

LOIS DE PROBABILITE à DENSITE

I. Loi binomiale

1) Loi de Bernoulli:

Soit E une expérience aléatoire présentant deux issues: l'une S que l'on appelle "succès" de probabilité p et l'autre \bar{S} appelée "échec" de probabilité $q = 1 - p$.

a) Définition:

La variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelé variable de Bernoulli.

La loi de probabilité de cette variable X est appelée loi de Bernoulli.

| | | |
|--------------|-------|-----|
| x_i | 0 | 1 |
| $P(X = x_i)$ | $1-p$ | p |

b) Propriétés:

| | | |
|--------------|-------------------------------|---------------------------------|
| • $E(X) = p$ | • $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$ | • $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$ |
|--------------|-------------------------------|---------------------------------|

2) Loi binômiale:

a) Définition:

On répète n fois et de manière indépendante une même expérience qui présente deux issues S et \bar{S} de probabilités respectives p et $q = 1 - p$.

La loi de probabilité de la variable X égale au nombre de succès au cours de ces n expériences s'appelle loi binomiale de paramètre n et p .

Exemple:

On lance un dé bien équilibré 10 fois de suite, et on s'intéresse au nombre X de fois où l'on obtient un multiple de 3. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$.

b) Propriété:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p .

Alors, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

En effet...

Dans l'exemple précédent, la probabilité d'obtenir exactement 4 multiples de 3 parmi les 10 lancers est :

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{210 \times 64}{3^{10}} \approx 0,2276$$

c) Propriétés (admisses):

| | | |
|---------------|----------------|----------------------------|
| • $E(X) = np$ | • $V(X) = npq$ | • $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ |
|---------------|----------------|----------------------------|

d) Exemples:

- Une étude statistique portant sur plusieurs années a montré que, dans une certaine population, la fréquence de naissance d'une fille est 0,45. On suppose que le sexe d'un enfant à la naissance ne dépend pas du sexe de l'enfant précédent. On s'intéresse au nombre de filles dans les familles de 5 enfants.
 - Etudier la loi de probabilité de la variable X égale au nombre de filles dans ces familles.
 - Quelle est la valeur de X la plus probable dans ces familles?
 - Calculer $E(X), V(X), \sigma(X)$.

- Une personne joue au loto chaque semaine pendant 10 ans.
Quelle est la probabilité que cette personne obtienne au moins une fois les 6 bons numéros?
Exactement 5 fois?