural llamamos  $V_n$  al volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la curva alrededor del eje  $x$  con  $0 \leq x \leq n$ . Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ .

**Problema 10.12** Encuentre una función  $f$  continua en el eje real positivo, tal que

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt.$$

**Problema 10.13** Resuelva la ecuación diferencial  $xy' + (1-x)y = 0$  con la condición inicial  $y(0) = 2$

**Problema 10.14** El rectángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(5, 0)$ ,  $(5, 1)$  queda dividido en dos cuando se traza la curva  $y = -x^2 + \frac{5}{3}$ . Halle el área de la más grande.

**Problema 10.15** Halle el área comprendida entre la curva  $y = xe^{-x}$  y las rectas  $x = 0$  y el punto de abscisa donde  $f$  alcanza su máximo absoluto.

**Problema 10.16** Calcule el área comprendida entre la curva  $y = \ln x$ , la recta tangente a la curva que pasa por el origen y el eje  $x$ .

**Problema 10.17** Un sólido de revolución está engendrado por la rotación de la gráfica de  $y = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq a$ , alrededor del eje  $x$ . Si para cada  $a > 0$  el volumen es  $a^2 + a$ , halle la función  $f$  suponiendo que es positiva.

**Problema 10.18** Halle el valor de  $a > 0$  para que el área comprendida entre la curva  $y = \sin x$ ,  $x = 0$ ,  $x = a$  y el eje  $x$  sea  $\frac{5}{2}$ .



## Práctica 11

# Series

### 11.1. Término general y sumas parciales

**Ejercicio 11.1** Escriba el término general de las siguientes series. Escriba también la expresión de las sumas parciales.

(a)  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$

(d)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots$

(b)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \dots$

(e)  $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + \dots$

(c)  $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$

(f)  $\ln 2 + \ln(3/2) + \ln(4/3) + \ln(5/4) + \dots$

En los casos que la serie sea geométrica o telescópica, calcule su suma.

### 11.2. Series geométricas y series telescópicas

**Ejercicio 11.2** Calcule la suma de las siguientes series, en caso de que sean convergentes.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}}$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{5^n}$

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$

(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} - 1}{4^{n+1}}$

(f)  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1}$

**Ejercicio 11.3** Si la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{a^n} = 35/12$ , ¿cuánto vale  $a > 0$ ?



**Ejercicio 11.4** A partir de la identidad  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ,  $-1 < x < 1$  deduzca las siguientes fórmulas

- (a)  $1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-x^2}$ ,  $-1 < x < 1$   
 (b)  $x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n+1} + \dots = \frac{x}{1-x^2}$ ,  $-1 < x < 1$   
 (c)  $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \frac{1}{1+x}$ ,  $-1 < x < 1$   
 (d)  $1 + 2x + 4x^2 + \dots + 2^n x^n + \dots = \frac{1}{1-2x}$ ,  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

**Ejercicio 11.5**

- (a) A partir de que  $0,999\dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$ , compruebe que  $0,999\dots = 1$ .  
 (b) Escriba el número decimal  $0,444\dots$  como una serie. Halle la suma de la serie y escriba el número decimal como un cociente de enteros.  
 (c) Haga el mismo trabajo con el número  $0,1212\dots$

### 11.3. Criterios de convergencia

**Ejercicio 11.6** Decida si cada una de las siguientes series es convergente o divergente. Explique qué criterio usa en cada caso para obtener su respuesta.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$  (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin^3 n}{2^n + n^2}$  (i)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$   
 (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 1}$  (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$  (j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$   
 (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{4n^4 + 5n - 1}$  (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  (k)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$   
 (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$  (h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}$

**Ejercicio 11.7** Use el criterio integral de Cauchy para estudiar la convergencia de

- (a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  (c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$  (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1) \arctan^2 n}$   
 (b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$  (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$  (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$

**Ejercicio 11.8** Use el criterio de la raíz o del cociente, según convenga, para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} & \text{(g)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\ln^n n} \\
 \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} & \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1000^n}{n!} & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \\
 \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \frac{1}{2}\right)^n &
 \end{array}$$

**Ejercicio 11.9** Determine la convergencia o divergencia de las series que siguen. En caso de convergencia, decida si ésta es absoluta o condicional. Si usa el criterio de Leibnitz, asegúrese de que se satisfagan todas las hipótesis.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+1)}{n^3 + 1} & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+100} \\
 \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + 5n} & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \\
 \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n
 \end{array}$$

**Ejercicio 11.10** Use el criterio que más convenga en cada caso para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1} & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2 + \cos n} & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^3
 \end{array}$$

## 11.4. Series de potencia

**Ejercicio 11.11** Encuentre todos los valores de  $x \in \mathbb{R}$  para los cuales cada una de las siguientes series es convergente. Indique para qué valores la convergencia es absoluta y para qué valores la convergencia es condicional.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3} & \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{x^{2n}} \\
 \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n} \\
 \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!} & \text{(g)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n \\
 \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n & \text{(h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2} x^{2n+1}
 \end{array}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{3n+1}}{n^5}$$

$$(j) \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^n$$

**Ejercicio 11.12** Halle el radio de convergencia de las series

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^n$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+3}$$

**Ejercicio 11.13** En cada una de las siguientes series

$$I. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$VII. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^2+1} x^{2n}$$

$$II. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{2n+1}$$

$$VIII. \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^{2n+1}$$

$$III. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{2^n}$$

$$IX. \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} (x-2)^n$$

$$IV. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{3^n}$$

$$X. \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) x^n$$

$$V. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4x^2+4x+1)^n}{n \ln^2 n}$$

$$XI. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{n^2 \ln n}$$

$$VI. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2} \right) x^n$$

$$XII. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$$

- (a) Determine el radio de convergencia.  
 (b) Determine dónde la convergencia es absoluta y dónde condicional.

## 11.5. Problemas varios

**Problema 11.1** ¿Para qué valores de  $p > 0$  la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$  es convergente?

**Problema 11.2** ¿Para qué valores de  $p > 0$  la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$  es convergente?

**Problema 11.3** Considera la sucesión  $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^3} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$  y la serie alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ .

- (a) Explique por qué no se puede aplicar el criterio de Leibnitz en esta serie alternada.
- (b) Pruebe que la serie es absolutamente convergente.

**Problema 11.4** Estudie la convergencia de las series

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$$

**Problema 11.5** La sucesión de términos positivos  $a_n$  satisface  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 5 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ , ¿es convergente la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ?

**Problema 11.6** ¿Para qué valores de  $a$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a)^n}{n} (x-2)^n$  tiene radio de convergencia igual a 2?

**Problema 11.7** Encuentre todos los valores reales de  $x$  para los cuales las siguientes series son convergentes. Indique cuándo la convergencia es absoluta y cuándo es condicional.

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^2}{8^n} (x-3)^{3n+1}$
- (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n (3x-1)^{n+1}$ . Para los  $x$  hallados encuentre el valor de la suma.
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n)^n} x^{3n}$

# 12

## Programa

Análisis matemático C.B.C. para Ciencias Exactas e Ingeniería.

### Unidad 1 Números reales – funciones

Números reales. Propiedades básicas. Representación sobre la recta. Supremo e ínfimo. Funciones. Definición. Funciones reales. Dominio e imagen. Gráfico. Funciones elementales algebraicas y trascendentes. Composición. Función inversa. Representación de curvas en forma paramétrica.

Spiegel: (1); Ayres-Mendelson: (1-6)

### Unidad 2 Sucesiones

Sucesiones. Noción de límite. Propiedades. Sucesiones monótonas. El número  $e$ . Otros límites especiales. Introducción a las series numéricas.

Spiegel: sucesiones (3), series (11); Ayres-Mendelson: sucesiones (53), series (54-58)

### Unidad 3 Límite y continuidad

Noción de límite funcional. Cálculo de límites. Álgebra de límites. Límites laterales. Límites infinitos y en infinito. Asíntotas. Continuidad. Propiedades. Funciones continuas en intervalos cerrados. Aplicaciones al cálculo de ceros de funciones. Ejemplos de métodos numéricos elementales.

Spiegel: (2); Ayres-Mendelson: (7-8)

### Unidad 4 Derivadas

Noción de tangente a una curva. Velocidad. Definición de derivada. Derivada de funciones elementales. Reglas de derivación. Regla de la cadena. El Teorema del Valor Medio y sus aplicaciones. Regla de L'Hospital. Aproximación lineal. Diferencial. Estudio de funciones: crecimiento y decrecimiento, extremos, concavidad, convexidad, puntos de inflexión. Trazado de curvas. Problemas de máximos y mínimos. Polinomio de Taylor y Mac Laurin. Aproximación de funciones. Estudio del error. Aplicaciones al cálculo de ceros de funciones: método de Newton-Raphson.

Spiegel: (4); Ayres-Mendelson: (9-19) y (26-29)

### Unidad 5 Integrales

Particiones. Integral superior e inferior. Integral definida. Propiedades. Cálculo aproximado de integrales. El Teorema Fundamental del Cálculo. Regla de Barrow. Cálculo de primitivas. Los métodos de sustitución y de integración por partes. Aplicaciones al cálculo de áreas, volúmenes de revolución y longitud de curvas.

Spiegel: (5); Ayres-Mendelson: (30-31, 34, 37-42, 47)

# Bibliografía

- [1] Ayres-Mendelson: *Cálculo diferencial e integral*, Serie Schaum - Mc Graw Hill.
- [2] Spiegel: *Cálculo superior*, Serie Schaum - Mc Graw Hill.
- [3] Piskunov: *Cálculo diferencial e integral*, Mir.
- [4] Demidovich: *Ejercicios y problemas*, varias editoriales.
- [5] Purcell: *Cálculo...*, Prentice Hall Hispanoamericana. (hay dos versiones, la 'lite' es suficiente)
- [6] Lang: *Cálculo*, Addison Wesley Iberoamericana.
- [7] Karel de Leew: *Calculus*, Eudeba.
- [8] Sadosky-Guber: *Cálculo diferencial e integral*, Alsina.
- [9] Spivak: *Calculus*, Reverté.
- [10] Bers: *Cálculo diferencial e integral*, Interamericana.
- [11] Courant-Jones: *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Limusa.
- [12] Apostol: *Calculus*, Reverté.
- [13] Rey Pastor-Pi Calleja-Trejo: *Análisis matemático*, Vol. I, Kapelusz.
- [14] Guzmán-Rubio: *Análisis matemático*, Vol. I y II, Anaya.
- [15] Guzmán-Colera: *Matemática I y Matemática II*, Anaya.
- [16] Noriega: *Cálculo diferencial e integral*, Docencia.