~~a) $\mathbb{Z}^{[0,1]} = \{F$~~

a) $\mathbb{Z}^{[0,1]} = \{F : [0,1] \to \mathbb{Z} \text{ , } F \text{ función}\}$

Primero veamos que $[0,1] \sim \mathbb{R}$

Sea $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ veamos que es biyectiva en $(0,1)$ y la ~~pre~~imagen en el $(0,1)$ de f es $\mathbb{R}$

- está claro que es continua ~~den~~ en $(0,1)$

- $$f'(x) = \frac{(1-x^2) - (-2x)(x)}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$$

x^2+1 es siempre positivo
$(1-x^2)^2$ es siempre positivo en el $(0,1)$

Por tener su derivada definida positiva en el $(0,1)$ y ser continua deducimos que f es ~~biyectiva~~ inyectiva en el $(0,1)$

- $$\lim_{x\to 1} f = \lim_{x \to 1} \frac{x}{1-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x^2} = -\infty$$

la imagen de f en el $(0,1)$ es todo $\mathbb{R}$

Por tanto existe f biyectiva de $(0,1)$ a $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $(0,1) \sim \mathbb{R}$

- Ahora hay que ver si $(0,1) \sim [0,1]$

$[0,1] = (0,1) \cup \{1,0\}$.

tomemos $f(x) = x$, $f: (0,1) \to [0,1]$

f es inyectiva $\Rightarrow (0,1) \leq [1,0]$

Sea $C \subseteq (0,1)$ numerable, existe por Cantor-Bernstein.

$C \sim \mathbb{N}$ y $C \cup \{0,1\} \sim \mathbb{N} \Rightarrow C \cup \{0,1) \sim C$

$\Rightarrow \exists\, g: C \cup \{0,1\} \to C$ biyectiva.

Sea $g' : (0,1) \cup \{0,1\} \to (0,1)$

$$g'(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in C \cup \{0,1\} \\ x, & \text{si } x \notin C \cup \{0,1\} \end{cases}$$

Vemos que $g'(x)$ es inyectiva ya que $g(x)$ es biyectiva y nos lleva a todo C y luego la identidad es biyectiva y en este caso nos lleva a todo $(0,1) - C$.

Por tanto

$[1,0] \leq (0,1)$

$\Rightarrow (0,1) \sim [0,1]$

Por tanto $[0,1] \sim \mathbb{R}$

Veamos al conjunto $A \subset \mathbb{Z}^{[0,1]} = \{ f \,/\, f(x) = 0$ para todos los $x \in (0,1]$ y $f(0) = a \,/\, a \in (0,1) \}$

- Veamos que $A \sim (0,1) \sim [0,1] \sim \mathbb{R}$

definimos $g(f) : A \to (0,1)$

$g(f) = f(0)$, es claro que es biyectiva

- Veamos que $\mathbb{R} \sim A \leq \mathbb{Z}^{[0,1]}$

definimos $g : \mathbb{Z}^{[0,1]} \to A$

$$g(f) = \begin{cases} f, & \text{si } f \in A \\ g', & \text{si } f \notin A \end{cases}$$

$$\text{con } g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (0,1] \\ 1 & \text{si } x \in \{0\} \end{cases}$$

esta claro que $g' \in A$

y g es sobreyectiva

- Por tanto $\mathbb{N} \lneq \mathbb{R} \sim A \leq \mathbb{Z}^{[0,1]}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}^{[0,1]}$ no es numerable

c) $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{ f \mid f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f \text{ es función} \}$.

Supongamos que existe $\varphi(f) : \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{N}$ biyectiva

tomemos a $w(\cancel{x}) =$ $w : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} w(0) = a_0 \ / \ a_0 \neq (\varphi^{-1}(0))(0) \\ w(1) = a_1 \ / \ a_1 \neq (\varphi^{-1}(1))(1) \\ \vdots \\ w(i) = a_i \ / \ a_i \neq (\varphi^{-1}(i))(i) \\ \quad \forall i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

w no tiene preimagen

por tanto es absurdo que exista $\varphi(f)$ biyectiva.
$: \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ no es numerable.

d) $A = \{ f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \; / \; f(x_i) \neq 0 \;\; \forall i = 1 \dots n \;\; \text{con } n \in \mathbb{N} \}$

~~tomemos al conjunto $B \subseteq A$ de las funciones que valen 0 exepto para exactamente n puntos~~

Tomemos al conjunto $B \subseteq A = \{ f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \; / \; f(x) = a \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \}$

Sea $F: B \to \mathbb{R} \; / \; F(f) = f(0) = a$

Vemos que es biyectiva

Por tanto $B \sim \mathbb{R}$

Sea $w: A \to B \; / \; w(f) = \begin{cases} f, & \text{si } f \in B \\ w', & \text{si } f \notin B \end{cases}$

con $w'(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

vemos que w es sobreyectiva por tanto

$B \leq A \Rightarrow \mathbb{N} < \mathbb{R} \sim B \leq A$

$\Rightarrow$ A no es numerable

e) $A = \{ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \ / \ f(x) \neq 0 \iff x \in C \ / \ C \text{ es finito} \}$

Sea $B_n \subseteq A = \{ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \ / \ f(x) \neq 0 \iff x \in C \ / \ \# C = n \}$

Sabemos que existe φ ~~inyectiva~~ biyectiva con $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$

Sea $w : B_n \to \mathbb{N}^n \ / \quad w(f) = \left(\varphi(x_1, f(x_1)), \dots, \varphi(x_n, f(x_n)) \right)$
con $x_i \in C \quad \forall i = 0 \dots n$

Como φ es ~~inyectiva~~ biyectiva w lo será

Por tanto $B_n \sim \mathbb{N}^n \sim \mathbb{N}$

Notemos que $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ y union de conjuntos contables es contable.

$\Rightarrow A \sim \mathbb{N}$

d) $A=\{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \ / \ f(x_i)\neq 0 \quad \forall i=1\dots n \ \text{con } n\in\mathbb{N}\}$

~~tomamos al un conjunto B ⊄ A de las funciones que valen 0 exepto para exactamente n puntos~~

Tomemos al conjunto $B\subseteq A = \{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \ / \ f(x)=a\neq 0 \iff x=0\}$

Sea $F: B\to\mathbb{R} \ / \ F(f)=f(0)=a$

Vemos que es biyectiva

Por tanto $B\sim\mathbb{R}$

Sea $w: A\to B \ / \ w(f)=\begin{cases} f, & \text{si } f\in B\\ w', & \text{si } f\notin B\end{cases}$

con $w'(x)=\begin{cases}0 & \forall x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

vemos que w es sobreyectiva por tanto

$B\leq A \Rightarrow \mathbb{N}<\mathbb{R}\sim B\leq A$

$\Rightarrow$ A no es numerable