4.6. Teorema del Núcleo-Imagen (TNI)

El propósito de está sección es probar el siguiente teorema.

Teorema 4.3 (Núcleo-Imagen). *Sean U, V espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $T : U \to V$ una transformación lineal, $\dim U < \infty$. Entonces:*

$$\dim U = \dim KerT + \dim ImT.$$

Teorema Núcleo-Imagen (TNI)

Demostración. Daremos una demostración constructiva de este teorema. Sea $\{u_1, ..., u_\nu\}$ una base de $KerT$. Completemos esta base a una base de U

$$\beta_U = \{u_1, ..., u_\nu, u_{\nu+1}, ..., u_n\}.$$

Probaremos que $\beta' = \{T(u_{\nu+1}), ..., T(u_n)\}$ es base de ImT. Sea $v \in ImT$ es decir $v \in V$ y existe $u \in U$ $T(u) = v$. Como β_U es base de U se tendrá que

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_\nu u_\nu + \alpha_{\nu+1} u_{\nu+1} + ... + \alpha_n u_n,$$

de donde

$$v = T(u) = \alpha_{\nu+1} T(u_{\nu+1}) + ... + \alpha_n T(u_n),$$

pues $T(u_1) = ... = T(u_\nu) = 0$. Es decir v es combinación de los elementos de β'. Probemos ahora que son l.i., para ello consideremos

$$\alpha_{\nu+1} T(u_{\nu+1}) + ... + \alpha_n T(u_n) = 0.$$

Como $T(\alpha_{\nu+1} u_{\nu+1} + ... + \alpha_n u_n) = \alpha_{\nu+1} T(u_{\nu+1}) + ... + \alpha_n u_n T(u_n) = 0$ se deduce que el vector $\alpha_{\nu+1} u_{\nu+1} + ... + \alpha_n \in KerT$ pero entonces existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_\nu$ tal que

$$\alpha_{\nu+1} u_{\nu+1} + ... + \alpha_n u_n = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_\nu u_\nu,$$

o equivalentemente

$$\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_\nu u_\nu - \alpha_{\nu+1} u_{\nu+1} - ... - \alpha_n u_n = 0$$

Como los vectores $u_1, ..., u_n$ son $\ell.i.$ se deduce en particular que

$$\alpha_{\nu+1} = ... = \alpha_n = 0,$$

y por lo tanto $\beta' = \{T(u_{\nu+1}), ..., T(u_n)\}$ es base de ImT. Pero entonces tenemos

$$\dim U = n = \nu + (n - \nu) = \dim KerT + \dim ImT.$$

□

Es directo del TNI que: si $\dim U = n$, y el rango de T es n se tiene $\dim KerT = 0$, es decir T es inyectiva. Otra aplicación directa es

---

Teorema 4.4. *Sea $T : U \to V$ aplicación lineal.*

1. *Si* $\dim U = \dim V$ *entonces*

$$T \text{ inyectiva } \Leftrightarrow T \text{ epiyectiva } \Leftrightarrow T \text{ biyectiva.}$$

2. *Si* $\dim U > \dim V$ *T no puede ser inyectiva.*

3. *Si* $\dim U < \dim V$ *T no puede ser epiyectiva.*

4. *Como conclusión de (2) y (3)*

$$U \text{ isomorfo a } V \Leftrightarrow \dim U = \dim V.$$

DEMOSTRACIÓN. Probemos sólo (2), el resto queda de ejercicio. Del TNI se tiene que

$$\dim U = \dim KerT + \dim ImT < \dim V,$$

como $\dim KerT \geq 0$ se concluye que

$$\dim ImT < \dim V,$$

y por lo tanto ImT es un s.e.v. estrictamente más pequeño que V, es decir T no puede ser epiyectiva.

Es importante señalar que en (4), la implicancia $\Rightarrow$ es consecuencia de (2) y (3), mientras que $\Leftarrow$ se obtiene del hecho de que todo espacio de dimensión finita n es isomorfo a $\mathbb{K}^n$ (ver ejemplo anterior a la Definición 4.2). □

◀ Ejercicio

Ejercicio 4.2: Probar que si $T : U \to V$ es lineal y W es un subespacio de U entonces

1. $T(W)$ es subespacio de V.
2. $\dim T(W) \leq \dim U$.
3. Si T es inyectiva $\dim T(W) = \dim W$.

4.7. Matriz Representante de una Transformación Lineal

Vimos anteriormente que, dado un e.v V sobre $\mathbb{K}, dimV = n$, se tenía $V \cong \mathbb{K}^n$. Esto nos permite "llevar" el trabajo de cualquier espacio de dimensión finita a un espacio de n-tuplas. Trataremos de extender esto para transformaciones lineales, reemplazando estas (en un sentido que precisaremos) por matrices.

Sean U, V espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}, \dim U = p, \dim V = q$. Sean $\beta_U = \{u_1, ..., u_p\}, \beta_V = \{v_1, ..., v_q\}$ bases de U y V respectivamente. Consideremos finalmente una transformación lineal $T : U \to V$.

Sabemos que T queda completamente determinada por su acción sobre la base β_U

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} v_i \qquad 1 \leq j \leq p$$

o bien,

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{q1}v_q \\ T(u_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{q2}v_q \\ &\vdots \\ T(u_p) &= a_{1p}v_1 + a_{2p}v_2 + ... + a_{qp}v_q \end{aligned}$$

Es claro que la información importante que define T está contenida en las coordenadas, $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{qj})$ de cada vector $T(u_j)$, con respecto a la base β_V, en el espacio de llegada. Esta información la guardamos en una matriz de q filas y p columnas, denominada **matriz representante de T, con respecto a las bases β_U y β_V:**

Matriz representante de T $M_{\beta_U \beta_V}(T)$

$$M_{\beta_U \beta_V}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{q1} & a_{q2} & ... & a_{qp} \end{pmatrix} \in M_{qp}(\mathbb{K})$$

donde, $q = \dim U$, $p = \dim V$.

En la columna j-ésima de esta matriz, aparecen las coordenadas del vector $T(u_j)$ con respecto a la base β_V:

$$A_{\bullet j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{pmatrix} \Leftrightarrow T(u_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} v_i$$

Observación: Una pregunta interesante es: ¿Qué sucede con esta matriz si cambiamos las bases?. Esto lo responderemos en breve.

Ejemplo:

Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Consideremos $\beta = \beta_U = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, base canónica de $\mathbb{R}^4$,
$\beta' = \beta_V = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= T\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\
T(e_2) &= T\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + 0\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 0\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\
T(e_3) &= T\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + 0\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 1\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\
T(e_4) &= T\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

de donde:

$$M_{\beta\beta'}(T) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_{34}(\mathbb{R})$$

Tomemos ahora, en $\mathbb{R}^3$, la base canónica, $\beta' = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$:

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3 \\
T(e_2) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1e'_1 + 1e'_2 + 0e'_3 \\
T(e_3) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0e'_1 + 1e'_2 + 1e'_3 \\
T(e_4) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0e'_1 + 0e'_2 + 1e'_3
\end{aligned}$$

Luego,

$$M_{\beta\beta'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

¡Sorpresa!, esta matriz representante no sólo es distinta de la anterior, sino que corresponde a la matriz que define T en forma natural. Concluímos entonces que: la matriz representante *depende* de las bases elegidas y que la matriz representante con respecto a las bases canónicas es la matriz asociada a T. Esto último lo podemos verificar en el caso general:

Consideremos
$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{K}^p &\to \mathbb{K}^q \\ x &\to Ax,\ A \in M_{qp}(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Sea $\beta = \{e_1, ..., e_p\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^p$ y $\beta' = \{e'_1, ..., e'_q\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^q$.

Se tiene entonces:

$$T_A(e_j) = Ae_j = \begin{pmatrix} a_{11}... & a_{1j}... & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{q1}... & a_{qj}... & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{pmatrix}$$

o bien:

$$T_A(e_j) = a_{1j}e'_1 + ... + a_{qj}e'_m = \sum_{i=1}^{q} a_{ij}e'_i$$

de donde concluímos $M_{\beta\beta'}(T_A) = A$.

Veamos ahora como interactuan T y $M = M_{\beta\beta'}(T)$. Sea $u \in U$, entonces

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_p u_p,$$

y por lo tanto $T(u) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j T(u_j)$ pero $T(u_j) = \sum_{i=1}^{q} m_{ij} v_i$ y por lo tanto

$$T(u) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \sum_{i=1}^{q} m_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{q} (\sum_{j=1}^{p} \alpha_j m_{ij}) v_i.$$

Así las coordenadas de $T(u)$ con respecto a β' son

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j m_{1j}, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j m_{qj},$$

y por lo tanto si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_p)$ son las coordenadas de u entonces $M\alpha$ son las de $T(u)$.
Esto permite trabajar con M en vez de T.
Ya tenemos una matriz que representa T, ahora deseamos "olvidarnos" de T y trabajar sólo con un representante matricial. Para hacer esto, en algebra acostumbramos establecer una isomorfía, en este caso, entre el espacio vectorial de todas estas matrices, $M_{qp}(\mathbb{K})$, y aquél de todas las transformaciones lineales. Para ello definamos primero este último espacio.

Definición 4.6. *Sea U, V espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, de dimensiones $\dim U = p$ y $\dim V = q$ respectivamente.*
Definimos

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(U, V) = \{T : U \to V / T \text{ es transformación lineal } \}$$

Es directo que $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(U, V)$, dotado de las operaciones: $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(U, V)$

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x), \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall T \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(U, V)$$
$$(T + T')(x) = T(x) + T'(x), \ \forall T, T' \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(U, V)$$

es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Tenemos entonces la propiedad buscada:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(U,V) \cong M_{qp}(\mathbb{K})$$

En efecto, sean β_U, β_V bases de U y V respectivamente y definamos la función.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(U,V) &\to M_{qp}(\mathbb{K}) \\ T &\to \varphi(T) = M_{\beta_U\beta_V}(T) \end{aligned}$$

Es decir, a una transformación lineal arbitraria le asociamos su matriz representante con respecto a las bases β_U y β_V.

1. φ es una transformación lineal. Sean $\beta_U = \{u_1, ..., u_p\}, \beta_V = \{v_1, ..., v_q\}$, $T, L \in \mathcal{L}_K(U,V)$, $A = M_{\beta_U\beta_V}(T), B = M_{\beta_U\beta_V}(L)$.

   Calculemos $\varphi(T+L) = M_{\beta_U\beta_V}(T+L)$.

   $$\begin{aligned} (T+L)(u_j) &= T(u_j) + L(u_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{q} a_{ij}v_i + \sum_{i=1}^{q} b_{ij}v_i = \sum_{i=1}^{q}(a_{ij}+b_{ij})v_i \end{aligned}$$

   Luego, la j-ésima columna de $M_{\beta_U\beta_V}$ es el vector:

   $$\begin{pmatrix} a_{1j}+b_{1j} \\ \vdots \\ a_{qj}+b_{qj} \end{pmatrix} = A_{\bullet j} + B_{\bullet j}$$

   Se concluye entonces:

   $$\varphi(T+L) = M_{\beta_U\beta_V}(T+L) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}...a_{1j}+b_{1j}...a_{1p}+b_{1p} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{q1}+b_{q1}...a_{qj}+b_{qj}...a_{qp}+b_{qp} \end{pmatrix}$$

   $$= A + B = M_{\beta_U\beta_V}(T) + M_{\beta_U\beta_V}(L) = \varphi(T) + \varphi(L)$$

   De manera análoga se prueba que

   $$\varphi(\lambda T) = M_{\beta_U\beta_V}(\lambda T).$$

2. φ es biyección. Sean $T \in Ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(T) = M_{\beta_U\beta_V}(T) = 0 \in M_{qp}(\mathbb{K})$

   $$\Leftrightarrow T(u_j) = 0v_1 + ... + 0v_q = 0.$$

   Por otra parte, $\forall u \in U, u = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j u_j$, de donde $\forall u \in U, T(u) = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j T(u_j) = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j 0 = 0$, concluyendo $T \equiv 0$, la transformación nula. Luego, φ es inyectiva. Veamos la epiyectividad. Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{qp}(\mathbb{K})$, le asociamos la transformación lineal T, que a la base de U asocia: $T(u_j) = \sum\limits_{i=1}^{q} a_{ij}v_i$. Es directo que $\varphi(T) = M_{qp}(T) = A$, luego φ es epiyectiva. De (1) y (2) concluímos que φ es un isomorfismo.

Directamente, de este resultado se tiene: $\dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(U, V) = \dim M_{qp}(\mathbb{K}) = pq = \dim U \dim V$.

Es decir, la dimensión del espacio de transformaciones lineales es *finita* y corresponde al producto de las dimensiones de U y V.

En el contexto del resultado anterior ¿que relación existe entre la multiplicación de matrices y la composición de funciones lineales?.
Veamos que sucede al componer dos transformaciones lineales. Sean $T : U \to V$, $L : V \to W$ transformaciones lineales, luego $L \circ T : U \to W$ es también lineal. Ahora bien, sean $dimU = p, dimV = q, dimW = r$ con bases $\beta_U = \{u_i\}_{i=1}^{p}, \beta_V = \{v_i\}_{i=1}^{q}, \beta_W = \{w_i\}_{i=1}^{r}$, respectivamente. Supongamos además que $M_{\beta_U \beta_V}(T) = B \in M_{qp}(\mathbb{K})$,
$M_{\beta_U \beta_V}(L) = A \in M_{pr}(\mathbb{K})$. La pregunta es ¿cuál es la expresión de $M_{\beta_U \beta_W}(L \circ T)$? Los "datos" del problema son:

$$T(u_k) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk} v_j \qquad 1 \leq k \leq p$$
$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} w_i \qquad 1 \leq j \leq q$$

Calculemos ahora:

$$\begin{aligned}
(L \circ T)(u_k) = L(T(u_k)) &= L(\sum_{j=1}^{q} b_{jk} v_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{q} b_{jk} L(v_j) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk} (\sum_{i=1}^{r} a_{ij} w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} (\sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk}) w_i \qquad 1 \leq k \leq p
\end{aligned}$$

obteniendo

$$M_{\beta_U \beta_W}(L \circ T) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{q} a_{1j} b_{j1} \ldots \sum\limits_{j=1}^{q} a_{1j} b_{jp} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{q} a_{rj} b_{j1} \ldots \sum\limits_{j=1}^{q} a_{rj} b_{jp} \end{pmatrix}$$

$$= A \cdot B = M_{\beta_V \beta_W}(L) \cdot M_{\beta_U \beta_V}(T)$$

Hemos probado que la matriz representante de la composición de dos funciones lineales $L \circ T$, es el producto de las matrices representantes.

Una aplicación inmediata de este resultado es

◀ Ejercicio

Ejercicio 4.3: $T : U \to V$ es una transformación lineal y β, β' son bases de U y V respectivamente entonces

1. T es invertible ssi $M_{\beta\beta'}(T)$ es una matriz invertible.
2. Si T es invertible,
$$(M_{\beta\beta'}(T))^{-1} = M_{\beta'\beta}(T^{-1}).$$

Esto nos permite, cuando se estudian transformaciones lineales sobre espacios vectoriales de dimensión finita, trabajar directamente en la estructura matricial correspondiente, sumando o multiplicando matrices.

En base a lo anterior se tiene el resultado siguiente:

Teorema 4.5. *Para toda matriz $A \in M_{nn}(\mathbb{K})$, las propiedades siguientes son equivalentes*

1. *A es invertible.*
2. *$T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, v \to T_A(v) = Av$ es un isomorfismo.*
3. *El conjunto $\{A\bullet j\}_{j=1}^n$ es base de $\mathbb{K}^n$.*

Demostración. Demostremos primero (2)⇔(3). Para ello recordemos que A es la matriz representante de T_A con respecto a las bases canónicas: $T_A(e_j) = Ae_j = A\bullet j$.

$2 \Rightarrow 3$) Como T_A es isomorfismo, es en particular inyectiva, luego $\{T_A(e_j)\}_{j=1}^n$ es $\ell.i \Leftrightarrow \{A_{\bullet j}\}_{j=1}^n$ es $\ell.i$ en $\mathbb{K}^n$. Como $\dim \mathbb{K}^n = n$, este conjunto es base.

$3 \Rightarrow 2$) Sabemos $A_{\bullet j} = T_A(e_j)$ para $1 \le j \le n$, luego $\{A_{\bullet j}\}_{j=1}^n$ base, es decir $\{T_A(e_j)\}_{j=1}^n$ es base de $\mathbb{K}^n$, luego $ImT_A =< \{T_A(e_j)\} >= \mathbb{K}^n$. Del TNI se tiene:

$$\dim \mathbb{K}^n = n = \dim ImT_A + dimKerT_A, \text{ luego } n = n + \dim KerT_A,$$

entonces $\dim KerT_A = 0$ y por lo tanto $KerT_A = \{0\}$.
Además las dimensiones de los espacios de partida y llegada son iguales, luego T_A es isomorfirmo.

(1)⇔(2) es consecuencia del Ejercicio 4.3, usando el hecho de que T_A tiene a A como matriz representante con respecto a las bases canónicas. □

4.8. Matriz de Pasaje o de Cambio de Base

Cuando definimos la matriz representante vimos que esta dependía de las bases elegidas. De esto surge el problema de la no unicidad de la representación: una misma transformación lineal tiene asociada más de una matriz, dependiendo de las bases escogidas.

Sea entonces V un espacio vectorial sobre $K, dimV = n$, sean $\beta = \{v_i\}_{i=1}$ y $\beta' = \{v_i'\}_{i=1}^n$ dos bases de V. Claramente, los vectores de β' tienen una representación única en la base β:

$$\begin{aligned} v_1' &= p_{11}v_1 + p_{21}v_2 + ... + p_{n1}v_n \\ &\vdots \\ v_j' &= p_{1j}v_1 + p_{2j}v_2 + ... + p_{nj}v_n \\ &\vdots \\ v_n' &= p_{1n}v_1 + p_{2n}v_2 + ... + p_{nn}v_n \end{aligned}$$

Denominamos *matriz de pasaje o de cambio de base de* β *a* β' a la matriz:

Matriz de pasaje o de cambio de base

$$P = P_{\beta\beta'} = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{1j} & ... & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & ... & p_{nj} & ... & p_{nn} \end{pmatrix}$$

cuya columna j-ésima corresponde a las coordenadas del vector v_j', de la "nueva" base β', con respecto a la "antigua" base β. Es fácil ver que está matriz es exactamente

$$M_{\beta'\beta}(id_V),$$

es decir la matriz representante de la identidad de V, colocando como base de partida β' y de llegada β.

Por otra parte, sabemos que a un vector $x \in V$ podemos asociarle de manera biunivoca un vector $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, correspondiente a sus coordenadas con respecto a la base β. De manera análoga le podemos asociar $\alpha' = (\alpha_1', ..., \alpha_n') \in \mathbb{K}^n$, sus coordenadas con respecto a la base β'.
Se tiene entonces:

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j' v_j' = \sum_{j=1}^n \alpha_j' (\sum_{i=1}^n p_{ij} v_i) = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n p_{ij} \alpha_j') v_i$$

Pero, además, $v = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i v_i$.
Como la representación es única, concluímos:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \alpha_j' \qquad 1 \leq i \leq n$$

matricialmente: $\alpha = P\alpha'$.

Esta ecuación establece la relación entre las coordenadas de un mismo vector $v \in V$ con respecto a ambas bases.

¿Es posible "despejar" α'?. Sí lo es, y esto es equivalente a probar que P es invertible. Pero por ser la matriz representante de un isomorfísmo es entonces invertible. Además P^{-1} es la matriz de cambio de base de β' a β: $M_{\beta\beta'}(id_V)$.

Observación: Cabe hacer notar que la notación no es muy afortunada, pues la matriz de cambio de base de β a β' es $M_{\beta'\beta}(id_V)$ es decir hay que expresar los vectores de β' en función de los de β.

Estudiaremos ahora la relación que existe entre las distintas matrices representantes de una misma transformación lineal. Esto lo deduciremos de la regla que tenemos para la matriz representante de una composición de aplicaciones lineales. Sea $T : U \to V$ lineal y consideremos cuatro bases:

$$\beta,\ \tilde{\beta} \text{ bases de } U$$

$$\beta',\ \tilde{\beta}' \text{ bases de } V.$$

La pregunta es ¿cómo se relacionan $M_{\beta\beta'}(T)$ y $M_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}(T)$?.
Todo sale de la observación

$$id_V \circ T \circ id_U = T,$$

y por lo tanto

$$M_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}(T) = M_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}(id_V \circ T \circ id_U) = M_{\beta'\tilde{\beta}'}(id_V) M_{\beta\beta'}(T) M_{\tilde{\beta}\beta}(id_U). \tag{4.4}$$

Es decir la nueva matriz representante de T es la antigua multiplicada por matrices de cambio de base. La mejor forma de recordar esto es con un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & U, \tilde{\beta} & \overset{T}{\longrightarrow} & V, \tilde{\beta}' & \\ id_U & \big\downarrow & T & \big\uparrow & id_V \\ & U, \beta & \longrightarrow & V, \beta' & \end{array}$$

Recorremos este diagrama de dos maneras distintas. para obtener la fórmula 4.4. Notemos que cuando hacemos el recorrido por "abajo" el orden que aparecen las matrices es reverso: la matriz más a la derecha en 4.4 es la que actua primero y así sucesivamente.
Las matrices $A = M_{\beta\beta'}(T)$ y $B = M_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}(T)$ están relacionadas por un par de matrices invertibles que denotaremos por P, Q:

$$C = PAQ.$$

Diremos que entonces A y C son **semejantes**. Como ejercicio, probar que esta es una relación de equivalencia. Un caso importante es cuando $Q = P^{-1}$, es decir

matrices semejantes

◀ Ejercicio

$$C = PAP^{-1}.$$

En este caso especial diremos que A y C son **similares**. Esta también es una relación de equivalencia.

matrices similares

Se tiene que a diferencia de la semejanza no es fácil saber cuándo dos matrices son similares. Parte de este problema la estudiaremos en el próxima sección.