

Mathematik für Ingenieure E2: ET, IuK, ME

3. Übung

05.05.-09.05.

Sommersemester 2014

Prof. Dr. Wolfgang Achtziger

Dr. Markus Dick

Dipl.-Math. Martin Knossalla

M.Sc. Elisabeth Köbis

Angewandte Mathematik 2

FAU, Department Mathematik

Präsenzaufgabe 13:

- a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^n}.$$

- b) Bestimmen Sie nun den Grenzwert von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15(n+1)}{2^n}$, indem Sie zuerst zeigen, dass diese Reihe das Cauchy-Produkt der beiden Reihen aus Teilaufgabe a) ist.

Präsenzaufgabe 14:

- a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{i) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2+1} \quad \text{ii) } \sum_{k=23}^{\infty} \frac{(-9)^k x^{2k}}{k} \quad \text{iii) } \sum_{k=0}^{\infty} x^{k^3}$$

Konvergieren die Potenzreihen auch an den Rändern ihres Konvergenzintervalls? Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Potenzreihen jeweils?

- b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{i) } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k \quad (z \in \mathbb{C}) \quad \text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k + i \sin k}{k^2} z^k \quad (z \in \mathbb{C})$$

Präsenzaufgabe 15:

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x)$, falls er existiert. Begründen Sie Ihre Berechnungen, indem Sie beliebige Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{\hat{x}\}$ mit $x_n \rightarrow \hat{x}$ betrachten.

- $f: \mathbb{R} \setminus \{\hat{x}\} \rightarrow \mathbb{R}, \hat{x} = 3, f(x) := \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x - 3}.$
- $f: \mathbb{R} \setminus \{\hat{x}\} \rightarrow \mathbb{R}, \hat{x} = 2, f(x) := \frac{x^2 + 1}{|x - 2|}.$

Hausaufgabe 16:

(ohne Korrektur)

Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ fest. Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

indem Sie diese zunächst als Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen darstellen.

Hausaufgabe 17:

(ohne Korrektur)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} \quad \text{und} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

- c) Für welche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{6^{n+1} n} (x+2)^n \quad ?$$

Hausaufgabe* 18:

(10 Punkte)

- a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der folgenden Potenzreihen. Klären Sie im Fall $\rho < +\infty$ auch, ob Konvergenz in Randpunkten des Konvergenzintervalls vorliegt.

$$\text{i) } \sum_{k=0}^{\infty} x^{2^k} \quad \text{ii) } \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^{3k}\right)^k (x + \pi)^k$$

$$\text{iii) } \sum_{n=23}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^{n+1}} x^n \quad \text{iv) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n \cdot (n+1)} \cdot x^{3n} \quad (\text{Hinweis: Substitution } x^3 = y)$$

- b) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x)$, falls er existiert. Begründen Sie Ihre Berechnungen, indem Sie beliebige Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{\hat{x}\}$ mit $x_n \rightarrow \hat{x}$ betrachten.

- $f: \mathbb{R} \setminus \{\hat{x}\} \rightarrow \mathbb{R}, \hat{x} = 1, f(x) := \frac{2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 1}.$
- $f: \mathbb{R} \setminus \{\hat{x}\} \rightarrow \mathbb{R}, \hat{x} = 1, f(x) := \frac{3x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 1}.$

Abgabe der Hausaufgabe*: 12.05.-16.05. in den Übungen