

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

RICARDO J. NORIEGA

ÍNDICE GENERAL

Prólogo del autor	1
El autor	3
Plan de la obra	3
3. Límite de sucesiones	3
3.1. Definición de límite de una sucesión	3
3.2. Algunas propiedades del límite	12
3.3. Límites infinitos	17
3.4. Algunos límites importantes	20
3.5. Un criterio de convergencia	23
3.6. El número e	25
3.7. La función logaritmo	30
3.8. Otras propiedades del límite	32
3.9. Teoremas de encaje de intervalos y de Bolzano-Weierstrass	36
3.10. Sucesiones de Cauchy	40
Problemas adicionales	42
4. Series numéricas	43
4.1. Definición de serie	43
4.2. Series de términos positivos: criterios de convergencia	45
Referencias	47
Índice de Figuras	48
Índice de Tablas	48
Índice de Autores	49
Índice	50

PRÓLOGO DEL AUTOR

La mayoría de los textos sobre Cálculo Diferencial e Integral caen en una de estas dos categorías: la de aquellos que buscan transmitir al lector pericia en las operaciones propias del Cálculo (paso al límite, derivación, integración) y la de aquellos que ponen el acento en el rigor de las deducciones y en los aspectos conceptuales. Ha sido mi intención conseguir con este libro inducir en el lector la mencionada

Date: 08 de junio de 2001.

Key words and phrases. Cálculo, Sucesiones numéricas, Series numéricas.

Trabajo realizado por los alumnos (Olga Scagnetti, Pamela Llop, María Fernández, Diego Rinaldi, Ernesto Diez, Vanina Presutti, Mauricio Ramseyer, Lucrecia Martínez, María Saccavino, Patricia Cettour) del Taller de Informática de la Licenciatura en Matemática Aplicada, Departamento de Matemática, FIQ, Universidad Nacional del Litoral, primer semestre de 2001.

pericia, sin sacrificar para ello lo que es, sin duda, uno de los aspectos distintivos de la matemática: la demostración frente al argumento, el razonamiento frente al pseudorazonamiento. Desde luego, ello implica un doble trabajo tanto para el que escribe como para el que estudia, pero es un trabajo que tiene en el mejor entendimiento del tema su recompensa, tanto para el que está interesado en las aplicaciones del Cálculo como para el que desee introducirse en las matemáticas superiores.

Este libro está basado en los cursos que he dado en los últimos años en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, cursos que plantean la doble necesidad mencionada, ya que son tomados por matemáticos así como por estudiantes de otras ciencias, para los cuales el Cálculo es más una futura herramienta que un objeto de estudio en sí mismo.

Existe un excelente método para no aprender nunca matemáticas, y es el de esquivar las dificultades cada vez que ellas aparezcan. Por eso le aconsejo al lector que entre de lleno en ellas y que no olvide nunca la importancia que en el estudio de las matemáticas tiene el “mirar fijo”: si algo no se entiende bien, o no se entiende para nada, detenerse en ese párrafo y pensar intensamente mientras se lo relee una y otra vez, permite siempre llegar a un punto crítico en donde la cosa se hace clara, y en donde lo que ya no se entiende es porque antes no se entendía. Porqué y cómo sucede esto, es uno más de tantos misterios, pero que sucede, sucede. Y sobre todo, no desanimarse por los tropiezos; si no los hubiera, entonces no estaría aprendiendo nada con esta lectura.

He hecho abundante uso al escribir este libro de las excelentes notas del Dr. Enzo Gentile y del Lic. Fernando Carugno basadas en cursos anteriores de Cálculo dictados en la Facultad de Ciencias Exactas, y quiero agradecerles sinceramente su impensada colaboración. Particularmente el ejemplo del curso dado por el Dr. Gentile me ha hecho ver la posibilidad de tomar el toro por las astas y tratar la potencia de exponente real con todo detalle y rigor al comienzo del libro, sin esperar para ello a tener la noción de integral.

Hay más personas a quienes quiero agradecer. Al Dr. Norberto Fava, por la cantidad de consejos y observaciones sobre cómo y qué escribir en este libro. Al Ingeniero Roque Scarfiello, por su constante hincapié en las necesidades de los lectores no matemáticos que ha influido en el contenido y lenguaje de varios capítulos. Al Dr. Manuel Balanzat, por haberme facilitado generosamente los manuscritos de su propio texto sobre el tema, pronto a ser publicado. Al Prof. Juan Carlos Dalmasso, y a través de él a la gente del Centro de Investigación y Acción Educativa, CINAE, por haberme dado la oportunidad de escribir este libro. A María Angélica Tancredi y a Silvia López, por haber convertido en copias legibles mis confusos manuscritos. Y a mi mujer, sin cuyo estímulo constante jamás hubiera completado esta tarea.

Buenos Aires, abril de 1979

EL AUTOR

Ricardo J. Noriega nació en Buenos Aires en 1945. Obtuvo el título de Doctor en Ciencias Matemáticas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires en 1976, bajo la dirección del Dr. Luis A. Santaló. Era especialista en Geometría Diferencial, tema sobre el cual ha publicado trabajos y textos. Desde 1966 fue docente en el Departamento de Matemáticas de dicha Facultad, donde se desempeñó —hasta su prematuro fallecimiento en 1992— como Profesor con dedicación exclusiva.



PLAN DE LA OBRA

Módulo 1

Capítulo 1: Los números reales

Módulo 2

Capítulo 2: Funciones y su representación gráfica

Capítulo 3: Límite de sucesiones

Capítulo 4: Series numéricas

Módulo 3

Capítulo 5: Geometría analítica plana

Capítulo 6: Límite de funciones y continuidad

Capítulo 7: Derivadas

Módulo 4

Capítulo 8: Integral definida

Capítulo 9: Cálculo de primitivas

Capítulo 10: Convergencia uniforme y series de potencias

3. LÍMITE DE SUCESIONES

CEN, 33

3.1. Definición de límite de una sucesión. Aunque en el Capítulo 1¹ hemos ya hablado algo sobre sucesiones, volvemos aquí a recordar el concepto. Habíamos dicho que una sucesión (de números reales) consistía en asignarle a cada número natural n , un número real que indicamos a_n . De esta manera, al número 1 se le asigna un número real a_1 , al número 2 un número real a_2 , etc. De esta manera, una sucesión queda en la forma:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Por ejemplo, si a cada número natural n se le asigna su cuadrado, n^2 , tenemos la sucesión dada por $a_n = n^2$, o sea:

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots$$

¹Noriega, R.J., *Cálculo Diferencial e Integral*, Ed. Docencia (1979) Buenos Aires

y si a cada número natural n se le asigna su inverso multiplicativo, $\frac{1}{n}$, tenemos la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{n}$, o sea:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Con la terminología del Capítulo 2, es fácil dar una definición precisa del concepto de “sucesión”:

Definición 3.1. Una sucesión (de números reales) es una función $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

OS,34-37

Para concordar con la notación anterior, quedaremos de acuerdo en escribir, para cada sucesión $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$a_n = a(n)$$

Hay que distinguir entre la sucesión misma y el conjunto de valores que ella toma. Este último conjunto puede incluso ser finito; por ejemplo, consideremos la sucesión:

$$-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$$

o sea, $a_n = a(n) = (-1)^n$. En este caso, el conjunto de valores que toma la sucesión se reduce a un conjunto de dos elementos: el 1 y el -1 . Por eso no se suele indicar una sucesión como $\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$ (en este caso sería $\{a_n: n \in \mathbb{N}\} = \{1, -1\}$) sino en la forma $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o también $(a_n)_{n \geq 1}$.

Si se representan los diversos valores a_n , para una sucesión dada, sobre una recta, se puede tener una idea del comportamiento que ésta tiene. Consideremos por ejemplo la sucesión $a_n = 1/n$, es decir:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Representando los primeros términos en una recta obtenemos el gráfico representado en la figura 1 siguiente:

FIGURA 1. Primeros términos de la sucesión $1/n$

Geométricamente parece claro que a medida que vamos tomando valores sucesivos de a_n , nos vamos acercando al 0. En efecto, a_2 está más cerca de 0 que a_1 ,

a_3 está más cerca de 0 que a_2 , etc. Pero esta última afirmación no lo dice todo sobre ese acercamiento. Porque también es cierto, por ejemplo, que a_2 está más cerca de -1 que a_1 , que a_3 está más cerca de -1 que a_2 , etc. y evidentemente el acercamiento a 0 de esta sucesión tiene una característica que no tiene, por ejemplo, su acercamiento a $-l$.

¿Cuál es esa característica? Pues la de que esta sucesión llega a estar tan cerca de 0 como se quiera. En cambio no vale eso si cambiamos 0 por -1 , esta sucesión no llega a estar tan cerca de -1 como se quiera, su distancia a -1 es, como se puede ver en la figura, siempre mayor que 1. ¿Cómo podemos poner en términos precisos la afirmación: “una sucesión $(a_n)_n \geq 1$, llega a estar tan cerca del número ℓ como se quiera”? La distancia entre a_n y ℓ está medida por $|a_n - \ell|$ (Parágrafo 1.12), por lo tanto lo que queremos decir es que $|a_n - \ell|$ llega a ser tan chico como se quiera.

En otras palabras: si nos dan un número positivo cualquiera, digamos ε , no importa cuán chico sea, podemos conseguir que $|a_n - \ell|$ sea menor que ε con tal de avanzar lo suficiente en la sucesión, es decir, con tal de tomar n grande. Y más aun: si tomamos n más grande todavía, entonces también seguirá siendo $|a_n - \ell|$ menor que ε (pues ese módulo debe ser más pequeño a medida que n aumenta). Toda esta charla se puede poner ahora en términos precisos:

Definición 3.2. Se dice que una sucesión $(a_n)_n \geq 1$ tiene límite ℓ , o converge a ℓ , o se acerca a ℓ

$$(\text{en símbolos, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell)$$

si tiene la siguiente propiedad:

$$\text{“Cualquiera sea el número real } \varepsilon > 0, \text{ hay un número natural } n_0 \text{ tal que, para } n \geq n_0, \text{ es } |a_n - \ell| < \varepsilon\text{”}. \quad (1)$$

Ya que, inspirados en un ejemplo, dimos la definición general de límite de una sucesión, sería bueno ver que ese ejemplo se ajusta a la definición.

Consideremos entonces nuevamente el ejemplo $a_n = 1/n$; afirmamos que, en el sentido de la Definición 3.2, es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Hay que probar entonces que esta sucesión tiene efectivamente la propiedad 1.

Sea pues ε un número real positivo cualquiera. Tenemos que encontrar un natural n_0 con la propiedad de que, si $n \geq n_0$, sea $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$, o sea $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$

Como $1/n$ es positivo, esta última desigualdad equivale a $1/n < \varepsilon$.

Aquí hacemos lo que será el punto clave en los ejemplos: despejar n de esa desigualdad. Por supuesto, eso es muy fácil: resulta $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Cuando se llega a despejar n , uno puede asegurarse de que el resto seguirá bien. Tomamos como n_0 un número natural cualquiera que cumpla $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (existe por Arquimedianidad (¿Porqué?)). Entonces, si $n \geq n_0$

$$|\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

Esto demuestra que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ satisface la propiedad 1 cuando $\ell = 0$ y, por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Veamos varios ejemplos más que aclaren la Definición 3.2 y su uso.

hasta aquí se realizan correcciones menores y se activó la referencia a la propiedad

Ejemplo 3.3. Consideremos la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{n^2}$. Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Sea ε un número real positivo cualquiera. Tenemos que encontrar un natural n_0 con la propiedad de que, si $n \geq n_0$, sea $|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon$. Como $|\frac{1}{n^2} - 0| = |\frac{1}{n^2}| = \frac{1}{n^2}$ la desigualdad $|\frac{1}{n^2}| < \varepsilon$ es equivalente a la desigualdad $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$.

Nuevamente despejamos n de esta desigualdad: pasando de miembro resulta ser $\frac{1}{\varepsilon} < n^2$, es decir $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, o sea $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$. Al llegar a este punto, como lo haremos siempre, elegimos un número natural $n_0 > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ (con lo cual será $\frac{1}{n_0^2} < \varepsilon$). Entonces, si $n \geq n_0$

$$|\frac{1}{n^2} - 0| = |\frac{1}{n^2}| = \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon$$

lo que prueba lo afirmado.

Ejemplo 3.4. Consideremos la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{n^2+n}$. Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+n} = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Queremos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, $|\frac{1}{n^2+n} - 0| < \varepsilon$. Esta desigualdad es equivalente a $\frac{1}{n^2+n} < \varepsilon$, pero ahora despejar n de la desigualdad se ha vuelto un poco más complicado.

En vista de ello, apelamos a la siguiente, y evidente, acotación

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n}$$

y entonces, en lugar de despejar n de $\frac{1}{n^2+n} < \varepsilon$, lo despejamos de $\frac{1}{n} < \varepsilon$, con lo que resulta ser $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Elegimos ahora un número natural $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (con lo cual $\frac{1}{n} < \varepsilon$) y todo va a andar bien. En efecto, si $n \geq n_0$

$$|\frac{1}{n^2+n} - 0| = \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

lo que prueba lo afirmado.

Ejemplo 3.5. Consideremos la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{2n^2-3n}$. Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2-3n} = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y busquemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, $|\frac{1}{2n^2-3n} - 0| < \varepsilon$.

Desde luego, $|\frac{1}{2n^2-3n} - 0| = |\frac{1}{2n^2-3n}|$, pero para sacar las barras de módulo de aquí, hay que tener un poco de cuidado. Para que sea positivo el término en cuestión, debe ser $2n^2 - 3n > 0$, o sea $2n^2 > 3n$ de donde, simplificando n , $2n > 3$ o sea $n > \frac{3}{2}$. Entonces todos los razonamientos que ahora vengan serán válidos si $n > \frac{3}{2}$; como n es natural, eso es lo mismo que pedir $n > 1$. Por lo tanto, sea cual sea el n_0 que elijamos al final del proceso, va a tener que ser mayor que 1.

Sigamos. Con esa precaución, resulta ser $|\frac{1}{2n^2-3n}| = \frac{1}{2n^2-3n}$, y nuevamente despejar n de $|\frac{1}{2n^2-3n}| < \varepsilon$ resulta complicado. Nos gustaría entonces hacer una acotación como la del Ejemplo 3.4, pero ya no es tan fácil. Porque no es cierto que $\frac{1}{2n^2-3n} < \frac{1}{2n^2}$ (es mayor en realidad) ni que $\frac{1}{2n^2-3n} < \frac{1}{1-3n}$. El objetivo, desde luego, es dejar en el denominador una sola potencia de n ; para ello pensamos lo

siguiente: si fuese $2n^2 > 4n$, entonces sería $2n^2 - 3n > 4n - 3n = n$, y por lo tanto $\frac{1}{2n^2-3n} < \frac{1}{n}$. Pero que valga $2n^2 > 4n$ es equivalente a $2n > 4$, o sea a $n > 2$.

Entonces, sea cual sea el n_0 que elijamos al final, va a tener que ser mayor que 2.

Con esta precaución (que incluye a la anterior), resulta ser: $\frac{1}{2n^2-3n} < \frac{1}{n}$ y despejando n de $\frac{1}{n} < \varepsilon$ resulta $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Guiados por los ejemplos anteriores, elegiríamos $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, pero si recordamos que debe ser también mayor que 2, elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

hasta aquí toneladas de comas y puntos separados de su antecedente y pegados al consecuente

$$n_0 > \max\{2, \frac{1}{\varepsilon}\}$$

(el segundo miembro indica el mayor entre los números 2 y $\frac{1}{\varepsilon}$). Eligiendo n_0 de esa manera, resulta $n_0 > 2$ y además $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Ahora todo va a ir bien; si $n \geq n_0$, será :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2n^2-3n} - 0 \right| &= \left| \frac{1}{2n^2-3n} \right| = \\ &= \frac{1}{2n^2-3n} \text{ (ya que } n \geq n_0 > 1 \text{)} \\ &< \frac{1}{4n-3n} \text{ (ya que } n \geq n_0 > 2 \text{)} \\ &= \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\varepsilon} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

y nuestra afirmación queda demostrada.

Ejemplo 3.6. Consideremos la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{n^3-3n^2+2n-4}$
Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3-3n^2+2n-4} = 0$$

Este ejemplo es muy similar en su tratamiento al anterior, así que lo hacemos más brevemente. Observemos que para $n > 4$ es, multiplicando por n^2 , $n^3 > 4n^2$ y por lo tanto $n^3 - 3n^2 + 2n - 4 > 4n^2 - 3n^2 + 2n - 4 = n^2 + 2n - 4$. ecuación corregida

Por otra parte, $n^2 + 2n - 4 > 2n - 4$ y despejar n de $\frac{1}{2n-4} < \varepsilon$ es fácil (resulta $n > \frac{\frac{1}{\varepsilon}+4}{2} = \frac{1}{2\varepsilon} + 2$). Entonces eligiendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > \max\{4, \frac{1}{2\varepsilon} + 2\}$$

debe resultar la desigualdad buscada. En efecto, si $n \geq n_0$

$$\left| \frac{1}{n^3-3n^2+2n-4} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n^3-3n^2+2n-4} \right| =$$

(ya que al ser $n > 4$, el denominador es > 0)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^3 - 3n^2 + 2n - 4} < \frac{1}{4n^2 - 3n^2 + 2n - 4} \\
&= \frac{1}{n^2 + 2n - 4} < \frac{1}{2n - 4} \\
&\geq \frac{1}{2n_0 - 4} < \frac{1}{2(\frac{1}{2\varepsilon} + 2) - 4} \\
&= \frac{1}{\frac{2}{2\varepsilon} + 4 - 4} \\
&= 1/\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon
\end{aligned}$$

OS, OK

PNL,38-41

lo cual prueba nuestra afirmación.

Ejemplo 3.7. A esta altura, el lector debe estar sospechando que todos los límites valen 0. Consideremos la sucesión dada por $a_n = \frac{n^2+2n+1}{n^2-3n-2}$. Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 - 3n - 2} = 1$$

cambiamos de altura de barras de valor absoluto
cambiamos desde aquí ε por ε

Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitrario. Es

$$\left| \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 - 3n - 2} - 1 \right| = \left| \frac{n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 3n - 2)}{n^2 - 3n - 2} \right| = \left| \frac{5n + 3}{n^2 - 3n - 2} \right| \quad (2)$$

Queremos conseguir que esto sea menor que ε tomando n grande. La idea que nos va a guiar es dejar solamente potencias cuadradas de n en el denominador y n sin elevar (o elevado a la 1) en el numerador, de manera que lo que obtengamos sea del tipo $\frac{An}{Bn^2} = \frac{A}{Bn}$ (despejar n de $\frac{A}{Bn} < \varepsilon$ es fácil).

Primero trataremos de quitar las barras de módulo en el tercer miembro de la ecuación 2. Para eso observamos que el denominador es positivo, pues al estar n elevado al cuadrado, es siempre mayor que $3n + 2$ que son negativos. No hace falta tomar n muy grande: si $n > 4$, $n^2 - 3n - 2 > 4n - 3n - 2 = n - 2 > 4 - 2 = 2 > 0$, luego, si al elegir n_0 tomamos la precaución de que sea mayor que 4, podemos olvidarnos de las barras de módulo.

Queremos dejar potencias cuadradas de n en el denominador; para ello observamos que, para n grande, es $n^2 - 3n - 2 > n^2 - \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{3}n^2$, en efecto es $-3n > -\frac{1}{3}n^2$ si y sólo si $3n < \frac{1}{3}n^2$, o sea si y sólo si $9 < n$. Y es $-2 > -\frac{1}{3}n^2$ si y sólo si $6 < n^2$, lo cual se consigue seguro si $n > 3$.

En definitiva, para $n > 9$ podemos decir que $n^2 - 3n - 2 > n^2 - \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{3}n^2$. Pero entonces, al elegir n_0 , debemos tener la precaución de que sea mayor que 9. En ese caso quedaría

$$\begin{aligned}
\left| \frac{5n + 3}{n^2 - 3n - 2} \right| &= \frac{5n + 3}{n^2 - 3n - 2} < \frac{5n + 3}{n^2 - \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{3}n^2} \\
&= \frac{5n + 3}{\frac{1}{3}n^2} = \frac{15n + 9}{n^2} \\
&< \frac{15n + 9n}{n^2} = \frac{24n}{n^2} = \frac{24}{n}
\end{aligned}$$

y despejar n de $\frac{24}{n} < \varepsilon$ es fácil: será $n > \frac{24}{\varepsilon}$. Llegado a este punto, como elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_0 > \max\left\{9, \frac{24}{\varepsilon}\right\}$$

(con lo cual será $n_0 > 9$ y $n_0 > \frac{24}{\varepsilon}$). Si $n \geq n_0$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{n^2 + 2n - 1}{n^2 - 3n - 2} - 1 \right| &= \left| \frac{5n + 3}{n^2 - 3n - 2} \right| \\ &= \frac{5n + 3}{n^2 - 3n - 2} \text{ (ya que } n \geq n_0 > 9 > 4) \\ &< \frac{5n + 3}{n^2 - \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{3}n^2} = \frac{15n + 9}{n^2} \text{ (ya que } n \geq n_0 > 9) \\ &= \frac{15n + 9n}{n^2} = \frac{24}{n} \leq \frac{24}{n_0} \leq \frac{24}{\frac{24}{\varepsilon}} = \varepsilon \end{aligned}$$

que era lo que habíamos afirmado.

Observación 3.8. En todos estos ejemplos, el lector habrá notado que, con la definición de límite, sólo podemos comprobar, hasta ahora, que determinado número es efectivamente el límite de cierta sucesión, pero que no tenemos manera de averiguar cuál es ese límite. Para ello debemos ver, lo haremos en el próximo párrafo, en algunas propiedades de la noción de límite, propiedades que nos facilitarán posteriormente el cálculo afectivo de dichos límites.

Observación 3.9. En los cinco ejemplos que hemos dado, hay una mecánica de procedimientos que es oportuno resaltar aquí. En primer término, el procedimiento acotación, tan importante en el Análisis Matemático que hay quienes dicen que “hacer Análisis es acotar”; acotar bien desde luego.

El caso típico de acotación es el que hemos visto: queremos mostrar que una cierta expresión se puede hacer menor que ε ; para ello mostramos que esa expresión es, a su vez, menor que otra, y que esta otra se puede hacer menor que ε (con mayor razón entonces la expresión original).

Acotar bien, es aquí, conseguir esta otra expresión de manera que sea más fácil de ver que se puede hacer menor que ε (en el ejemplo 3.4, es más fácil ver que $\frac{1}{n}$ se puede hacer menor que ε que verlo directamente para $\frac{1}{n^2+n}$; en el ejemplo 3.7, es más fácil ver que $\frac{24}{n}$ se puede hacer menor que ε que verlo directamente para $\left| \frac{n^2+2n+1}{n^2-3n-2} - 1 \right|$, etc).

referencia agregada

referencia agregada

La pericia en la acotación se consigue peleándose con los ejercicios (ahora vienen algunos), tratando de imitar en ellos los ejemplos

Observación 3.10. Se habrá observado en los ejemplos que, una vez elegido el n_0 , la cosa se vuelve más o menos automática, ya que hay que repetir acotaciones hechas anteriormente. Eso hace que mucha gente, en la práctica, considere terminado el ejercicio con la elección de n_0 . Desde un punto de vista lógico no es así, a partir de la elección del n_0 se demuestra, en realidad, que el límite es el número indicado. Pero no se puede negar que la verdadera dificultad, en cada ejemplo, estriba en llegar a la adecuada elección del n_0 , por lo cual la mencionada actitud no deja de tener su fundamento (lo que viene después, insistimos, es más o menos automático).

Ejercicio 3.11. Probar que la sucesión constante, $a_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tiene límite a .

Solución: Dado $\varepsilon > 0$. Si tomamos $a_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\ell = a$; a la izquierda de la desigualdad $|a_n - \ell| < \varepsilon$ tenemos que $|a_n - \ell| = |a - a| = 0$ que es menor que cualquier ε positivo, para todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, por lo tanto, el límite es $\ell = a$.

el ambiente “solu” debería ir afuera del ambiente “ejer”

Ejercicio 3.12. Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ (usar ejercicio 4.c del párrafo 1.12)

¿Esta bien?

Solución: Sea $\varepsilon > 0$, buscamos un $\delta > 0$, tal que si $0 < |a_n - a| < \delta$, entonces $||a_n| - |a|| < \varepsilon$, puesto que $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ (desigualdad del triángulo, podemos escoger un $\delta = \varepsilon$, entonces si $0 < |a_n - a| < \varepsilon$, entonces $||a_n| - |a|| < \varepsilon$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$.

en este ejercicio hay que pensar cómo poner las soluciones

Ejercicio 3.13. Probar las siguientes afirmaciones:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ Solución: cuando $n \rightarrow \infty$, $\sqrt{n} \rightarrow \infty$, por lo tanto $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$
 (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$ Solución: Como $n \rightarrow \infty$, $\sqrt{n+1} \rightarrow \infty$, como un número dividido por otro que tiende a infinito, tiende a 0, entonces $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$

Otra De la desigualdad $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ se obtiene que $2\sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

pero

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow 2\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$$

de modo que basta tomar $n_0(\varepsilon) = \lceil \frac{1}{4\varepsilon^2} \rceil$

- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{3n^2 - 4n} = 0$
 (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2 - n^2} = 0$
 (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ Solución: $\frac{n}{n+1} = (\frac{n}{n}) / (\frac{n}{n} + \frac{1}{n}) \rightarrow \frac{1}{1+0} = 1$
 (vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n+2} = \frac{3}{4}$ Solución: $\frac{3n}{4n+2} = (\frac{3n}{n}) / (\frac{4n}{n} + \frac{2}{n}) \rightarrow \frac{3}{4+0} = \frac{3}{4}$
 (vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n^2-2n-3} = 0$ Solución: $\frac{2n+3}{n^2-2n-3} = (\frac{2n}{n^2} + \frac{3}{n^2}) / (\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} - \frac{3}{n^2}) \rightarrow \frac{0+0}{1-0-0} = 0$
 (viii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+1}{4n^2-3n+4} = 0$ Solución: $\frac{-3n+1}{4n^2-3n+4} = (\frac{-3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}) / (\frac{4n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} + \frac{4}{n^2}) \rightarrow \frac{0+0}{4-0-0} = 0$
 (ix) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n-2}{n^2+1} = 3$ Solución: $\frac{3n^2+2n-2}{n^2+1} = (\frac{3n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} - \frac{2}{n^2}) / (\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}) \rightarrow \frac{3+0+0}{1+0} = 3$
 (x) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n+1}{3n^2+2n-1} = \frac{2}{3}$ Solución: $\frac{2n^2-3n+1}{3n^2+2n-1} = (\frac{2n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}) / (\frac{3n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} - \frac{1}{n^2}) \rightarrow \frac{2-0+0}{3+0+0} = \frac{2}{3}$
 (xi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{3n^2-14n-7} = \frac{1}{3}$ Solución: $\frac{n^2+n}{3n^2-14n-7} = (\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}) / (\frac{3n^2}{n^2} - \frac{14n}{n^2} - \frac{7}{n^2}) \rightarrow \frac{1+0}{3-0-0} = \frac{1}{3}$
 (xii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{3/2}+1} = 0$ Solución: $\frac{n}{n^{3/2}+1} = (\frac{n}{n^{3/2}}) / (\frac{n^{3/2}}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}}) \rightarrow \frac{0}{1+0} = 0$
 (xiii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2/3}+1}{n^{3/4}+4} = 0$ Solución: $\frac{n^{2/3}+1}{n^{3/4}+4} = (\frac{n^{2/3}}{n^{3/4}} + \frac{1}{n^{3/4}}) / (\frac{n^{3/4}}{n^{3/4}} + \frac{4}{n^{3/4}}) = (\frac{1}{n^{1/12}} + \frac{1}{n^{3/4}}) / (1 + \frac{4}{n^{3/4}}) \rightarrow \frac{0+0}{1+0} = 0$
 (xiv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{4}{5}}+2n^{\frac{5}{2}}}{n^3+n^{\frac{2}{3}}+5n} = 0$ Solución: $\frac{3n^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{4}{5}}+2n^{\frac{5}{2}}}{n^3+n^{\frac{2}{3}}+5n} = (\frac{2n^2/3}{n^3} + \frac{n^{4/5}}{n^3} + \frac{2n^{5/2}}{n^3}) / (\frac{n^3}{n^3} + \frac{n^{2/3}}{n^3} + \frac{5n}{n^3}) = (\frac{2}{n^{7/3}} + \frac{1}{n^{11/5}} + \frac{1}{n^{1/2}}) / (1 + \frac{1}{n^{7/3}} + \frac{5}{n^2}) \rightarrow \frac{0+0+0}{1+0+0} = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{(xv)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{3/4} + n^{1/2}}{n^{3/4}} &= 2 \text{ Solución: } \frac{2n^{3/4} + n^{1/2}}{n^{3/4}} = \left(\frac{2n^{3/4}}{n^{3/4}} + \frac{n^{1/2}}{n^{3/4}} \right) / \left(\frac{n^{3/4}}{n^{3/4}} \right) = \\
 &= \frac{2 + \frac{1}{n^{1/4}}}{1} \rightarrow \frac{2+0}{1} = 2 \\
 \text{(xvi)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n^{7/2}}{n^{7/2} - 6n^3 + 3n^2 - 2n - 1} &= -3 \text{ Solución: } \frac{n^2 - 3n^{7/2}}{n^{7/2} - 6n^3 + 3n^2 - 2n - 1} = \left(\frac{n^2}{n^{7/2}} - \right. \\
 &\left. \frac{3n^{7/2}}{n^{7/2}} \right) / \left(\frac{n^{7/2}}{n^{7/2}} - \frac{6n^3}{n^{7/2}} + \frac{3n^2}{n^{7/2}} - \frac{2n}{n^{7/2}} - \frac{1}{n^{7/2}} \right) = \left(\frac{1}{n^{3/2}} - 3 \right) / \left(1 - \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n^{3/2}} - \right. \\
 &\left. \frac{3}{n^{5/2}} - \frac{1}{n^{7/2}} \right) \rightarrow \frac{0-3}{1-0+0-0-0} = -3
 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.14. Probar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

Ejercicio 3.15. En el ejercicio 3.13, partes 1, 3 y 6, elegir un n_0 correspondiente a:

$$\varepsilon = \frac{1}{10}, \quad \varepsilon = \frac{1}{100}, \quad \varepsilon = \frac{2}{1037}$$

respectivamente

Ejercicio 3.16. (i) Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión convergente con límite ℓ . Probar que si: $(b_n)_{n \geq 1}$ está definida por $b_n = a_{n+1}$ (o sea, " b_1, b_2, \dots " es " a_2, a_3, \dots ") entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$$

Solución: Por la hipótesis se tiene que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$ tal que $\forall n > n_0$ vale $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Consideremos ahora la sucesión $(b_n)_{n \geq 1}$ y sea $\varepsilon > 0$ dado. Como $n > n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$ se tiene entonces que $\forall n > n_0: |b_n - \ell| = |a_{n+1} - \ell| < \varepsilon$ y, en consecuencia, ℓ es el límite de la sucesión $(b_n)_{n \geq 1}$.

(ii) Más generalmente, si $p \in (\mathbb{N})$, $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente con límite ℓ y $(b_n)_{n \geq 1}$ está definida por:

$$b_n = a_{n+p}$$

entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$$

(iii) Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente con límite ℓ y definimos $(b_n)_{n \geq 1}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} b_1 = \text{cualquier cosa} \\ b_2 = \text{cualquier cosa} \\ \vdots \\ b_p = \text{cualquier cosa} \\ b_k = a_k \text{ para } k > p \end{cases}$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$$

(o sea, cambiar de cualquier forma los primeros p términos de una sucesión convergente, no cambia su convergencia ni el valor de su límite) (Sugerencia: al elegir n_0 , tener la precaución de que sea mayor que p).

Ejercicio 3.17. Probar que la sucesión dada por $a_n = (-1)^n$ no es convergente. (Sugerencia: probar primero que no converge a ningún número c distinto de 1 o de -1 y después probar que no converge ni a 1 ni a -1).

3.2. Algunas propiedades del límite. Vamos a estudiar ahora algunas propiedades relacionadas con la noción de límite, propiedades que nos resultarán de utilidad en el cálculo de límites. La primera de ellas es un tanto obvia: nos dice que una sucesión convergente no puede tener dos límites distintos.

Proposición 3.18. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell_1$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell_2$$

para ciertos números reales ℓ_1 y ℓ_2 . Entonces:

$$\ell_1 = \ell_2$$

Demostración. La demostración resultará como consecuencia del ejercicio 2b del párrafo 1.9, que a su vez es una consecuencia de la Arquimedianidad (Proposición 1.26) (¿Porqué?).

Sea ε un número cualquiera mayor que cero. Por definición de límite y por la hipótesis de esta Proposición existe $n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n'_0$, entonces $|a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Análogamente, existen $n''_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n''_0$, entonces $|a_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea n un número natural cualquiera mayor que n'_0 y que n''_0 . Entonces:

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| \leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| = |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ (ya que } n \geq n'_0 \text{ y } n \geq n''_0) \end{aligned}$$

En consecuencia, resulta que el número $|\ell_1 - \ell_2|$, que es ≥ 0 , es menor que cualquier número positivo ε . Luego, por el mencionado ejercicio, debe ser $|\ell_1 - \ell_2| = 0$, de donde $\ell_1 - \ell_2 = 0$, o sea $\ell_1 = \ell_2$. \square

Hay otra demostración de esta Proposición que es más ilustrativa: supongamos que no es cierta la igualdad $\ell_1 = \ell_2$. Entonces uno de los dos es menor que el otro, digamos $\ell_1 < \ell_2$. Llamemos:

$$\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$$

Por definición de límite, existe $n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n'_0$, es $|a_n - \ell_1| < \varepsilon$.

Análogamente, existe $n''_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n''_0$, es $|a_n - \ell_2| < \varepsilon$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n'_0$ y $n \geq n''_0$. Entonces es $|a_n - \ell_1| < \varepsilon$, o sea

$$-\varepsilon < a_n - \ell_1 < \varepsilon$$

de donde

$$\ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon$$

Como $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$ resulta

$$\ell_1 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} < a_n < \ell_1 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$$

o sea:

$$\frac{\ell_1 - \ell_2}{2} < a_n < \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \quad (3)$$

Por otra parte, al ser $|a_n - \ell_2| < \varepsilon$ es

$$-\varepsilon < a_n - \ell_2 < \varepsilon$$

o sea:

$$\ell_2 - \varepsilon < a_n < \ell_2 + \varepsilon$$

error en ambiente
“prop”

PL, OK
MBFM,42-45

todas las l van a ℓ

FIGURA 2. Entornos de ℓ_1 y ℓ_2

y, recordando que $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$

$$\ell_2 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} < a_n < \ell_2 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$$

de donde:

$$\frac{\ell_2 + \ell_1}{2} < a_n < \frac{3\ell_2 - \ell_1}{2} \quad (4)$$

Ahora bien, 3 y 4 son incompatibles: por 3 sabemos que, en particular $a_n < \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$, y por 4 que $\frac{\ell_1 + \ell_2}{2} < a_n$. Estas desigualdades no pueden ser ambas ciertas, con lo que llegamos a una contradicción. Nuestro punto de partida fue negar la igualdad $\ell_1 = \ell_2$, luego debe ser $\ell_1 = \ell_2$. referencias agregadas

Para la siguiente propiedad, necesitamos primero una definición: una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ se dice acotada si existen números reales M_1 y M_2 tales que $M_1 \leq a_n \leq M_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver figura 3).

Por ejemplo, la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{n}$ es acotada, ya que $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En cambio, la sucesión dada por $a_n = n$ no es acotada, ya que cualquiera sea $M_2 \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_2 < n$ (Arquimedianidad).

Proposición 3.19. *Toda sucesión convergente es acotada.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión convergente y sea ℓ su límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$$

Esto significa, de acuerdo a la Definición 3.2, que cualquiera sea $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, es $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Esta desigualdad es equivalente a: $-\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon$, o sea:

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

Como, por definición de límite, esto vale para cualquier $\varepsilon > 0$, entonces en particular debe valer, por ejemplo, para $\varepsilon = 1$. Es decir, debe existir un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$:

$$\ell - 1 < a_n < \ell + 1$$

FIGURA 3. Intervalo $[M_1, M_2]$ FIGURA 4. Intervalo $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$

Esto podría hacer pensar que ya tenemos el M_1 y el M_2 buscados ($\ell - 1$ y $\ell + 1$ respectivamente), pero hay que recordar que esa desigualdad vale solamente para $n \geq n_0$. De todas maneras, aquellos a_n para los cuales puede no valer son, en número, finitos $(a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1})$, con lo cual la situación se remedia fácilmente.

Sean:

$$H_1 = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\} \text{ (luego } H_1 \leq a_1, H_1 \leq a_2, \dots, H_1 \leq a_{n_0-1})$$

$$H_2 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\} \text{ (luego } a_1 \leq H_2, a_2 \leq H_2, \dots, a_{n_0-1} \leq H_2)$$

y sean:

$$M_1 = \min(\ell - 1, H_1) \text{ (luego } M_1 \leq \ell - 1, M_1 \leq H_1)$$

$$M_2 = \max(\ell + 1, H_2) \text{ (luego } \ell + 1 \leq M_2, H_2 \leq M_2)$$

Entonces resulta $M_1 \leq a_n \leq M_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si $n \in \mathbb{N}$, o bien es $n < n_0$ o bien es $n \geq n_0$. En el primer caso será $a_n \leq H_2 \leq M_2$, y en el segundo caso, $a_n < \ell + 1 \leq M_2$; análogamente resulta $M_1 \leq a_n$. \square

aquí fue necesario
formatear bastante,
es un caso en que van
los doble backslash,
notar los cambios

Como corolario inmediato, la sucesión dada por $a_n = n$ (o sea, $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$) no es convergente ya que como vimos antes, no es acotada.

La recíproca de esta Proposición (que sería: toda sucesión acotada es convergente) no es cierta.

Por ejemplo, la sucesión dada por $a_n = (-1)^n$ (o sea, $-1, 1, -1, 1, \dots$) es claramente acotada pero no es convergente.

La siguiente propiedad es muy sencilla de probar y resultará muy útil más adelante

Proposición 3.20. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión convergente con límite ℓ

- (i) Si $\ell > b$ para un cierto $b \in \mathbb{R}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, es $a_n > b$.
- (ii) Si $\ell < b$ para un cierto $b \in \mathbb{R}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$ es $a_n < b$

Demostración. (i) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, dado $\varepsilon > 0$ se puede encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, en particular vale para $\varepsilon = \ell - b$

FIGURA 5. Intervalo $[b, 2\ell - b]$

Luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, $|a_n - \ell| < \ell - b$, o sea

$$-(\ell - b) < a_n - \ell < \ell - b$$

de donde:

$$\ell - (\ell - b) < a_n < \ell + (\ell - b)$$

y por lo tanto:

$$b < a_n < 2\ell - b \quad \text{para } n \geq n_0$$

(ver la figura 5)

En particular, $b < a_n$ para $n \geq n_0$

- (ii) Igual que 1, tomando $\varepsilon = b - \ell$

he extirpado toneladas de ‘:’ y espacio en blanco

notar el cambio aquí

□

La recíproca de esta Proposición (si $a_n > b$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\ell > b$, etc.) no es cierta. Por ejemplo, la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{n}$ verifica $a_n > 0$ para todo n , y sin embargo su límite no es mayor que 0 (es igual a 0). De todas formas es casi cierta.

Corolario 3.21. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión convergente con límite ℓ .

- (i) Si $a_n > b$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\ell \geq b$
- (ii) Si $a_n < b$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\ell \leq b$

Demostración. (i) Si no fuese $\ell \geq b$, sería $\ell < b$. Luego, por 3.20, existiría un n'_0 tal que, para $n \geq n'_0$, $a_n < b$. Si $n''_0 = \max(n_0, n'_0)$, entonces para $n \geq n''_0$ resulta simultáneamente $a_n > b$ y $a_n < b$, absurdo.

- (ii) De la misma forma.

□

La siguiente propiedad es bastante obvia: si una sucesión está metida entre dos sucesiones que tienen el mismo límite, entonces dicha sucesión también tiene ese límite. Con más precisión:

Proposición 3.22. Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones convergentes con el mismo límite ℓ y sea $(c_n)_{n \geq 1}$ una sucesión tal que:

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Entonces $(c_n)_{n \geq 1}$ es convergente y su límite también es ℓ .

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera; existe $n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n'_0$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$, y existe $n''_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n''_0$, $|b_n - \ell| < \varepsilon$. Entonces, para $n \geq n_0 = \max(n'_0, n''_0)$ valen las dos desigualdades.

Sea entonces $n \geq n_0$. Será

$$\ell - c_n \leq \ell - a_n \leq |\ell - a_n| = |a_n - \ell| < \varepsilon$$

$$c_n - \ell \leq b_n - \ell \leq |b_n - \ell| < \varepsilon$$

En definitiva es $c_n - \ell < \varepsilon$ y $\ell - c_n < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. La desigualdad $\ell - c_n < \varepsilon$ es equivalente a $-\varepsilon < c_n - \ell$. Luego, para $n \geq n_0$

$$-\varepsilon < c_n - \ell < \varepsilon$$

o sea

$$|c_n - \ell| < \varepsilon$$

□

Antes de enunciar y demostrar otras propiedades, consideraremos la siguiente situación: supongamos tener dos sucesiones $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos sumar los términos correspondientes, a_n y b_n , y obtener así $a_n + b_n$; esto nos da una nueva sucesión que será $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$. Análogamente podemos multiplicarlos y obtener otra sucesión $(a_n b_n)_{n \geq 1}$, y si $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos construir la sucesión $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1}$.

Si las sucesiones $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ son convergentes con límites ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente, queremos averiguar que sucederá con las tres sucesiones recién definidas: si serán convergentes y, en caso afirmativo, a qué límite. Las respuestas, que ahora pasamos a dar, resultan bastante naturales.

Proposición 3.23. Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ sucesiones convergentes. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Demostración. Sean $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario; como es

$$|a_n + b_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |a_n - \ell_1 + b_n - \ell_2| \leq |a_n - \ell_1| + |b_n - \ell_2| \quad (5)$$

entonces para que resulte $|a_n + b_n - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$ bastaría con que fuese $|a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. ¿Podemos conseguir eso? Desde luego; la definición de límite nos dice que podemos hacer $|a_n - \ell_1|$ menor que cualquier número positivo con tal de tomar n grande. Y $\frac{\varepsilon}{2}$ es un número positivo. Lo propio vale para $|b_n - \ell_2|$; un poco de precisión y terminamos la demostración:

Por ser $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell_1$, existe $n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n'_0$, es $|a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por ser $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell_2$, existe $n''_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n''_0$, es $|b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea entonces $n_0 = \max(n'_0, n''_0)$. Si $n \geq n_0$, será $n \geq n'_0$ y $n \geq n''_0$; luego será $|a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, por la desigualdad 5, será $|a_n + b_n - (\ell_1 + \ell_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, y la proposición queda probada. \square

aquí hay una errata en el libro
aquí hay otra errata en el libro

agregada la referencia

Para pasar al producto, hacemos primero una observación: si $(b_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión para la cual existe un número M tal que $|b_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $(b_n)_{n \geq 1}$ es acotada; en efecto, es $-M \leq b_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Recíprocamente, si la sucesión es acotada, entonces existe el tal número M con esa propiedad. Pues al ser acotada, existen números M_1 y M_2 con la propiedad de que $M_1 \leq b_n \leq M_2$. Sea $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$; entonces

$$-M \leq -|M_1| \leq M_1 \leq b_n \leq M_2 \leq |M_2| \leq M$$

(justificar cada desigualdad) o sea $-M \leq b_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, el ser $(b_n)_{n \geq 1}$ acotada es equivalente a la existencia de un $M \in \mathbb{R}$ tal que $|b_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

justificar cada desigualdad

Proposición 3.24. Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ sucesiones convergentes.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

Demostración. Sean $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ \square

⋮

3.3. Límites infinitos.

Definición 3.25. Se dice que una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ tiende a $+\infty$, y se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad (6)$$

si, cualquiera que sea el número real $M > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$ es

$$a_n > M \quad (7)$$

⋮

Proposición 3.26. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión acotada y sea $(b_n)_{n \geq 1}$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Entonces

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$$

MBF, \mp , los ℓ ,
textsl, proof, y,
sobre todo los left y
right
falta Yanina, 46–49

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

DRR, 50–53

:

errores en la prop

Proposición 3.27. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión tal que existe n'_0 con la propiedad de que $|a_n| > r > 0$ para todo $n \geq n'_0$ (r fijo) y sea $(b_n)_{n \geq 1}$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$$

Demostración. Sea $M > 0$ arbitrario; como b_n tiende a infinito, existe n''_0 tal que, para $n \geq n''_0$, vale que $|b_n| > \frac{M}{r}$. Si $n_0 = \max(n'_0, n''_0)$, entonces para $n \geq n_0$ será:

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| > r \frac{M}{r} = M$$

lo que prueba la proposición. \square

Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente con límite a , entonces en particular es acotada y está en las condiciones de la proposición 3.26. Si $a \neq 0$, entonces $|a| > 0$ y, por la proposición 3.20, parte 1 y el ejercicio 3.12 del párrafo 3.1, $(a_n)_{n \geq 1}$ está en las condiciones de la Proposición 3.27. Luego valen las tres conclusiones establecidas en esas dos proposiciones, lo cual se suele indicar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a + \infty = \infty \\ a/\infty = 0 \\ a\infty = \infty \quad (\text{si } a \neq 0) \end{cases}$$

Estas tres desigualdades son fáciles de recordar (porque son naturales), pero hay que tener cuidado en recordar también lo que en realidad quieren decir: $a + \infty = \infty$ significa que si una sucesión tiene límite a y otra tiene límite ∞ , entonces la sucesión suma tiene límite infinito; análogamente para las otras dos. Teniendo en cuenta estas precauciones, su uso está permitido (y hasta recomendado)

Con las propiedades vistas hasta ahora, podemos comenzar a encarar el problema del cálculo de límites. Hasta ahora lo que sabemos es demostrar que determinado número es efectivamente el límite de una cierta sucesión, pero si sólo nos dan la sucesión, no sabemos como encontrar su límite (supuesto que exista).

Consideremos algunos de los ejemplos dados luego de la definición 3.2 de límite.

La sucesión dada por $a_n = \frac{1}{2n^2-3}$ tiene un límite que se calcula fácilmente; es:

$$a_n = \frac{1}{2n^2-3} = \frac{\frac{1}{n}}{2n - \frac{3}{n}}$$

(dividiendo numerador y denominador por n)

Pero $\frac{1}{n}$ tiene límite 0 3.26 parte ??; análogamente $\frac{-3}{n}$ tiene límite 0. Entonces $2n^2 - \frac{3}{n}$ tiene límite ∞ por??. Luego a_n tiene límite 0 por Proposición ?? (es el caso $\frac{0}{\infty} = 0$).

El ejemplo ?? ,la sucesión dada por $a_n = \frac{n^2+2n+1}{n^2-3n-2}$ también tiene un límite fácil de calcular. Dividiendo numerador y denominador por n^2 resulta:

$$a_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 - 3n - 2} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}$$

Por Proposición ??; $\frac{2}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{-3}{n}$ y $\frac{2}{n^2}$ tienen límite 0. Ahora aplicamos las Proposiciones ?? y ?? para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{\lim(1 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2})} = \frac{\lim 1 + \lim \frac{2}{n} + \lim \frac{1}{n^2}}{\lim 1 + \lim \frac{-3}{n} + \lim \frac{-2}{n^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1$$

Un error usual en que el alumno suele caer, al estudiar estos temas por primera vez, es creer que es distinto calcular un límite que demostrar que el número que resulte es efectivamente el límite de la sucesión dada. Nada de eso: en los dos ejemplos que hemos visto recién hemos demostrado que el límite de $\frac{1}{(2n^2-3)}$ es 0 y hemos demostrado que el límite de $\frac{(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{(1-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2})}$ es 1 (las demostraciones se apoyaron en las Proposiciones ??, ?? y 3.26).

Ejercicio 3.28. Demostrar que si $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión tal que $|a_n| > r > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (r fijo) y $(b_n)_{n \geq 1}$ es tal que $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pero $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = \infty$ (o sea, $\frac{a}{0} = \infty$ si $a \neq 0$ como regla mnemotécnica)

Ejercicio 3.29. Probar las siguientes afirmaciones:

- (i) $(a_n)_{n \geq 1}$ acotada, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$
- (ii) $(a_n)_{n \geq 1}$ acotada, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty$

Ejercicio 3.30. Mostrar, dando un contraejemplo en cada caso, que las afirmaciones son falsas:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$ Solución:
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \infty + \infty = \infty$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$ Solución:
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = a \cdot \infty = \infty$

hay que dar un contraejemplo
aquí también hay que dar un contraejemplo

- Ejercicio 3.31.**
- (i) Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ y $a_n \geq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
 - (ii) Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ y $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
 - (iii) Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$
 - (iv) Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty$

Ejercicio 3.32. Calcular los siguientes límites:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+6n-1}{2n^2-6n-7}$ Solución: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+6n-1}{2n^2-6n-7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{6}{n}-\frac{7}{n^2}} = \frac{3+0+0}{2+0+0} = \frac{3}{2}$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+6n-1}{14n^2-16n+8}$ Solución: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+6n-1}{14n^2-16n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}{14-\frac{16}{n}-\frac{8}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{14} = \infty$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+2n+1}{n^3+1}$ Solución: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+2n+1}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{n+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0$

Ejercicio 3.33. Sean f y g funciones polinómicas de grado h y k respectivamente (ver párrafo 2.3). Para cada natural n están definidos $f(n)$ y $g(n)$.

Probar:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ si $h < k$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ si $h > k$

¿Cuanto vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ si $h = k$?

3.4. Algunos límites importantes. En el Párrafo 3.2, dadas dos sucesiones $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$, habíamos estudiado el comportamiento de las sucesiones $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ y, si $b_n \neq 0$ para todo n , $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1}$. Otra sucesión que podemos considerar, si $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es $(a_n^{b_n})_{n \geq 1}$. Queremos llegar a probar que, si a_n tiene límite $a > 0$ y b_n tiene límite b , entonces $a_n^{b_n}$ tiene límite a^b . Vamos a tener que dar un largo rodeo para probar esto, cosa que empezaremos a hacer en este párrafo (y terminamos de hacer en 3.7).

Nuestro primer resultado sería obvio si ya estuviese probada la mencionada propiedad. Vamos a considerar la sucesión dada por $a_n = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Como $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, si esa propiedad fuese cierta, entonces el límite de $a^{\frac{1}{n}}$ debería ser $a^0 = 1$. Probamos ese resultado directamente:

Lema 3.34. Si a es un número real mayor que 0, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Demostración. Supongamos primero $a > 1$; recordemos la desigualdad de Bernoulli (Proposición 1.12) que dice que si $h > -1$, entonces para todo natural n vale:

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh$$

Consideremos el caso $h = a^{\frac{1}{n}} - 1$; como la raíz n -sima es siempre positiva, entonces este h es mayor que -1 , por lo cual resulta:

$$(1 + (a^{\frac{1}{n}} - 1))^n \geq 1 + n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

o sea:

$$a \geq 1 + n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

de donde podemos despejar

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a - 1}{n}$$

Como $a > 1$, entonces $a^{\frac{1}{n}} > 1$, luego $a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$. Entonces es

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a - 1}{n}$$

La sucesión a la derecha tiende claramente a 0 y la sucesión de la izquierda es constantemente 0, luego también tiende a 0. Entonces la sucesión con el mismo límite, debe también tener ese límite (por Proposición 3.22), es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{\frac{1}{n}} - 1) = 0$$

Como $a^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}} - 1) + 1$ y la sucesión constantemente igual a 1 tiene límite 1, entonces una aplicación de la Proposición ?? nos muestra que $\lim a^{\frac{1}{n}} = 0 + 1 = 1$.

aquí hay una errata
en el texto
referencia 3.7?

Supongamos ahora $a < 1$ (y siempre $a > 0$). Entonces $\frac{1}{a} > 1$, con lo cual $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \rightarrow 1$, o sea $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \rightarrow 1$. Aplicando la Proposición ?? concluimos que $\sqrt[n]{a} = -\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ debe tender a $\frac{1}{1} = 1$

Por último, si $a = 1$ el Lema es trivial. \square

Probamos ahora un resultado que no es tan natural como el anterior:

Proposición 3.35.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

esta prop estaba real

Demostración. Aplicamos nuevamente la desigualdad de Bernoulli (si $h > -1$, $(1+h)^n \geq 1+nh$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Tomando $h = n^{\frac{1}{2n}} - 1$ resulta:

$$(1 + (n^{\frac{1}{2n}} - 1))^n \geq 1 + (n^{\frac{1}{2n}} - 1)n$$

de donde:

$$\sqrt[n]{n} \geq 1 + n(n^{\frac{1}{2n}} - 1)$$

o sea

$$n^{\frac{1}{2n}} - 1 \leq \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{n} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}}{\sqrt[n]{n}}$$

Aquí aplicamos la proposición ?? (el miembro de la derecha tiende claramente a 0) para concluir que

faltan todas las referencias

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{2n}} - 1) = 0$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{2n}}) = 1$$

Ahora bien, $\sqrt[n]{n} = (\sqrt[2n]{n})^2 = (n^{\frac{1}{2n}})^2$, luego $\sqrt[n]{n}$ debe tender, por la Proposición ??, a $(1)(1) = 1$, lo cual prueba la Proposición \square

De acuerdo con esto y por 3.9, $\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n \cdot n} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n} = (\sqrt[n]{n})^2$ y más generalmente $\sqrt[n]{n^k} = (\sqrt[n]{n})^k$ tiene límite 1. Es posible probar más todavía (ver ejercicio 2 de este párrafo).

referencia 3.9???

Estudemos ahora la sucesión dada por $a_n = r^n$ donde r es un número real cualquiera.

referencia al ejercicio 2

En primer término consideremos el caso $r > 1$; en ese caso será $r = 1 + h$ con $h > 0$ y por lo tanto, por la desigualdad de Bernoulli:

$$r^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh$$

Es muy fácil ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nh) = +\infty$. Luego por el ejercicio 4.a del párrafo anterior $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty$.

referencia al ejercicio 4.a

En segundo término, consideremos el caso $r < -1$. Aquí será $|r| = -r > 1$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n = +\infty$, o sea $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = +\infty$, de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ (recordar definición ??).

DR OK con alguna reserva

ED,54-57

En tercer término, consideremos el caso $|r| < 1$ y $r \neq 0$. Entonces $|r^n| = \frac{1}{1/|r|^n}$ y como $1/|r| > 1$, el denominador tiende a $+\infty$. Luego $|r^n|$ tiende a 0, lo cual implica inmediatamente, a partir de la Definición 3.2 de límite, que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.

Los casos $r = 0$ y $r = 1$ son triviales (tienen límites 0 y 1 respectivamente) y el caso $r = -1$ corresponde a la sucesión $-1, 1, -1, 1, \dots$, que sabemos no es convergente. En resumen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ +\infty & \text{si } r > 1 \\ \infty & \text{si } r < -1 \\ \text{no existe} & \text{si } r = -1 \end{cases}$$

van como ejercicios separados

- Ejercicio 3.36.** (i) Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión acotada de términos positivos y tal que existe $r > 0$ para el que $a_n \geq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$
- (ii) Dar un ejemplo de una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ acotada de términos positivos para la cual no sea cierto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Ejercicio 3.37. Probar

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n} = 1$;
(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n} = 1$;
(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^3 + 2n^2 + 2n + 1} = 1$;
(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^3 - 4n^2 + 6n - 3} = 1$;
(v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(n)} = 1$; si f es polinomial y el coeficiente de mayor grado es positivo.

no lleva itemize y hay varias erratas

Ejercicio 3.38. Calcular

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 2}$;
(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n - 2}$;
(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(1/2)^n + 3}$;
(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n}$;
(v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad (0 < a < b)$;

Ejercicio 3.39. (i) Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de términos positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$ (Sugerencia: dado $\varepsilon > 0$ resultará $0 < a_n < a_{n_0} \varepsilon^{n-n_0}$ para un cierto n_0).

(ii) Sea $(a_n)_n \geq 1$ una sucesión de términos positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 0$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. (Sugerencia: será $(\ell - \frac{1}{2}\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0} < a_n < (\ell + \frac{1}{2}\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0}$ para un cierto n_0)

(iii) Aplicar los puntos 1 y 2 para calcular los siguientes límites:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$;
(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$;
(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$;
(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n}$;
(v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}, \quad (0 < a < b)$;

Ejercicio 3.40. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión convergente con límite a . Probar que:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = +\infty$ si $a > 1$
(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = -\infty$ si $a < -1$
(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = 0$ si $|a| < 1$

Ejercicio 3.41. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de términos positivos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Probar que $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene un máximo.

Ejercicio 3.42. Sea $a_n = 2 + (-1)^n$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, pero que $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ no tiene límite (luego la recíproca del problema 4.b. no es cierta).

referencia de problema 4.b

Ejercicio 3.43. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión tal que $a_n \neq 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ con $|\ell| < 1$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Deducir nuevamente que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ para $|r| < 1$.

3.5. Un criterio de convergencia.

Definición 3.44. Una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ se dice creciente si es $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se dice decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En cualquiera de los casos la sucesión se dice monótona.

Si una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ es creciente, entonces cada vez que sea $n > m$ será $a_n \geq a_m$. En efecto, si $n > m$, entonces $n = m + p$, con $p \in \mathbb{N}$. Luego $a_n = a_{m+p} \geq a_{m+p-1} \geq a_{m+p-2} \geq \dots \geq a_{m+1} \geq a_m$ (Para evitar los puntos suspensivos en este razonamiento, ver ejercicio 1 de este parágrafo).

Análogamente si $(a_n)_{n \geq 1}$ es decreciente, entonces cada vez que sea $n > m$ será $a_n \leq a_m$. En realidad sería más apropiado decir que la sucesión es creciente si $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pues entonces resultaría que, a medida que crece n crece a_n), pero la costumbre es reservar ese nombre para las que cumplen $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y llamar estrictamente crecientes a las que cumplen $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Análogamente, se las llama estrictamente decrecientes cuando cumplen $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desde luego que toda sucesión estrictamente creciente es automáticamente creciente ($a_{n+1} > a_n$ implica $a_{n+1} \geq a_n$) y toda sucesión estrictamente decreciente es automáticamente decreciente ($a_{n+1} < a_n$ implica $a_{n+1} \leq a_n$).

Lo bueno de las sucesiones monótonas es que siempre tienen límite. Más precisamente:

Proposición 3.45. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión monótona. Entonces:

- (i) Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es acotada, entonces $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente.
- (ii) Si $(a_n)_{n \geq 1}$ no es acotada, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. En caso de ser creciente, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ y en caso de ser decreciente, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Demostración.

- (i) Consideremos el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (8)$$

o sea, A es el conjunto de todos los valores que toma la sucesión. Como esta es acotada, existirá un número real M tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto significa que $-M \leq a_n \leq M$, o sea, en términos de A , el conjunto A es acotado superior e inferiormente.

Sabemos que la sucesión es monótona, lo cual significa que o bien es crecientemente o bien es decreciente. Veamos que en ambos casos tiene límite.

Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ creciente, sabemos que existe

$$a = \sup A \quad (9)$$

Por la Proposición 1.22, cualquiera sea $\varepsilon > 0$ existe un elemento de A , digamos a_{n_0} , tal que $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Pero entonces, para $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \quad (10)$$

o sea

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad (11)$$

esta defi estaba realmente terrible

la indicación es no enfatizar el texto

referencia al ejercicio correcto

no se deben incluir variables matemáticas en modo texto
agregar énfasis que no figura en el texto es en la dirección contraria de la especificación del presente trabajo

en donde, siempre para $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad (12)$$

lo cual prueba que: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Sea ahora $(a_n)_{n \geq 1}$ decreciente, sabemos que existe

$$a' = \inf A \quad (13)$$

Por ejercicio 4 del párrafo 1.8, cualquiera sea $\varepsilon > 0$ existe un elemento de A , digamos $a_{n'_0}$, tal que $a_{n'_0} < a' + \varepsilon$. Luego, para $n \geq n'_0$

$$a' - \varepsilon < a' \leq a_n \leq a_{n'_0} < a' + \varepsilon \quad (14)$$

o sea

$$a' - \varepsilon < a' + \varepsilon \quad (15)$$

de donde, siempre para $n \geq n'_0$

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad (16)$$

lo cual prueba, ya que ε era cualquiera, que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a'$

- (ii) Supongamos ahora que la sucesión es creciente y no acotada. Al ser creciente la sucesión, entonces necesariamente está acotada inferiormente (por ejemplo, por a_1 , ya que es $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$); luego, si la suponemos no acotada, querrá decir que no está acotada superiormente. En otras palabras, cualquiera sea el número $M > 0$, existirá un término de la sucesión, digamos a_{n_0} , tal que $a_{n_0} > M$. Pero entonces, para $n \geq n_0$

$$a_n \geq a_{n_0} > M \quad (17)$$

referencia

Recordando la definición 3.25 vemos que esto significa que: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Por último, si $(a_n)_{n \geq 1}$ es decreciente y no acotada, entonces $(-a_n)_{n \geq 1}$ es creciente (al ser $a_{n+1} \leq a_n$ es $-a_{n+1} \geq -a_n$) y no acotada. Luego, por lo que acabamos de ver, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = +\infty$ o sea, por Definición ?? $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. □

Veamos un ejemplo de aplicación de esta Proposición. Consideremos la sucesión $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$, o sea, la sucesión definida inductivamente por:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$$

Afirmamos que esta sucesión es acotada. En efecto, es claramente $0 \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además es $a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ como lo prueba el siguiente argumento, por inducción: es $a_1 \leq 2$, pues si fuese $a_1 > 2$ sería $\sqrt{2} > 2$ o sea elevado al cuadrado, $2 > 4$, absurdo; y supuesto $a_n \leq 2$, resulta $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$.

También es creciente; en efecto, si fuese $a_{n+1} < a_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces sería $\sqrt{2 + a_n} < a_n$ o sea $2 + a_n < a_n^2$, de donde $a_n^2 - a_n - 2 > 0$; de aquí obtenemos, por completación de cuadrados, $(a_n - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 > 0$, o sea $(a_n - \frac{1}{2})^2 > \frac{9}{4}$.

Luego $|a_n - \frac{1}{2}| > \frac{3}{2}$, lo cual implica $a_n - \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$ ó $a_n - \frac{1}{2} < -\frac{3}{2}$. La primera desigualdad lleva a $a_n > \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$, que sabemos que no puede ser, y la segunda a $a_n < \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$, que tampoco puede ser (era $0 \leq a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

La proposición 3.45 nos dice que existe $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, pero en este caso podemos saber algo más que su mera existencia: podemos saber cuánto vale. En efecto, si en la igualdad

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (18)$$

tomamos límite cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} \quad (19)$$

Al ser $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, es $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \ell$ (ejercicio 6.a. del párrafo 3.1), y es $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \ell}$ (ejercicio 5 del párrafo 3.2 y Proposición ??). En definitiva: referenciar este ejercicio
referenciar

$$\ell = \sqrt{2 + \ell} \quad (20)$$

de donde

$$\ell^2 = 2 + \ell \quad (21)$$

o sea

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0 \quad (22)$$

De aquí se deduce (usando ejercicio 2.6 del párrafo 2.3) que $\ell = 2$ ó $\ell = -1$. El segundo caso no puede ser, ya que al ser $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, debe ser $\ell \geq 0$. Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

Ejercicio 3.46. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión creciente. Probar que si $n > m$, entonces $a_n > a_m$ (Sugerencia: considerar $P_n = "a_k + n > a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}"$ y usar inducción).

ED, muy flojo
VP, 58-61

Ejercicio 3.47. Probar que la única sucesión creciente y decreciente a la vez es la sucesión constante.

Ejercicio 3.48. Para las siguientes sucesiones, decir cuáles son crecientes, cuáles estrictamente crecientes, cuáles decrecientes, y cuáles acotadas:

- (i) $a_n = \frac{n}{n+1}$;
- (ii) $a_n = \frac{n!}{n^n}$;
- (iii) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$;
- (iv) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

Ejercicio 3.49. Probar que las siguientes sucesiones son convergentes, y calcular su límite:

- (i) $a_1 = \sqrt{3}; a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$;
- (ii) $a_1 = \sqrt{5}; a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$;

3.6. El número e. Vamos a aplicar el resultado del párrafo anterior al estudio de la convergencia de una sucesión particular. Consideramos la sucesión cuyo término general es:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Afirmamos que esta sucesión es acotada y estrictamente creciente.

Observamos primero, que, por la fórmula del binomio (Teorema 1.13), es:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n!}{n^k(n-k)!} \end{aligned}$$

Ahora bien, por definición de factorial, $n! = n(n-1)\dots 3.2.1$ y $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)\dots 3.2.1$. Luego debe ser:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))(n-k)(n-k-1)\dots 2.1.}{(n-k)(n-k-1)\dots 2.1.} \\ &= n(n-1)\dots(n-(k-1)) \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^k(n-k)!} &= \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n \cdot n \dots n} \\ &= \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-(k-1)}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

En definitiva:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \quad (23)$$

PRE, 59-61

Con esto es fácil ver que la sucesión es estrictamente creciente.

En efecto:

$$\begin{aligned} a_n + 1 &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n+1-1}{n+1}\right) \\ &> \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = a_n \end{aligned}$$

También con ayuda de 23 probamos ahora que la sucesión es acotada.

Es claro que es acotada inferiormente por 2, ya que $a_1 = 2$ y $a_1 \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (esto último por ser estrictamente creciente). Para ver que es acotada superiormente, notemos que todos los factores entre paréntesis en 23 son menores que 1 (y mayores que cero). Luego:

$$a_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

referencias
agregadas

Pero $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k = 2 \cdot 3 \dots k > 2 \cdot 2 \dots 2 = 2^k - 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego:

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k - 1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \quad (\text{ejercicio 5.b, de parágrafo 1.4}) \\ &= 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 1 + 2 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

ya sabemos entonces que la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es acotada y estrictamente creciente. La proposición 3.45 nos dice que entonces esa sucesión tiene límite. Dicho límite se suele indicar con la letra e

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

y todo lo que podemos hasta ahora saber de él es que $2 < e < 3$.

Este número es de gran importancia y va a aparecer repetidamente a lo largo de este libro.

Nota 3.50. En la demostración de la convergencia de la sucesión dada por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ hemos hecho uso de los puntos suspensivos. Mientras uno use puntos suspensivos como notación (por ejemplo, indicar $\sum_{k=1}^n a_k$ como $a_1 + a_2 + \dots + a_n$), nada hay que objetar. Pero cuando se usan en un razonamiento y dejan de ser una notación, entonces el razonamiento es, desde un punto de vista muy formal, objetable. ¿Por qué los hemos usado entonces? (por ejemplo, para ver que $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-(k-1))$ ó que $k! > 2^k - 1$). Hay dos motivos importantes: el primero es que las veces que los hemos usado, y las que los vamos a usar, el razonamiento puede reemplazarse por un razonamiento inductivo (por ejemplo, que $k \geq 2^k - 1$ para $k \in \mathbb{N}$ se prueba así: para $k = 1$ vale la igualdad, y si suponemos que $k! \geq 2^k - 1$, entonces $(k+1)! = (k+1) \cdot k! \geq 2 \cdot k! \geq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k = 2^{(k-1)-1}$). Y el segundo es que el principio de inducción es una herramienta potente para probar resultados... si sabemos previamente cuál es ese resultado. Es decir, con inducción nomás no vamos a poder conjeturar un cierto resultado, sólo podremos probar que es cierto una vez conjeturado. En cambio el uso de puntos suspensivos puede permitir esas conjeturas. Hay un ejemplo elemental relacionado con una conocida anécdota: cuando C.F. Gauss (1777–1855), el más famoso de los matemáticos de todas las épocas (se lo ha llamado el príncipe de las matemáticas; no importa que usted no lo conozca, los matemáticos suelen no ser famosos), cuando Gauss, decíamos, tenía 8 años, su maestro, cansado de atender su clase, les dijo a los alumnos que sumasen todos los números del 1 al 100, confiando en tenerlos en silencio una buena hora. A los pocos minutos, el niño Gauss le entrega un papel con el resultado: 5050. Su razonamiento había sido muy sencillo: para calcular $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$ observemos que $1 + 100$ da 101, que $2 + 99$ también da 101, $3 + 98$ también da 101, etc. Luego estamos sumando 101 cincuenta veces, con lo cual el resultado deberá ser $(50)(101) = 5050$. Exactamente el mismo razonamiento muestra que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Pero si estamos armados solamente con el principio de inducción, esperaremos eternamente para sumar $1 + 2 + \dots + n$ si nadie conjetura (a la manera de Gauss) el resultado. Conclusión: hay que aprender a razonar con los puntos suspensivos; si quiere, el resultado que así obtenga podrá

debe interpretarse el
texto: errata

referencia

probarlo formalmente por inducción (Ver ejercicio 1 de este párrafo). De ahora en adelante, entonces, usaremos varias veces este tipo de razonamientos, y el lector (alumno o docente) muy escrupuloso podrá convertir ese razonamiento un tanto ambiguo, en uno inductivo, y por lo tanto, más preciso.

Una vez sabido que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$, se puede probar un resultado más general: si $(a_n)n \geq 1$ es una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$$

Para probar esto necesitamos usar un nuevo concepto. Para cada a_n , llamaremos parte entera de a_n , e indicaremos $[a_n]$, al mayor número entero m que verifique la desigualdad $m \leq a_n$; así $[\frac{2}{5}] = 0$, $[\frac{9}{2}] = 4$, $[-\frac{9}{2}] = -5$, etc. (también se la llama característica de a_n). Observamos que la existencia de la parte entera de cualquier número es una consecuencia de la Propiedad de Completitud (párrafo 1.8) y que resulta

$$[a_n] \leq a_n < [a_n] + 1$$

De esta última doble desigualdad se deduce inmediatamente que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n] = +\infty$, que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n] = -\infty$.

Supongamos primero $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. A partir de un cierto n_1 , será $a_n > 0$; luego $1 + \frac{1}{a_n} > 1$ y entonces, siendo $[a_n] \leq a_n < [a_n] + 1$, será por Proposición 1.35:

$$(1 + \frac{1}{[a_n] + 1})^{[a_n]} < (1 + \frac{1}{a_n})^{[a_n]} \leq (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} \leq (1 + \frac{1}{[a_n]})^{a_n} < (1 + \frac{1}{[a_n]})^{[a_n] + 1}$$

o sea:

$$(1 + \frac{1}{[a_n] + 1})^{a_n} < (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} < (1 + \frac{1}{[a_n]})^{[a_n] + 1} \quad (24)$$

Estudiaremos los límites de las sucesiones que están en los extremos de esta doble desigualdad.

En primer término, observemos que es:

$$(1 + \frac{1}{[a_n] + 1})^{[a_n]} = (1 + \frac{1}{[a_n] + 1})^{[a_n] + 1} (1 + \frac{1}{[a_n] + 1})^{-1}$$

errata

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$, dado $\varepsilon > 0$ existe n_2 tal que, si $n \geq n_2$

$$e - \varepsilon < (1 + \frac{1}{n})^n < e + \varepsilon \quad (25)$$

y como $\lim([a_n] + 1) = +\infty$, existe n_3 tal que, si $n \geq n_3$, entonces $[a_n] + 1 > n_2$. Siendo $[a_n] + 1$ un número natural mayor que n_2 , será por 25

$$e - \varepsilon < (1 + \frac{1}{[a_n] + 1})^{[a_n] + 1} < e + \varepsilon \quad (\text{si } n \geq n_3)$$

El $\varepsilon > 0$ era cualquiera, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{[a_n] + 1})^{[a_n] + 1} = e$.

Por otra parte, al tender $[a_n] + 1$ a $+\infty$, $(1 + \frac{1}{[a_n] + 1})^{-1}$ tiende a $1^{-1} = 1$. En definitiva, el primer miembro de 24, es $(1 + \frac{1}{[a_n]})^{[a_n] + 1} = (1 + \frac{1}{[a_n]})^{[a_n]} (1 + \frac{1}{[a_n]})$ y un razonamiento calcado del anterior prueba que su límite es $e \cdot 1 = e$. En definitiva,

el primer y tercer miembro de 24 tienden al número e , luego lo mismo le debe ocurrir a lo que está en el medio (Proposición 3.22)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Consideremos ahora el caso $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Eso significa $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = +\infty$ y entonces, llamando $b_n = -a_n$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} &= \left(1 - \frac{1}{b_n}\right)^{-b_n} = \left(\frac{b_n - 1}{b_n}\right)^{-b_n} = \left(\frac{b_n}{b_n - 1}\right)^{b_n} = \left(\frac{b - n - 1 + 1}{b_n - 1}\right)^{b_n} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right)^{b_n} = \left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right)^{b_n - 1} \left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right) \end{aligned}$$

y como $b_n - 1 \rightarrow +\infty$, entonces $\left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right)^{b_n - 1}$ tiende a e . Ahora el caso más general, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, resulta fácil combinando los dos precedentes: pues es $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} (-|a_n|) = -\infty$ y entonces, por lo que ya probamos, dado $\varepsilon > 0$ existen n_1 y n_2 tales que

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|} - e \right| &< \varepsilon \quad \text{para } n \geq n_1 \\ \left| \left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} - e \right| &< \varepsilon \quad \text{para } n \geq n_2 \end{aligned}$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ entonces para $n \geq n_0$ será $n \geq n_1$ y $n \geq n_2$, de donde

$$\left| \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} - e \right| < \varepsilon \quad \text{para } n \geq n_0$$

ya que a_n es $|a_n|$ ó $-|a_n|$ y en ambos casos vale la desigualdad.

Como $\varepsilon > 0$ era cualquiera, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

En muchos casos de límites del tipo 1^∞ (o sea, $a_n^{b_n}$ con $a_n \rightarrow 1$, $b_n \rightarrow \infty$), aparece el número e . Por ejemplo, consideremos la sucesión dada por:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n+2}$$

Entonces resulta:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)^{3n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{3n+2} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{3(n+2-2)+2} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{3(n+2)-4} = \\ &= \left[\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\right]^{-3} \left[1 - \frac{1}{n+2}\right]^{-4} \end{aligned}$$

y aplicando los resultados anteriores:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-3} 1^{-4} = e^{-3}$$

no se usan los big et al.

Ejercicio 3.51. (i) Probar que $\frac{n!}{n^k(n-k)!} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. (Inducción)

(ii) Probar que $\frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$. (Inducción)

- (iii) Usar 2 para probar que $\frac{n!}{n^k(n-k)} = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \frac{i}{n})$ (sin Inducción; probar previamente, por Inducción, que $\prod_{i=1}^m a_i / \prod_{i=1}^m b_i = \prod_{i=1}^m (\frac{a_i}{b_i})$).

Ejercicio 3.52. Hallar los límites de las sucesiones dadas por:

- (i) $a_n = (1 - \frac{1}{n})^n$
- (ii) $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$
- (iii) $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{3n-2}$
- (iv) $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
- (v) $a_n = \frac{n}{e^n}$
- (vi) $a_n = (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$
- (vii) $a_n = (1 + \frac{1}{2n})^{4n+1}$
- (viii) $a_n = \left(1 + \frac{3n+4}{3n+2}\right)^{2n-1}$
- (ix) $a_n = (1 + \frac{a}{n})^{bn}$

3.7. La función logaritmo. Consideremos la sucesión $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = e^x$$

Observemos que, como toda potencia de exponente real, e^x es mayor que cero cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto podemos indicar esta función como: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$

Proposición 3.53. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ dada por $f(x) = e^x$ es biyectiva.

Demostración. Veamos primero que es inyectiva. Como $e > 1$, entonces si $x \neq x'$ digamos $x < x'$, entonces la proposición 1.35 nos dice que $e^x < e^{x'}$, luego $f(x) < f(x')$, lo cual prueba la inyectividad. Para ver que es suryectiva, tomemos un y cualquiera en $\mathbb{R}_{>0}$, es decir $y > 0$. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : e^x \leq y\}$$

Este conjunto está acotado superiormente. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \leq n$. Si $x > n$, entonces $e^x > e^n > 2^n = (1+1)^n \geq 1+n1 = n+1 > y$, luego $e^x > y$, es decir $x \notin A$. Esto prueba que el n elegido es cota superior de A .

Este conjunto es también no vacío. Para probarlo, notemos que siendo $e > 1$ es $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty$. Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$, lo cual implica que dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, si $n \geq n_0$, $|e^{-n}| < \varepsilon$. Tomemos $\varepsilon = y$, y sea n_0 el correspondiente a este valor de ε . Entonces, en particular, $e^{-n_0} < y$, lo cual significa que $-n_0 \in A$ y entonces $A \neq \emptyset$. Siendo A acotado superiormente y no vacío, existe

$$s = \sup A$$

Probamos ahora que $e^s = y$, lo cual prueba la suryectividad de f ya que $y > 0$ era cualquiera. Supongamos $e^s \neq y$; caben entonces dos alternativas: $e^s < y$ ó $e^s > y$. Descartémoslas: Si fuese $e^s < y$ llamando $\varepsilon = y - e^s$ resulta $\varepsilon > 0$. Por lema 1.33, existen números racionales r y r' tales que $r < s < r'$ y además $e^{r'} - e^r < \varepsilon$. En particular:

$$e^{r'} - e^s < e^{r'} - e^r < \varepsilon = y - e^s$$

o sea:

$$e^{r'} - e^s < y - e^s$$

de donde deducimos $e^r < y$. Pero esto implica que $r' \in A$; esto no puede ser ya que s es el supremo de A , y en particular, es cota superior de A (con lo cual, al ser $r' \in A$, debería ser $r' \leq s$, lo que no es así).

Si fuese $e^s > y$, sea $\varepsilon = e^s - y > 0$. Usando nuevamente el lema 1.33, obtenemos r, r' racionales tales que $r < x < r'$ y $e^{r'} - e^r < \varepsilon$. Entonces:

$$e^s - e^r < e^{r'} - e^r < \varepsilon = e^s - y$$

o sea:

$$e^s - e^r < e^s - y$$

de donde deducimos $-e^r < -y$, o sea $e^r > y$. Luego $e^r > e^x$ para todo $x \in A$; eso implica que $r > x$ para todo $x \in A$ (si fuese $r \leq x$ sería $e^r \leq e^x$ por 1.35), o sea r es cota superior de A . Eso no puede ser porque al ser s el supremo de A , entonces s es la menor cota superior (y entonces sería $s \leq r$, lo que no es así). Luego debe ser $e^s = y$, con lo cual f es biyectiva. \square

Al ser f biyectiva, tiene una inversa f^{-1} . Esta inversa tiene la importancia suficiente como para merecer un nombre:

Definición 3.54. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ es la función dada por $f(x) = e^x$, entonces su inversa se denomina función logaritmo y se indica como $\log: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$. Esto define, para cada $x > 0$, un número real $\log x$ caracterizado por la propiedad:

$$\log x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

Dicho número, $\log x = \log_e x$, se llama logaritmo natural de x .

Las proposiciones 1.42 y 1.43 tienen como consecuencias inmediatas dos propiedades de los logaritmos naturales:

Proposición 3.55. (i) Si x, y son números reales mayores que cero, entonces

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

(ii) Si x es un número real mayor que cero y si $y \in \mathbb{R}$ es cualquiera:

$$\log x^y = y \log x$$

Demostración. (i) Es $e^{\log x + \log y} = e^{\log x} e^{\log y} = xy$; luego, por definición de logaritmos, $\log(xy) = \log x + \log y$.

(ii) Es $e^{y \log x} = (e^{\log x})^y = x^y$; luego, por definición de logaritmos, $\log x^y = y \log x$. \square

Ejercicio 3.56. Probar que si $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$, entonces la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ dada por $f(x) = a^x$ es biyectiva (si $a > 1$, copiarse sin pudor la 3.53 poniendo a donde aparezca e , si $0 < a < 1$, usar que $\frac{1}{a} > 1$ y la cabeza).

Ejercicio 3.57. Indicando por $\log_a: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ la inversa de $f(x) = a^x$ probar que:

- (i) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ para $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$
- (ii) $\log_a(x^y) = y \log_a x$ para $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $y \in \mathbb{R}$
- (iii) $a^x = e^{x \log a}$ para $x \in \mathbb{R}$
- (iv) $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ para $x \in \mathbb{R}_{>0}$ y $x \neq 1$, $y \in \mathbb{R}_{>0}$
- (v) Si $0 < x < y$, entonces $\log_a x < \log_a y$ si $a > 1$ (Usar 1.35)
- (vi) Si $0 < x < y$, entonces $\log_a x > \log_a y$ si $0 < a < 1$ (Usar 1.39)

Ejercicio 3.58. Sean a, b números reales mayores que cero. Probar que cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$ es:

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

(calcular $\log(ab)^x$ y usar el hecho de que la función \log es inyectiva por el 5)

3.8. Otras propiedades del límite. Consideremos ahora una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ de términos positivos y que tenga límite positivo a . Podemos considerar la sucesión $(\log a_n)_{n \geq 1}$ y también el logaritmo natural del límite, $\log a$. Ambas cosas son la misma:

Proposición 3.59. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de términos positivos con límite también positivo:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} (\log a_n) > 0$$

Entonces:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} (\log a_n) = \log a$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a} = 1$ por ???. Al ser $\varepsilon > 0$ es $e^\varepsilon > e^0 = 1$, luego, por 1, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_1$, es $\frac{a_n}{a} < e^\varepsilon$. Análogamente, como $e^{-\varepsilon} = \frac{1}{e^\varepsilon} < 1$, por 2 existe n_2 tal que, para $n \geq n_2$, es $\frac{a_n}{a} > e^{-\varepsilon}$. Si $n_0 = \max(n_1, n_2)$ entonces para $n \geq n_0$, vale que:

$$e^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{a} < e^\varepsilon$$

Por 6 del párrafo anterior:

$$\log e^{-\varepsilon} < \log \frac{a_n}{a} < \log e^\varepsilon$$

o sea, por propiedades del logaritmo:

$$-\varepsilon < \log a_n - \log a < \varepsilon$$

que equivale a: que equivale a

$$|\log a_n - \log a| < \varepsilon \quad (\text{para } n \geq n_0)$$

Como $\varepsilon > 0$ era cualquiera, Como $\varepsilon > 0$ era cualquiera, esto prueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \log a$ \square

Probamos ahora una desigualdad que enseguida usaremos:

Lema 3.60. Sea a un número real mayor que 1. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ es

$$|a^x - 1| \leq a^{|x|} - 1$$

Demostración. Si $x \geq 0$, entonces $a^x \geq a^0 = 1$ y entonces

$$|a^x - 1| = a^x - 1 = a^{|x|} - 1$$

Si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y por lo tanto: \square

Ahora probamos un resultado que quedará incluido en la Proposición más general que se probará después.

Lema 3.61 (Provisorio). Si a es un número real mayor que cero y $(b_n)_n \geq 1$ es una sucesión convergente con límite b , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{b_n} = a^b$$

Demostración. Supongamos primero $a > 1$ entonces:

$$\begin{aligned} |a^{b_n} - a^b| &= |a^{b_n-b+b} - a^b| \\ &= |a^{b_n-b} a^b - a^b| \\ &= |(a^{b_n-b} - 1) \cdot a^b| \\ &= |a^{b_n-b}| |a^b| \quad (\text{Por lema 3.60}) \\ &\leq (a^{|b_n-b|} - 1) a^b \end{aligned}$$

Ahora bien, cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$, existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$

$$|b_n - b| < \frac{1}{k}$$

Luego:

$$\begin{aligned} |a^{b_n} - a^b| &\leq (a^{|b_n-b|} - 1) a^b \\ &< (a^{\frac{1}{k}} - 1) a^b \\ &< \frac{a-1}{k} a^b \quad (\text{Por lema ??}) \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k > \frac{(a-1)a^b}{\varepsilon}$$

Entonces resulta para $n \geq n_0$:

$$|a^{b_n} - a^b| < \frac{a-1}{k} a^b < \frac{a-1}{\frac{(a-1)a^b}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

y como $\varepsilon > 0$ era cualquiera, resulta que $a_n^{b_n} \rightarrow a^b$

Si $a = 1$, el Lema es trivial. Si $0 < a < 1$, entonces $\frac{1}{a} > 1$ y por lo recién demostrado, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{b_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^b$.

Luego, por la proposición ??

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a^{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{b_n}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{b_n}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^b} = a^b \end{aligned}$$

lo cual termina de probar el lema. □

Ahora si podemos probar nuestro resultado al final:

Proposición 3.62. Sea $(a_n)_n \geq 1$ una sucesión de términos positivos con límite $a > 0$ y sea $(b_n)_n \geq 1$ una sucesión con límite b . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$$

Demostración. Por ejercicio 2c) del párrafo anterior:

$$a_n^{b_n} = e^{\log a_n^{b_n}} = e^{b_n \log a_n}$$

Llamando $c_n = b_n \log a_n$ resulta, por 3.9 y 3.23

colocar la referencia

colocar las referencias

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = b \log a$$

Entonces, por el lema Provisorio 3.61

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{b_n \log a_n} = e^{b \log a} = e^{\log a^b} = a^b$$

o sea:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$$

que era lo que queríamos demostrar. \square

Ejercicio 3.63. Calcular los límites de las sucesiones dadas por:

(i)

$$a_n = \left(\frac{2n^2 + 3n - 1}{3n^2 - 6n + 1} \right)^{2n}$$

(ii)

$$\left(\frac{3n + 4}{2n + 5} \right)^{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$$

(iii)

$$\frac{\log n}{n}$$

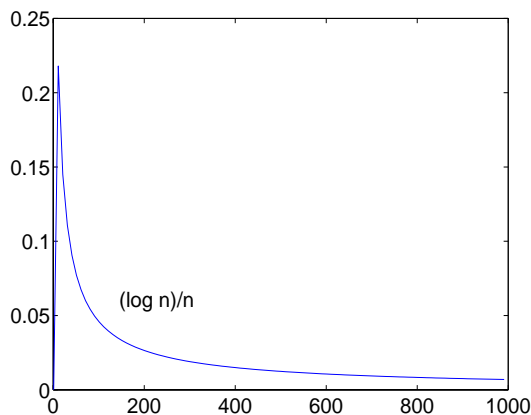


FIGURA 6. Se representa la sucesión $\frac{\log n}{n}$ en el dominio indicado en el gráfico. Se observa que la sucesión se acerca al origen.

Solución: El ejercicio puede resolverse utilizando diversos argumentos. Uno de ellos es observar que $\sqrt{n} > \log n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Ver las figuras 6 y 7. Entonces:

$$\frac{\log n}{n} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Otra posibilidad es notar que $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

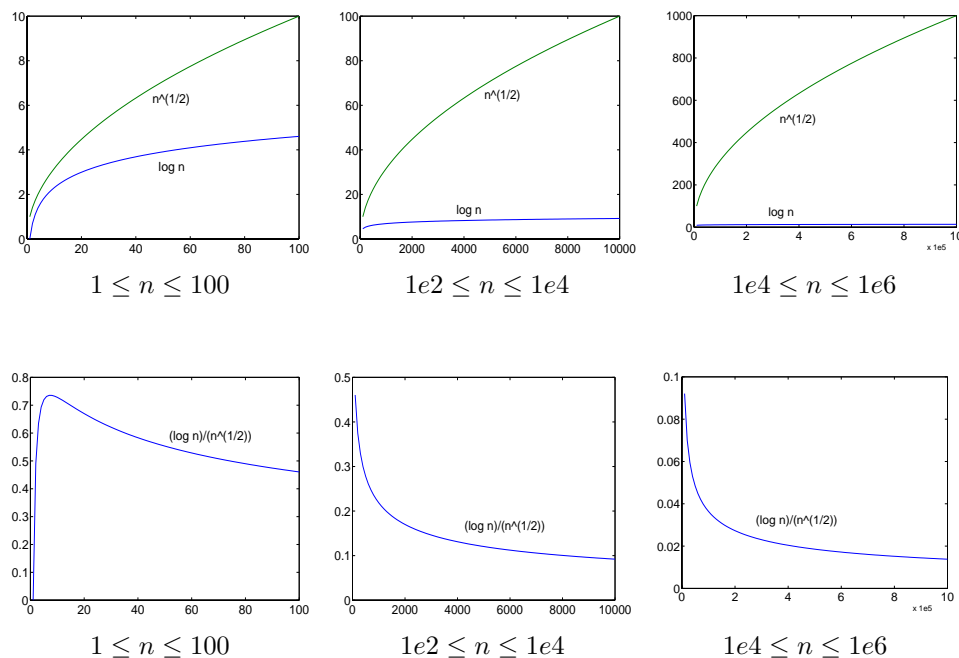


FIGURA 7. En la primera fila se representan $\log n$ y \sqrt{n} y en la segunda $\frac{\log n}{\sqrt{n}}$ para los dominios indicados. La sucesión tiende a cero.

Ejercicio 3.64 (Adicional). ¿Qué puede afirmarse, a la luz del ejercicio ??, respecto de la sucesión

$$\frac{\log n}{n^q}$$

para $q > 0$?

Ejercicio 3.65. Probar que si $a > 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) = \log a$$

(Usar ejercicio 2j. de 3.6)

Ejercicio 3.66. Probar que si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = -\infty$$

Ejercicio 3.67. Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = +\infty$

Ejercicio 3.68. Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = +\infty$

Ejercicio 3.69. Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = +\infty$

referencia, completar

3.9. Teoremas de encaje de intervalos y de Bolzano-Weierstrass. Vamos a demostrar un teorema del cual haremos repetido uso en el resto del libro. Primero daremos una definición:

Definición 3.70. Un encaje de intervalos es una sucesión de intervalos cerrados $I_n = [a_n, b_n]$ con $a_n \leq b_n$ tal que

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

o sea tal que se verifican las siguientes condiciones:

(i)

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \dots$$

(ii)

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \dots$$

Llamaremos longitud del intervalo $[a_n, b_n]$ al número $b_n - a_n$

Teorema 3.71 (De encaje de intervalos). *Sea $(I_n)_{n \leq 1}$ un encaje de intervalos tal que la longitud de I_n tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$*

Existe entonces un único $x \in \mathbb{R}$ que pertenece a todos esos intervalos:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$$

Demostración. Ya sabemos que $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por definición de encaje de intervalos. Probamos algo más: dados $k, j \in \mathbb{N}$, entonces es

$$a_k \leq b_j$$

Para ello sea n un natural cualquiera mayor que k y que j . Entonces es $a_k \leq a_n$ por la condición i), $a_n \leq b_n$ según dijimos y $b_n \leq b_j$ por la condición ii). Por transitividad resulta $a_k \leq b_j$ cualesquiera sean k y j en \mathbb{N} .

De esta manera, la sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ está acotada superiormente por cualquier b_j ; por ejemplo, por b_1 . Como la condición i) dice que esta sucesión es creciente, concluimos por Proposición 3.45 que existe

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Análogamente, la sucesión $(b_n)_{n \geq 1}$ está acotada inferiormente por cualquier a_k ; por ejemplo por a_1 . Como la condición ii) dice que esta sucesión es decreciente, entonces también por 3.45 existe

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Como $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (mirar la demostración 3.45), $a \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; análogamente como $b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, $b \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como cada a_k es cota inferior del conjunto de los b_j , entonces $a_k \leq b$, ya que b es la mayor cota inferior. Pero esta última desigualdad, válida para todo $k \in \mathbb{N}$, dice que b es cota superior del conjunto de los a_k .

Luego $a \leq b$, ya que a es la menor cota superior. En definitiva resulta:

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad (26)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n - a_n < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. En particular:

$$0 \leq b - a \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$$

o sea:

$$0 \leq b - a < \varepsilon$$

Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, entonces (Ejercicio 2.b. del párrafo 1.9) resulta $b - a = 0$ o sea $a = b$.

Sea entonces $x = a = b$; las desigualdades $a \geq a_n$ y $b \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ prueban que $x \in [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o sea:

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

Supongamos que $x' \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Entonces si $x \geq x'$ resulta:

$$0 \leq x - x' \leq b_n - x' \leq b_n - a_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$ elegimos n_0 de modo que $b_n - a_n < \varepsilon$ para $n \geq n_0$ y entonces en particular:

$$0 \leq x - x' \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$$

o sea:

$$0 \leq x - x' < \varepsilon$$

Como esto vale cualquiera, sea $\varepsilon > 0$, entonces nuevamente resulta:

$$x = x'.$$

lo cual prueba que la intersección de todos los I_n se reduce a un punto. \square

Para dar la primera aplicación de este teorema, vamos a definir un nuevo concepto. Si tenemos una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$, una subsucesión de ella consiste en elegir algunos de los a_n y formar así una nueva sucesión. Más precisamente, una subsucesión de $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de la forma:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots$$

de manera que:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k \dots$$

Así por ejemplo, $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}, \dots$ es una subsucesión, $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}, \dots$ es otra.

Si recordamos la Definición ?? de sucesión como una función $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces podemos dar una definición más precisa del concepto de subsucesión:

Definición 3.72. Sea $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión e indiquemos $a_n = a(n)$. Una subsucesión de a es la composición

$$a \circ n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \tag{27}$$

de a con una función estrictamente creciente $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Indicaremos $n_k = n(k)$ y entonces $a_{n_k} = a_{n(k)} = a \circ n(k)$.

Hemos visto antes (proposición ??) que toda sucesión convergente es acotada. La recíproca de esta proposición no es cierta, una sucesión acotada puede no ser convergente (Ejemplo: $a_n = (-1)^n$). Pero hay algo importante que podemos decir respecto a la convergencia de las sucesiones acotadas:

Teorema 3.73 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión acotada. Eso significa que existe un número real $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o sea:

$$-M \leq a_n \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad (28)$$

Entonces todos los términos de la sucesión están dentro del intervalo cerrado $[-M, M]$. Consideremos el punto medio de $[-M, M]$, o sea el 0, y los dos intervalos cerrados $[-M, 0]$ y $[0, M]$. Entonces ocurre una de estas dos alternativas: o hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in [-M, 0]$ o hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in [0, M]$ (si no fuese así, habría sólo una cantidad finita de valores de n para los cuales $a_n \in [-M, M]$, contra lo supuesto).

En el primer caso, llamemos I_1 a $[-M, 0]$ y en el segundo llamemos $I_1 = [0, M]$; si se dan las dos alternativas (por ejemplo, si la sucesión original fuese $(-1)^n/n$, entonces elegimos el intervalo de la izquierda $I_1 = [-M, 0]$. Sea cual sea, llamemos $I_1 = [b_1, c_1]$.

Ahora repetimos el procedimiento con I_1 : consideremos el punto medio de I_1 , o sea $\frac{b_1+c_1}{2}$, y los dos intervalos cerrados $[b_1, \frac{b_1+c_1}{2}]$ y $[\frac{b_1+c_1}{2}, c_1]$. Entonces ocurre una de estas dos alternativas: o hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in [b_1, \frac{b_1+c_1}{2}]$ o hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in [\frac{b_1+c_1}{2}, c_1]$ (si no fuese así, habría sólo una cantidad finita de valores de n para los cuales $a_n \in [b_1, c_1] = I_1$, contra la forma en que hemos elegido I_1).

En el primer caso llamamos I_2 a $[b_1, \frac{b_1+c_1}{2}]$ y en el segundo llamamos I_2 a $[\frac{b_1+c_1}{2}, c_1]$; si se dan las dos alternativas, entonces elegimos el intervalo de la izquierda, $I_2 = [b_1, \frac{b_1+c_1}{2}]$. Sea cual sea; llamemos $I_2 = [b_2, c_2]$.

Entonces por construcción resulta $[-M, M] \supset I_1 \supset I_2$ y además la longitud de I_1 es M y la de I_2 es $M/2$. Si reiteramos este procedimiento (dividiendo I_2 por el punto medio, etc.), obtendremos una sucesión de intervalos cerrados $I_n = [b_n, c_n]$ tales que

$$[-M, M] \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

y tales que la longitud de I_n es $M/2^{n-1}$. Como M es fijo, entonces la longitud de I_n tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces la sucesión $(I_n)_{n \geq 1}$ es un encaje de intervalos que está en las condiciones en las cuales vale el teorema 3.71. Luego existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Este x nos va a dar el límite buscado, pero todavía falta elegir la subsucesión. Para ello hacemos lo siguiente: como hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in I_1$, elegimos uno cualquiera de ellos y lo indicamos n_1 (por ejemplo, elegimos n_1 , como el menor n tal que $a_{n_1} \in I_1$). Entonces es $a_{n_1} \in I_1$. Ahora bien, como hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in I_2$, entonces seguramente hay valores de n mayores que n_1 que verifican $a_n \in I_2$. Elegimos uno cualquiera de ellos y lo indicamos n_2 (por ejemplo, elegimos n_2 como el menor n que verifica las condiciones $a_n \in I_2$ y $n_1 < n$). Entonces es $a_{n_2} \in I_2$ y $n_1 < n_2$. Reiterando el procedimiento (como hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in I_3$, etc.), obtenemos una sucesión $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$ de números naturales (y por lo tanto una subsucesión $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k} \dots$ de la original) de manera que $a_{n_k} \in I_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Afirmamos que es:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x$$

he realizado innumerables correcciones de esta parte

LM, $\mp \searrow$
MVS, 69

los intervalos no llevan :

Para probarlo, dado $\varepsilon > 0$ sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, $c_n - b_n < \varepsilon$ (recordar que $c_n - b_n = M/2^{n-1} \rightarrow 0$). Entonces si $k \geq n_0$ resulta:

$$a_{n_k} - x \leq c_k - b_k < \varepsilon$$

(ya que $a_{n_k} \in [b_k, c_k]$ por construcción y x pertenece a todos los $[b_n, c_n]$, en particular $x \in [b_k, c_k]$) y además

$$a_{n_k} - x \geq b_k - x \geq b_k - c_k > -\varepsilon$$

o sea, en definitiva: $-\varepsilon < a_{n_k} - x < \varepsilon$ para $k \geq n_0$, es decir:

$$|a_{n_k} - x| < \varepsilon \text{ para } k \geq n_0$$

lo cual prueba la afirmación hecha. \square

Observación 3.74. Los “etc” que aparecen en la demostración del Teorema de Bolzano-Weierstrass pueden hacer pensar al lector que debe haber razonamiento inductivo escondido detrás de ellos. En efecto, así ocurre: la definición de todos los I_n debe hacerse por inducción (supuesto definido I_n , partimos por el punto medio y nos quedamos con aquel que contenga términos a_n para infinitos valores de n , llamándolo I_{n+1}) y lo propio ocurre con la definición de los n_k . De ahora en adelante nos permitiremos estos “etc” en la confianza de que el lector ha captado la idea de que es fácil transformarlos en un razonamiento inductivo pero que ya no vale la pena hacerlo (porque ya le debe resultar automático hacerlo; no era así en el Capítulo 1).

no se enfatiza con entorno matemático

Observación 3.75. En el párrafo 1.8 hemos hablado sobre la representación de \mathbb{R} en la recta y, aunque mencionamos la ayuda que puede prestar, pusimos el énfasis en el hecho de que dicha representación no iba a ser usada en ninguna demostración. Hasta ahora hemos cumplido, pero queremos trasladar el énfasis. La demostración hecha del Teorema de Bolzano-Weierstrass sólo se basa, en última instancia, en las propiedades básicas de los números reales listadas en el Capítulo 1. Pero el lector puede darse cuenta de que para comprender dicha demostración estuvo todo el tiempo pensando en los números reales como en los puntos de una recta, y la imagen que le quedó de la idea central de la demostración es totalmente geométrica.

Ya se empieza a ver, entonces, que el papel auxiliar de los dibujos no es un “mero” papel auxiliar. De esto se convencerá definitivamente en los próximos capítulos.

Ejercicio 3.76. Si $b_n = \frac{1^2+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}$ y $c_n = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$ e $I_n = [b_n, c_n]$, probar que $(I_n)_{n \geq 1}$ es un encaje de intervalos cuyas longitudes tienden a cero. Hallar la intersección de todos ellos.

Ejercicio 3.77. (i) Dar un ejemplo de un encaje de intervalos tal que la intersección de todos ellos contenga más de un punto.

(ii) Probar que la intersección de todos los intervalos cerrados de un encaje de intervalos cualquiera es un intervalo cerrado (copiarse la demostración de 3.71 para determinar a y b ; el intervalo en cuestión es $[a, b]$)

(iii) Dar un ejemplo de una sucesión $(I_n)_{n \geq 1}$ de intervalos abiertos tales que $I_{n+1} \subset I_n$ y que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$

Ejercicio 3.78. Utilizando el Teorema de encaje de intervalos como hipótesis, probar la Propiedad de Completitud (A acotado superiormente, $A \neq \emptyset \Rightarrow$ existe el supremo de A).

3.10. Sucesiones de Cauchy. Antes de entrar en tema, probamos un resultado sobre subsucesiones.

Proposición 3.79. *Una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente con límite a si y sólo si toda subsucesión de $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente con límite a .*

Demostración. Supongamos primero que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y sea $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ una subsucesión de $(a_n)_{n \geq 1}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que:

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ para } n \geq n_0 \quad (29)$$

Pero $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (lo menos que puede valer n_1 es 1; como $n_1 < n_2$, lo menos que puede valer n_2 es 2, etc.) Luego si $k \geq n_0$ entonces $n_k \geq k \geq n_0$ y por 29

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \text{ para } k \geq n_0$$

lo cual prueba que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

La recíproca es trivial ya que toda sucesión es subsucesión de sí misma (corresponde al caso $n_k = k$) \square

Para definir sucesión convergente, lo que hicimos fue poner en términos precisos la idea de que la sucesión se vaya acercando a un cierto número. Ahora ponemos en términos precisos la siguiente idea: que los términos de la sucesión se vayan acercando entre sí. Lo hacemos de esta manera:

Definición 3.80. Una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ se dice que es de Cauchy si tiene la siguiente propiedad: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$ y $m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Es natural pensar que si los términos de una sucesión se van acercando a un cierto número, entonces dichos términos se van acercando entre sí (o sea, toda sucesión convergente es de Cauchy). También es natural pensar que si los términos de una sucesión se están acercando entre sí, entonces todos ellos se deben estar acercando a algún número (o sea, toda sucesión de Cauchy es convergente). La demostración de estas dos afirmaciones sería el final de este párrafo y de este Capítulo. Previamente necesitamos un par de resultados.

Proposición 3.81. *Toda sucesión de Cauchy es acotada*

Demostración. Consideremos $\varepsilon = 1$; por 3.80, si $(a_n)_{n \geq 1}$ es de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| < 1$$

En particular debe ser, para $n \geq n_0$

$$|a_n - a_{n_0}| < 1$$

o sea:

$$a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1$$

Si ahora consideramos $m' = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}$, $M' = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}$ y $m = \min\{m', a_{n_0} - 1\}$, $M = \max\{M', a_{n_0} + 1\}$ entonces claramente resulta

$$m \leq a_n \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

\square

Proposición 3.82. *Supongamos que $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy y que existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, para $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2$$

y existe n'_0 tal que, para $k \geq n'_0$

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$$

Entonces para $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \\ &\leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad (\text{tomando } k \geq n'_0) \end{aligned}$$

lo cual prueba lo afirmado. \square

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado anunciado:

Teorema 3.83. *Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

Demostración. Supongamos primero que $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente con límite a . Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \varepsilon/2$$

Entonces, si $n, m \geq n_0$

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \\ &= |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

lo cual prueba que la sucesión dada es de Cauchy.

Supongamos ahora que $(a_n)_{n \geq 1}$ es de Cauchy. Entonces por Proposición 3.81, dicha sucesión es acotada; ahora, por el Teorema ?? de Bolzano-Weierstrass, esta sucesión debe contener una subsucesión $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ convergente. Pero entonces la Proposición 3.82 nos dice que $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente. \square

Ejercicio 3.84. *Probar que una sucesión es de Cauchy si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$:*

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \text{ cualquiera sea } p \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 3.85. (i) *Probar que si una sucesión es de Cauchy, entonces para todo $p \in \mathbb{N}$ es*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$$

- (ii) *Mostrar que la recíproca de 1 no es cierta (considerar $a_n = \log n$)*
- (iii) *Meditar sobre la diferencia entre 1 y el Ejercicio 1.*

colocar la referencia

Ejercicio 3.86. *Demostrar que la sucesión dada por $a_n = (-1)^n$ no es convergente.*

MS, OK
CEN, Problemas
adicionales

PROBLEMAS ADICIONALES

Ejercicio 3.87. Si $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$ para todo $n \geq 1$, expresar a_n en función de a_1 y a_2 , y demostrar que $a_n \rightarrow (a_1 + 2a_2)/3$ (ver Apostol (1976, pág.116))

Ejercicio 3.88. Si $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, y $a_{n+2} = (a_{n+1}a_n)^{1/2}$ para todo $n \geq 1$, expresar a_n en función de a_1 y a_2 , y demostrar que $a_n \rightarrow (a_1a_2^2)^{1/3}$

Ejercicio 3.89. Si $0 < x_1 < 1$ y si $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ para todo $n \geq 1$, probar que (x_n) es una sucesión decreciente con límite 0. Probar además que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow \frac{1}{2}$

Ejercicio 3.90. En la figura 8 se representan algunos ejemplos correspondientes a la familia de sucesiones $x_{n+1} = x_n(a - bx_n)$ con diversos valores para x_1 . Estudiar el comportamiento de estas sucesiones (llamadas de Verhulst) para distintas elecciones de los parámetros a y b .

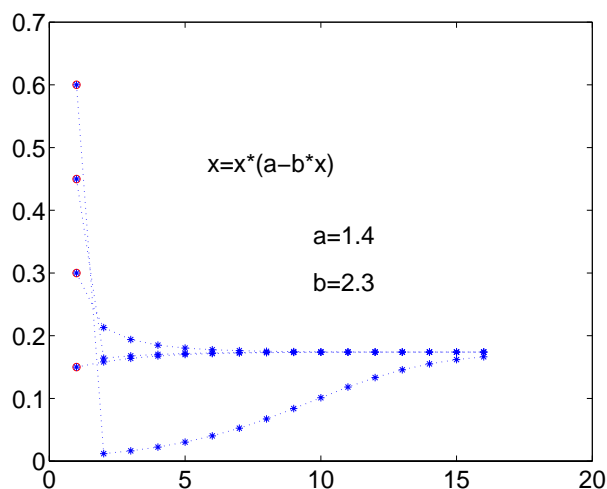


FIGURA 8. Sucesión de Verhulst con las constantes dadas en el gráfico. ¿Cuál será el efecto de incrementar la condición inicial x_0 por encima del valor 0.6? Notar que tienden a $x_\infty = 0.173913$.

Ejercicio 3.91. Una sucesión (x_n) satisface $7x_{n+1} = x_n^3 + 6$ para $n \geq 1$. Si $x_1 = \frac{1}{2}$ probar que la sucesión crece y hallar su límite. ¿Qué ocurre si $x_1 = \frac{3}{2}$ o $x_1 = \frac{5}{2}$?

Ejercicio 3.92. Si $|a_n| < 2$ y $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{8}|a_{n+1}^2 - a_n^2|$ para todo $n \geq 1$, probar que (a_n) converge

Ejercicio 3.93. Determinar el límite de la sucesión definida por la recursión

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right) \quad (30)$$

con el parámetro $c > 0$, y para distintos valores de x_1 . En el caso que la sucesión tenga límite ℓ , ¿Cuál será el comportamiento de la sucesión de errores $e_n = x_n - \ell$?

4. SERIES NUMÉRICAS

4.1. Definición de serie. Consideremos una sucesión cualquiera $\{a_n\}_{n \geq 1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos lo que quiere decir la suma de los n primeros términos de esa sucesión, suma que indicábamos como $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, o también como $\sum_{k=1}^n a_k$, y además conocemos algunas propiedades de esas sumas (parágrafo 1.4).

Lo que queremos hacer en este capítulo es dar una definición, si se puede, de lo que es la suma de todos los infinitos términos de dicha sucesión, suma que indicaremos $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, o también $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

En el parágrafo 1.4 tuvimos que argumentar bastante para mostrar la necesidad de definir $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; aquí no hace falta argumentar mucho para convencer al lector de la necesidad de definir $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, ya que nadie puede efectuar infinitas sumas. En busca de esa definición, consideremos las siguientes “sumas parciales”:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Si estuviese definido $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, entonces es razonable esperar que las sumas parciales recién indicadas se le vayan acercando. Pero eso es lo mismo que pedir que la sucesión $\{S_n\}_{n \geq 1}$ tenga límite, lo que en general no ocurre. Por ejemplo, consideremos la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ dada por $a_n = (-1)^{n+1}$. Para esta sucesión, las sumas parciales son:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = 1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 = 1 + (-1) = 0 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 + (-1) + 1 = 1 \end{aligned}$$

y, en general, $S_n = 1$ si n es impar y $S_n = 0$ si n es par. Luego la sucesión de sumas parciales es:

$$1, 0, 1, 0, \dots$$

claramente no convergente. Luego no parece posible dar una definición de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ (no parece posible definir $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$). Esto nos lleva derecho a la siguiente definición:

Definición 4.1. Si $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión, si, para cada $n \in \mathbb{N}$, llamamos $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, y si la sucesión $\{S_n\}_{n \geq 1}$ es convergente, entonces llamamos suma de los a_k desde $k = 1$ hasta ∞ a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

(o sea, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$)

Brevemente, entonces, la suma de infinitos números reales es el límite de las sumas parciales, si dicho límite existe. Pero exista o no ese límite, vamos a encontrar

de importancia el estudio de las sucesiones de sumas parciales correspondientes a una sucesión dada $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

La longitud de la expresión “sucesión de sumas parciales correspondientes a una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ” es un poco grande como para estar usándola continuamente (y deberemos hacerlo). Esto ha originado una abreviatura para esa expresión bastante singular: en lugar de decir “la sucesión de sumas parciales correspondientes a la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ” se dice “la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ”.

De esta manera, aunque no exista $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (en el sentido de la definición 4.1), siempre existe la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (por ejemplo, no existe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$, pero sí existe la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ es la sucesión $1, 0, 1, 0, \dots$ de sumas parciales). Más aún, aunque exista $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, no es lo mismo que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (pues $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es un número, el límite de una cierta sucesión, mientras que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es esa cierta sucesión).

De acuerdo a lo anterior, está claro qué quiere decir que una serie sea convergente; como la serie, por definición, es una sucesión (la de sumas parciales), entonces eso querrá decir que dicha sucesión es convergente.

El núcleo de este capítulo estará en la determinación de criterios que nos permitan decidir si una serie converge o no. Empezamos probando lo siguiente:

Proposición 4.2. *Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Demostración. Que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converja quiere decir que la sucesión $(S_n)_{n \geq 1}$ de sumas parciales converge. Luego, por Teorema ??, $(S_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy. Pero entonces, por el ejercicio 3 del párrafo ??, es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_n) = 0$$

y como $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k = a_{n+1}$ la proposición queda probada \square

Desafortunadamente, la recíproca de la proposición 4.2 no es cierta, no es cierto que si $a_n \rightarrow 0$ entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. (Ver ejemplo al final del párrafo 4.2, la “serie armónica”)

Ya estamos en condiciones de examinar un ejemplo muy importante, la llamada serie geométrica de razón r . Esta es la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} \text{ (también indicada } \sum_{k=0}^{\infty} r^k)$$

donde r es un número real cualquiera. Veamos cual es su comportamiento según cuál sea el valor de r .

Observemos que la sucesión de sumas parciales tiene, en este caso, una expresión muy sencilla. Por el ejercicio 5.b del párrafo 1.4 sabemos que es, si $r \neq 1$

$$S_n = 1 + r + r^2 \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

(si no lo hizo antes, hágalo ahora por inducción). Luego existe $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ si, y sólo si, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 1}{r - 1}$. Pero como aquí aparece r^n , recordamos lo hecho en el párrafo ??: si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$. Por lo tanto, si $|r| < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{0 - 1}{r - 1} = \frac{1}{1 - r}$$

PC, 77–80

referenciar

Esto prueba que, si $|r| < 1$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ converge, y además podemos decir a qué número converge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad (\text{para } |r| < 1)$$

Afirmamos que la serie geométrica no converge para ningún otro valor de r . En efecto, si convergiera, entonces por la proposición 4.2, debería ser $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Pero a_n es en este caso r^{n-1} , y por los resultados del párrafo ?? sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n-1} = 0$ solamente cuando $|r| < 1$. Entonces, en definitiva, la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ converge (a $\frac{1}{1-r}$) si $|r| < 1$ y no converge si $|r| \geq 1$.

Ejercicio 4.3. Probar que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces para todo número real c también converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c a_k$ y además:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (31)$$

Ejercicio 4.4. Probar que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ converge y además:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (32)$$

Ejercicio 4.5. Probar que las siguientes series no son convergentes:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n$
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{n^2+1}$
- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Ejercicio 4.6. Probar que las siguientes series son convergentes y hallar su suma:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{n+2} 7}{5^{2 \cdot n - 3}}$

4.2. Series de términos positivos: criterios de convergencia. Nos limitaremos en este párrafo a estudiar series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para las cuales sea $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos que si $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces las sumas parciales son crecientes; en efecto:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k = a_{n+1} + S_n \geq S_n$$

Luego, por la proposición 3.45, si la sucesión de sumas parciales está acotada, entonces existe $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, o sea la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge; y si la sucesión de sumas parciales no está acotada, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ (en este caso se dice que la serie diverge). Estas observaciones nos suministran inmediatamente un criterio de convergencia:

Proposición 4.7 (Criterio de comparación). Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones tales que, a partir de un cierto n_0

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

y supongamos además que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamemos:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ S'_n &= b_1 + b_2 + \dots + b_n \end{aligned}$$

Como, por hipótesis, S'_n converge, entonces S_n está acotada, es decir existe un número real $M' > 0$ tal que

$$S'_n \leq M' \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad (33)$$

Ahora bien, si $n > n_0$ es:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^n a_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^n b_k \text{ (por hipótesis)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=1}^n b_k \text{ (ya que cada } b_i \geq 0) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + S'_n \leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + M' \end{aligned}$$

Llamando $M'' = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + M'$, resulta:

$$S_n \leq M'' \text{ para todo } n > n_0 \quad (34)$$

y si $M = \max\{S_1, S_2, \dots, S_{n_0}, M''\}$, entonces

$$S_n \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad (35)$$

Luego $(S_n)_{n \geq 1}$ está acotada superiormente; siendo creciente, la proposición 3.45 nos dice que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge \square

Corolario 4.8. Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones tales que, a partir de un cierto n_0 :

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

y supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también diverge.

Demostración. Al ser $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge o diverge. Si convergiese, entonces también lo haría $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ por la proposición 4.7. Ello no es así por hipótesis, luego $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge \square

Corolario 4.9. Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones de términos positivos (o sea, $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$) tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = s > 0$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = s$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - s \right| < 1$$

lo cual implica en particular:

$$\frac{a_n}{b_n} - s < 1 \Rightarrow a_n < b_n(s+1)$$

Ahora bien, como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(s+1)$ también converge (Ejercicio 1 del párrafo anterior). Y como $0 < a_n < b_n(s+1)$ para $n > n_0$, entonces por el criterio de comparación 4.7 resulta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente. Si ahora suponemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{s} > 0$, repetimos los razonamientos anteriores cambiando b por a y s por $\frac{1}{s}$ para concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente \square

referencia del ejercicio

El corolario ?? resulta particularmente útil para eliminar la hojarasca de los términos generales de algunas series. Por ejemplo, consideremos la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3}{3^n + 2}$$

Para n grande, 3 se puede despreciar frente a 2^n y 2 se puede despreciar frente a 3^n . Pensando en eso, consideramos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2^n + 3}{3^n + 2} \\ b_n &= \frac{2^n}{3^n} \end{aligned}$$

las variables matemáticas siempre se deben ubicar en el ambiente matemático, nunca como texto

Entonces

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n + 3}{2^n} \frac{3^n}{3^{n+2}} = \left(1 + \frac{3}{2^n}\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{3^n}}\right)$$

Como $\frac{3}{2^n}$ y $\frac{2}{3^n}$ tienden a cero cuando $n \rightarrow \infty$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$$

y siendo $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, por ser geométrica de razón $\frac{2}{3} < 1$. Luego, por ??, resulta que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Veamos ahora un criterio de gran importancia sobre convergencia de series:

Proposición 4.10 (Criterio de D'Alembert). *Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de términos positivos tal que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si $s < 1$ y divergente si $s > 1$

REFERENCIAS

APOSTOL, T.M., *Análisis Matemático*, segunda edición, Reverté (1976) Barcelona

ÍNDICE DE FIGURAS

1	Primeros términos de la sucesión $1/n$	4
2	Entornos de ℓ_1 y ℓ_2	13
3	Intervalo $[M_1, M_2]$	14
4	Intervalo $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$	14
5	Intervalo $[b, 2\ell - b]$	15
6	Representación de la sucesión $\frac{\log n}{n}$	34
7	Representación de $\log n$, \sqrt{n} , y $\frac{\log n}{\sqrt{n}}$	35
8	Sucesión de Verhulst con las constantes dadas en el gráfico.	42

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE AUTORES

Apostol
Tom M., 44

ÍNDICE

- cálculo de la raíz cuadrada, 42
- cambio de índice, 11
- convergente
 - serie, 44
- cuadrados
 - sucesión de, 4
- infinitos términos, 43
 - suma de, 43
- inversos
 - sucesión de, 4
- límite de medias aritméticas, 42
- límite de medias geométricas, 42
- límite de sumas parciales, 43
- logaritmo
 - orden del, 35
- medias aritméticas
 - límite de, 42
- medias geométricas
 - límite de, 42
- Newton
 - sucesiones de, 42
- numérica
 - sucesión, 3
- orden del logaritmo, 35
- parciales
 - límite de sumas, 43
 - sumas, 43
- raíz cuadrada
 - cálculo de la, 42
- serie, 44
- serie convergente, 44
- sucesión, 3
- sucesión de cuadrados, 4
- sucesión de inversos, 4
- sucesión definida como función, 4
- sucesión numérica, 3
- sucesiones de Newton, 42
- sucesiones de Verhulst, 42
- suma de infinitos términos, 43
- sumas parciales, 43
- términos
 - infinitos, 43
- Verhulst
 - sucesiones de, 42