01005 - Matematik 1

GPS beregninger

Gruppe: GPS 1
Forfattere: Daniel Safari, Mohammad Filfil, Mads F. Madsen, Jonathan Taylor, Martin Maunsbach, Troels M. Folke

Tecnical University of Denmark DTU
Department of Information and Mathematics
01005 - Matematik 1
April 2014

Forfattere

Navn: ________________ Underskrift: ________________ Studienummer: s134110

Navn: ________________ Underskrift: ________________ Studienummer: s134094

Navn: ________________ Underskrift: ________________ Studienummer: s134109

Navn: ________________ Underskrift: ________________ Studienummer: s134861

Navn: ________________ Underskrift: ________________ Studienummer: s134069

Navn: ________________ Underskrift: ________________ Studienummer: s134061

Resume

Denne rapport vil beskæftige sig med hovedtrækkene i matematikken bag GPS - Global Positioning System - som er et amerikanskudviklet satellitbaseret navigationssystem, der dækker størstedelen af jordens overflade. Mere specifikt vil der blive redegjort for de ligninger der bruges til positionsbestemmelse, og hvordan de kan løses på forskellig vis - bl.a. vha. Gauss-Newtons metode og mindste kvadraters metode.

Forord

Alle i gruppen har samarbejdet om at løse de obligatoriske opgaver i køreplanen samt skrevet rapporten. Symboler der i rapporten repræsenterer matricer, er skrevet med fed skift.

Indhold

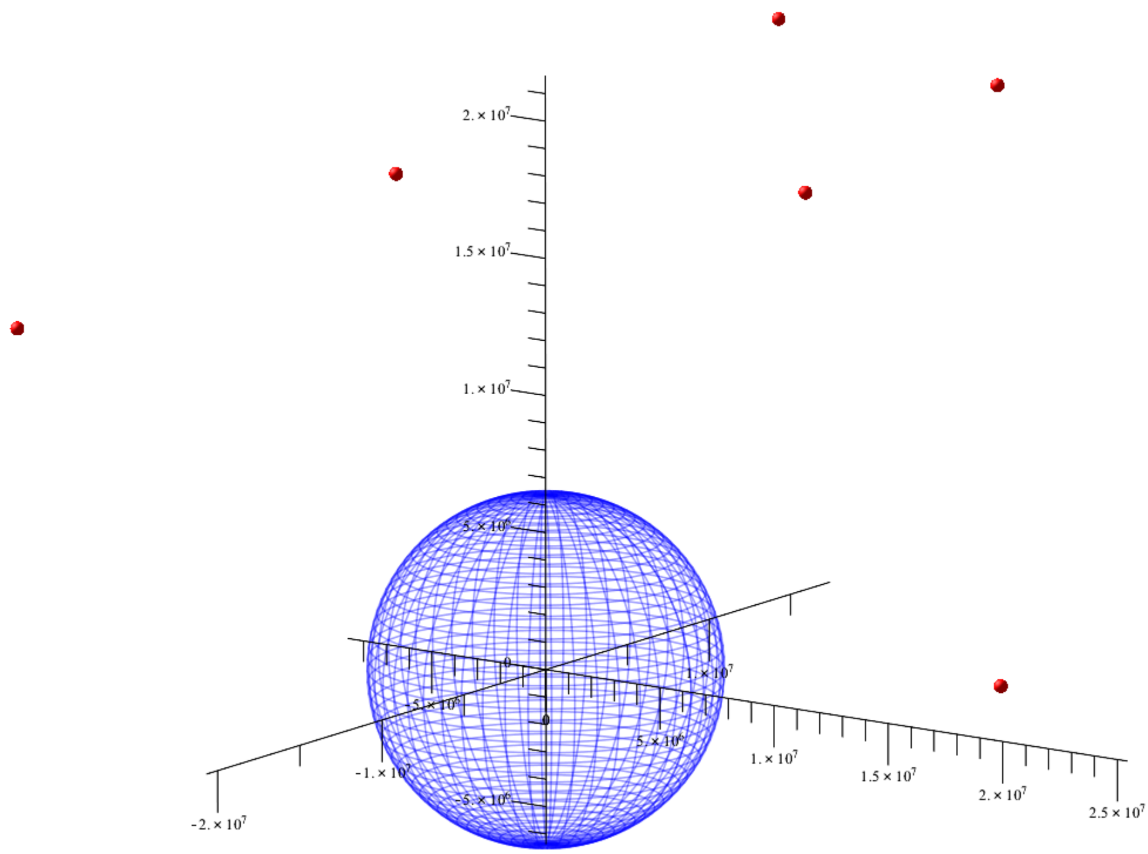
1 Introduktion og problemformulering

Formålet med denne rapport er at undersøge matematikken bag positionsbestemmelse via GPS. Først vil det basale koncept bag GPS-positionsbestemmelse blive introduceret, herunder det anvendte koordinatsystem. Dernæst det system af ligninger, som beskriver sammenhængen mellem modtagerens position og satellitternes positioner og hvordan disse ligninger linenriseres. Herefter introduceres Gauss-Newtons metode, som er en måde at løse ligningssystemet på, og senere udvides metoden i form af mindste kvadraters metode, som muliggør en mere præcis løsning ved brug af mange satellitter.

2 System af ligninger for beregning af position

2.1 Koordinatsystem anvendt i GPS-systemet

GPS-systemet anvender et 3-dimensionelt kartesisk koordinatsystem, hvor origo er placeret i jordens centrum. En række satellitter bevæger sig i baner rundt om jorden, og sender periodisk et signal ned mod Jorden, som indeholder satellittens koordinater samt tidspunktet for afsendelsen af signalet. Signalet modtages af en GPS-navigationsenhed et sted på Jorden efter en tidsforskinkelse, der er en funktion af afstanden fra modtageren til satelliten.



Figur 1: Jorden samt 6 omkredsende satellitter plottet i 3-dimensionelt kartesisk koordinatsystem.

2.2 Ligning for afstand til satellit

GPS-navigationsenheden på jordoverfladen udregner forsinkelsen på signalet ved at registrere tidspunktet for modtagelsen af GPS-signalet, og fratrække tidspunktet for afsendelsen. Herefter kan afstanden til satelitten beregnes ved at gange med lysets hastighed i vakuum (da radiosignaler udbredes med denne hastighed). Imidlertid er modtagerens ur ikke helt synkroniseret med satellitens ur, hvorfor den udregnede afstand bliver unøjagtig. Den kaldes derfor en pseudoafstand. Det følger heraf, at den sande afstand er pseudoafstanden fratrukket afstandsfejlen:

$$P_s = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2} + w \tag{1}$$

Her er P_s pseudoafstanden, kvadratrodsudtrykket afstanden til satellitten, (x, y, z) GPS-navigationsenhedens koordinater, (x_s, y_s, z_s) satellittens koordinater og $w = c \cdot dT$ afstandsfejlen, som, fordi den skyldes fejlen på modtagerens ur dT i forhold til satellitten, fremover benævnes "urfejlen". Konstanten c er lysets hastighed i vakuum.

2.3 System af afstandsligninger

For at kunne bestemme modtagerens position og urfejl, skal en entydig løsning (x, y, z, w) til et system af 4 afstandsligninger med 4 ubekendte findes:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} + w \\
P_2 &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} + w \\
P_3 &= \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2} + w \\
P_4 &= \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2} + w
\end{aligned} \tag{2}$$

Her antages det, at urfejlen w ift. hver satellit er den samme, og dermed at satellitternes ure er perfekt synkroniserede.

3 Løsning ved Gauss-Newton metoden

3.1 Linearisering af afstandsligninger

Hver af ligningerne i (2) kan lineariseres ved at finde de tilhørende approximerede taylorpolynomier af højst første grad. For det generelle tilfælde (1) fås[1]:

$$\begin{aligned}
P_s = \frac{(x_0 - x_s)x}{d_s} + \frac{(y_0 - y_s)y}{d_s} + \frac{(z_0 - z_s)z}{d_s} + w + d_s \\
- \frac{x_0(x_0 - x_s) - y_0(y_0 - y_s) - z_0(z_0 - z_s)}{d_s}
\end{aligned} \tag{3}$$

hvor $d_s = \sqrt{(x_0 - x_s)^2 + (y_0 - x_s)^2 + (z_0 - z_s)^2}$ er den sande afstand fra udviklingspunktet (x_0, y_0, z_0) til satellitten (x_s, y_s, z_s) mens (x, y, z) er modtagerens position. Jo større afstand mellem punkterne (x_0, y_0, z_0) og (x, y, z) des mindre nøjagtig er approximeringen af P_s. Bemærk desuden at w_0 ikke indgår i Taylor-approksimationen. Årsagen til dette

[1]Ved brug af Maple-kommandoen mtaylor(lign, 2), hvor lign er ligningen (1)

findes i at w kun optræder i et førstegrads led i lign (1). Dette førstegradsled forbliver uændret igennem førstegrads Taylor-approksimationer, da $f(w_0) + f'(w_0)(w - w_0) = w_0 - w_0 + w = w$, hvilket giver mening da en lineær funktion kan findes blot ved at kende et punkt, $f(w_0)$, og hældningen, $f'(w_0)$.

3.1.1 Konkret tilfælde

For eksemplets skyld opstilles taylorpolynomiet for en konkret satellitposition og pseudoafstand. Som udviklingspunkt benyttes $(x_0, y_0, z_0) = (3504300, 780800, 5252100)$, som kan være det sted modtageren sidst befandt sig da den var tændt.

Tabel 1: Satellit positioner og pseudoafstande

Satellit nummer	X_s meter	Y_s meter	Z_s meter	Pseudoafstand meter
4	4396623.907	-15219512.421	21395963.449	22745185
14	12508988.544	10190642.686	21073725.487	20490898
16	15690450.142	-6024729.548	20505506.585	20673780
18	25180700.379	-7388281.420	4051959.985	23193809
24	-8441248.473	-20422306.240	15063403.391	26237952
25	-2062043.991	17167206.349	20373015.170	22979470

For satellit nr. 4 i tabel 1 ser det således ud:

$$P_4 = 22745185 = -0.03922802906x + 0.7034000947y - 0.7097108347z + w + 26062824.44 \tag{4}$$

3.2 System af lineære afstandsligninger

Der findes ingen entydig løsning til en enkelt ligning af typen (3). Ej heller til et system af 2 eller 3 af sådanne ligninger, da man altid vil opnå mindst 1 fri parameter grundet de 4 ubekendte i hver ligning. En modtager kan altså ikke bestemme sin position, hvis den har mindre end 4 satellitter til rådighed. Har man et system af 4 af ligninger af typen (3), vil man til gengæld godt kunne opnå en entydig løsning i de tilfælde hvor rækkerne/søjlerne i systemets koefficientmatrix (5) er lineært uafhængige[2] og systemet ikke er inkonsistent.
I de tilfælde hvor man har flere end 4 ligninger, vil de ekstra ligninger enten være overflødige eller medføre at ligningssystemet bliver inkonsistent.
Et ligningssystem bestående af 4 ligninger af typen (3) vil have følgende koefficientmatrix $\mathbf{A}$ og højreside $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{x_0-x_1}{d_1} & \frac{y_0-y_1}{d_1} & \frac{z_0-z_1}{d_1} & 1 \\ \frac{x_0-x_2}{d_2} & \frac{y_0-y_2}{d_2} & \frac{z_0-z_2}{d_2} & 1 \\ \frac{x_0-x_3}{d_3} & \frac{y_0-y_3}{d_3} & \frac{z_0-z_3}{d_3} & 1 \\ \frac{x_0-x_4}{d_4} & \frac{y_0-y_4}{d_4} & \frac{z_0-z_4}{d_4} & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

[2]For en kvadratisk matrix $\mathbf{M}$ gælder, at $Rang(\mathbf{M}^T) = Rang(\mathbf{M})$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} P_1 - d_1 + \frac{x_0(x_0-x_1)+y_0(y_0-y_1)+z_0(z_0-z_1)}{d_1} \\ P_2 - d_2 + \frac{x_0(x_0-x_2)+y_0(y_0-y_2)+z_0(z_0-z_2)}{d_2} \\ P_3 - d_3 + \frac{x_0(x_0-x_3)+y_0(y_0-y_3)+z_0(z_0-z_3)}{d_3} \\ P_4 - d_4 + \frac{x_0(x_0-x_4)+y_0(y_0-y_4)+z_0(z_0-z_4)}{d_4} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Det kunne være af interesse at finde ud af hvad rækkerne i $\mathbf{A}$ repræsenterer. Sættes de tre første elementer i en given række fra $\mathbf{A}$ ind i en rækkevektor, så fås følgende:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_0-x_s}{d_s} & \frac{y_0-y_s}{d_s} & \frac{z_0-z_s}{d_s} \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\begin{bmatrix} x_0 - x_s & y_0 - y_s & z_0 - z_s \end{bmatrix}}{d_s}$$

Dette ses til at være den normerede retningsvektor fra en given satellits koordinat $\mathbf{x}_s$ til udviklingspunktet $\mathbf{x}_0$. Det bemærkes desuden at hvis retningsvektorene til udviklinspunktet er lineært afhængige, så er $\mathbf{A}$ ikke en regulær matrix, og så kan en entydig løsning til ligningssystemet ikke findes.

3.2.1 Konkret tilfælde

For eksemplets skyld bestemmes positionen for en GPS-modtager ved brug af de i tabel 1 givne positioner og pseudoafstande for satellitterne 4, 14, 16 og 18, samt udviklingspunktet $(x_0, y_0, z_0) = (3504300, 780800, 5252100)$. Da fås følgende ligningssystem og løsning:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} -0.03922802906 & 0.7034000947 & -0.7097108347 & 1 \\ -0.4394081938 & -0.4591787892 & -0.7720591167 & 1 \\ -0.5893952657 & 0.3291562018 & -0.7377461728 & 1 \\ -0.9345007536 & 0.352180833 & 0.05173975975 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22745185 - 26062824.44 \\ 20490898 - 26446040.91 \\ 20673780 - 2.6358813.12 \\ 23193809 - 2.5923747.15 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} -0.03922802906 & 0.7034000947 & -0.7097108347 & 1 \\ -0.4394081938 & -0.4591787892 & -0.7720591167 & 1 \\ -0.5893952657 & 0.3291562018 & -0.7377461728 & 1 \\ -0.9345007536 & 0.352180833 & 0.05173975975 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3317639.44 \\ -5955142.91 \\ -5685033.12 \\ -2729938.15 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3504309.91556677 \\ 780753.455617549 \\ 5252120.17318390 \\ -1867.73136058338 \end{bmatrix} \tag{7}$$

GPS-modtagerens position er oplyst på forhånd til at være:

$$(x, y, z) = (3504320.6, 780753.5, 5252128.8) \tag{8}$$

og urfejlen $w = 0$.
Forskellen på løsningen $\mathbf{x}$ til (7) og den rigtige position kan da beregnes:

$$\begin{aligned} &(3504309.91556677, 780753.455617549, 5252120.17318390, -1867.73136058338) \\ &-(3504320.6, 780753.5, 5252128.8, 0) \\ &= (-10.6910625291057, -0.0420867708744481, -8.61894766986370, -1867.73136058338) \end{aligned} \tag{9}$$

Dette viser at den beregnede $\mathbf{x}$-koordinat ligger 10.7 meter fra den egentlige $\mathbf{x}$-position. Tilsvarende ligger de beregnede $\mathbf{y}$- og $\mathbf{z}$-koordinater 4 centimeter og 8.6 meter fra de egentlige positioner, henholdsvis.

Bruges Maple's solve-funktion til at løse det tilsvarende ikke-lineære ligningssystem (2) for x, y, z og w, fås:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3504309.91544562 \\ 780753.446531752 \\ 5252120.18868347 \\ -1867.71885532711 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Denne løsning er stort set identisk med løsningen fundet til det lineariserede system (7). Ulempen ved at løse det ikke lineære ligningssystem med Maple, er at det tager længere tid for computeren at udregne ift. løsnigen af det lineariserede system.

3.3 Iterering

For at positionen fundet ved løsning af det lineariserede system er tilstrækkeligt nøjagtig, så kræves det at udviklingspunktet er tæt på løsningen til det ikke lineære ligningssystem. Er dette ikke tilfældet fås en løsning, der er langt fra den sande værdi. Anvendes f.eks. jordens centrum, $(0, 0, 0)$, som udviklingspunkt, så fås følgende forskelle mellem løsningen $\mathbf{x}$ til det lineariserede system og den løsning til det ikke lineære system som Maple's `solve` funktion kommer med:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_{solve} = \begin{bmatrix} 7.63 \cdot 10^5 \\ 1.90 \cdot 10^5 \\ 1.11 \cdot 10^6 \\ 1.39 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

Hvilket ses ikke at være tilfredsstillende.
Den fundne løsning $\mathbf{x}$ ligger dog tættere på $\mathbf{x}_{solve}$ end det tidligere udviklingspunkt, hvilket betyder at denne kan bruges som et nyt udviklingspunkt for et nyt lineariseret system. Gentagelser af denne process er princippet i Gauss-Newton metoden [3]. Anvendes

[3] Se bilag 1 for implementation af denne i Maple

metoden med Jordens centrum som initial-udviklingspunkt, så fås følgende værdier af af $\mathbf{x} - \mathbf{x}_{solve}$ ved 5 iterationer (gentagelser af processen):

$$\mathbf{x}_{1.grad} - \mathbf{x}_{solve} = \overset{1}{\begin{bmatrix} 7.63 \cdot 10^5 \\ 1.90 \cdot 10^5 \\ 1.11 \cdot 10^6 \\ 1.39 \cdot 10^6 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{2}{\begin{bmatrix} 28023 \\ 9246 \\ 39594 \\ 52714 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{3}{\begin{bmatrix} 34 \\ 18 \\ 49 \\ 66 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{4}{\begin{bmatrix} 0.169 \\ -0.274 \\ 0.641 \\ 0.732 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{5}{\begin{bmatrix} -2.012 \\ -0.889 \\ -0.282 \\ -1.097 \end{bmatrix}} \tag{11}$$

Det kan måske virke lidt forvirrende at der efter den fjerde iteration ikke er opnået en løsning $\mathbf{x}$ der er tættere på Maple's `solve`-løsning i forhold til den forrige iteration. Årsagen til dette viser sig at være præcisionen hvormed det brugte regneprogram, i dette tilfælde Maple, kan udføre beregningerne. De ovenstående iterationer er udført ved en præcision på 8 cifre, hvilket er tilstrækkeligt til at indeholde udviklingspunktet `(3504300, 780800, 5252100)`, men ikke nok til at indeholde satellitternes koordinater. Bruges f.eks. satellit nr. 14 ses det at satellittens koordinater `(12508988.544, 10190642.686, 21073725.487)`, afrundes til `(12508988, 10190642, 21073725)`. Yderligere bemærkes det at retningsvektorene til udviklingspunktet, som udgør en essentiel del af problemet, også bliver afrundet, da $\frac{\begin{bmatrix} x_0 - x_s & y_0 - y_s & z_0 - z_s \end{bmatrix}}{d_s}$ er en division mellem, i dette tilfælde, to 8-cifrede tal. Resultatet af denne division kan ikke vises med tilfredsstillende præcision med et 8-cifret tal. Ændres antallet af cifre regneprogramet arbejder med til 11, så foretages ingen afrunding af satellitternes positioner, og der fås ligeledes en større præcision af de essentielle retningsvektorer. Ved genberegning af (11) med 11 cifre fås følgende:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_{solve} = \overset{1}{\begin{bmatrix} 7.63 \cdot 10^5 \\ 1.90 \cdot 10^5 \\ 1.11 \cdot 10^6 \\ 1.39 \cdot 10^6 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{2}{\begin{bmatrix} 28023 \\ 9246 \\ 39597 \\ 52714 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{3}{\begin{bmatrix} 36 \\ 17 \\ 51 \\ 68 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{4}{\begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.001 \\ -0.001 \\ -0.000 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{5}{\begin{bmatrix} -0.01 \\ 0.000 \\ -0.000 \\ -0.001 \end{bmatrix}} \tag{12}$$

Hvormed den fundne løsning $\mathbf{x}$ ses at komme meget tættere på Maples løsning til det ikke lineære ligningssystem end tidligere. Da disse beregninger normalt laves af en computer kunne det være af interesse at finde et stopkriterie for disse iterationer. Et sådant må nødvendigvis tage udgangspunkt i forskellen på løsningen fundet ved den nuværende iteration og den fundet ved den forrige. Da det oprindelige ikke lineære ligningssystem (2) ikke tager højde for en række fænomener[4] der forekommer i praksis, vil der altid være en forskel på en GPS-modtagers sande position $\mathbf{x}_{sand}$ og løsningen til ligningssystemet $\mathbf{x}_{solve}$. Ved brug af de fire første satelitter i tabellen til beregning af position er forskellen f.eks:

$$\mathbf{x}_{sand} - \mathbf{x}_{solve} = \begin{bmatrix} 10.66 \\ 0.057 \\ 8.60 \end{bmatrix}$$

Et stopkriterie skal tage højde for dette, så man undgår unødige iterationer. F.eks. kan det være:

> *Er distancen mellem $\boldsymbol{x}$ fundet ved den nuværende og forrige iteration mindre end 1 meter, så stop iterationerne*

[4]F.eks. at satelitterne aldrig oplyser deres positioner helt nøjagtigt

Bruges et udviklingspunkt der er tæt på den rigtige position, f.eks (3504300, 780800. 5252100), så ses det f.eks. at resultatet ikke kommer tættere på den sande position uanset antallet af iterationer.

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_{sand} = \overset{1}{\begin{bmatrix} -10.662 \\ -0.058 \\ -8.597 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{2}{\begin{bmatrix} -10.662 \\ -0.058 \\ -8.597 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{3}{\begin{bmatrix} -10.662 \\ -0.058 \\ -8.597 \end{bmatrix}} \tag{13}$$

4 Løsning ved mindste kvadraters metode

I afsnit 3.2 anvendes et system af fire lineære afstandsligninger til beregning af en GPS-modtagers position med den antagelse, at hver satellits oplyste position, (x_s, y_s, z_s), er nøjagtig; denne antagelse holder som bekendt ikke i praksis. Derfor er det ønskeligt at anvende mere end fire afstandsligninger, og så finde den løsning $\mathbf{x}$ der bedst opfylder dem alle. Ønskes flere end fire satellitter benyttet kan samme fremgangsmåde som i (2) ikke bruges, da der så ville haves seks ligninger med fire ubekendte. En metode til at udnytte *mere* end fire satellitter kunne være at finde en løsning $\mathbf{x}$ til det lineære ligningssystem for enhver kombination af de tilgængelige satellitter, hvorefter gennemsnittet tages af de fundne løsninger $\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$,$\mathbf{x}_3 \dots \mathbf{x}_k$:

$$k = \binom{n}{4} \tag{14}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \cdots + \mathbf{x}_k}{k} \tag{15}$$

Hvilket i scenariet med de 6 satellitter i tabellen giver følgende:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3504317.7 \\ 780749.57 \\ 5252139.43 \\ -1848.96 \end{bmatrix}$$

Når gennemsnittet af adskillige positioner bruges er det en selvfølge at den beregnede distance til de individuelle satellitter, givet ved $\sqrt{x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$, ikke længere har samme værdi som den urfejlskorrigerede pseudodistance $P_i - w_i$. Forskellen mellem disse størrelser kaldes et residual:

$$R_i = (P_i - w_i) - \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \tag{16}$$

Hvilket svarer til følgende lineære udtryk:

$$R_i \approx \mathbf{b}_i - \mathbf{A}_i\mathbf{x}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \approx \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{17}$$

Residualerne for $\bar{\mathbf{x}}$ findes vha. ligning (16) til at være:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.07 \\ -2.26 \\ 1.30 \\ -11.10 \\ 2.42 \\ -4.58 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Der kunne eventuelt defineres en funktion af residualerne, der fortæller noget om godheden af det fundne koordinatsæt. F.eks. kunne summen af de absolute værdier for residualerne bruges:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_i^n |R_i| \tag{19}$$

Dette mål for de fundne koordinaters kvalitet bemærkes at være utilstrækkeligt, da det faktum, at residualet hørende til satellit 16 (R_4) er dispropotionelt stort, ikke bliver repræsenteret af funktionsværdien. Siden det må antages at alle satellitterne har samme nøjagtighed, så må det ønskes at et givet residual R_i vægtes tungere, desto større det er. Dette kan f.eks. gøres ved at kvadrere alle led i summen således:

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_i^n R_i^2 \tag{20}$$

Tages der udgangspunkt i den lineære approksimation af residualerne fra ligning (17), kan følgende omskrivning foretages:

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_i^n R_i^2 \approx \mathbf{R}^T\mathbf{R} = (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \tag{21}$$

Nu haves et lineært udtryk for kvaliteten af en løsning $\mathbf{x}$, hvilket kan bruges til at finde den løsning, der har den største kvalitet.
Der ønskes altså bestemt en værdi af $\mathbf{x}$ således at $\phi(\mathbf{x})$ antager den mindst mulige værdi.

4.1 Minimering af residualer

For at minimere $\phi(\mathbf{x})$ skal de stationære punkter først bestemmes. Dette gøres ved at løse ligningen $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Først skal et udtryk for $\nabla\phi(\mathbf{x})$ imidlertid udledes. Funktionen $\phi(\mathbf{x})$ (21) kan skrives som summen af de kvadrerede residualer:

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (b_i - x_1A_{i1} - x_2A_{i2} - x_3A_{i3} - x_4A_{i4})^2 \tag{22}$$

Heraf følger[5]:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(\mathbf{x}) = 2\sum_{i=1}^n (x_1A_{i1} + x_2A_{i2} + x_3A_{i3} + x_4A_{i4} - b_i)A_{ij} \tag{23}$$

hvor $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, afhængig af hvilken variabel der differentieres med hensyn til. Dette kan skrives på matrixform således:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(\mathbf{x}) = 2[(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^T\mathbf{A}_j] \tag{24}$$

[5]Ved brug af kædereglen for differentiation $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

hvor $\mathbf{A}_j$ er den j'te kolonne i $\mathbf{A}$.
$\nabla\phi(\mathbf{x})$ er en vektor, hvis koordinater er de partielt afledte af $\phi(\mathbf{x})$. Som rækkevektor kan den som følge af (24) skrives som:

$$\begin{aligned}\nabla\phi(\mathbf{x}) &= 2[(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^T\mathbf{A}] \\ &= 2[((\mathbf{Ax})^T-\mathbf{b}^T)\mathbf{A}] \\ &= 2[(\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T-\mathbf{b}^T)\mathbf{A}] \\ &= 2[\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}-\mathbf{b}^T\mathbf{A}]\end{aligned} \tag{25}$$

Herefter kan ligningssystemet $\nabla\phi(\mathbf{x}) = 0$ opskrives:

$$\begin{gathered}\nabla\phi(\mathbf{x}) = 0 \\ \Updownarrow \\ \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}^T\mathbf{A} \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}\end{gathered} \tag{26}$$

4.1.1 Undersøgelse af koefficientmatricen $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$

For at kunne minimere $\phi(\mathbf{x})$ er det nødvendigt at undersøge løsningen $\mathbf{x}$ til (26), hvilket kræver en undersøgelse af koefficientmatricen $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

Først undersøges matricens dimension. Det vides om dimensionen af et givent matrixproduct

$$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \tag{27}$$

at det har lige så mange rækker som M_1 har rækker og lige så mange søjler som M_2 har søjler. Altså kan det siges at produktet af en R_1xC_1 og en R_2xC_2 matrix har størrelsen:

$$R_1\text{x}C_2 \tag{28}$$

Det bemærkes at $\mathbf{A}$ altid har fire søjler, da der konsistent haves fire variable. Det må nødvendigvis betyde, at $\mathbf{A}^T$ har fire rækker, da det at transponere en matrix er at bytte om på rækker og søjler. Heraf ses det $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ er matrixproduktet af to matricer der har følgende dimensioner:

$$\overset{A^T}{4\text{x}n} \cdot \overset{A}{n\text{x}4} = \overset{A^TA}{4\text{x}4} \tag{29}$$

Og dermed at $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ altid er en 4x4 matrix.

Det kan desuden vises, at $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ er en symmetrisk matrix:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}^{T^T} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} \tag{30}$$

Det kan også vises, at koefficientmatricen $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ har fuld rang, og dermed at ligningssystemet (26) har en entydig løsning: Har $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ fuld rang må følgende ligningssystem kun have én løsning, nemlig nulvektoren:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{31}$$

Ganges $\mathbf{v}^T$ på begge sider fås følgende:

$$\mathbf{v}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = 0 \tag{32}$$

Hvoraf følgende kan afledes:

$$\mathbf{v}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{v} = (\mathbf{A}\mathbf{v})^T(\mathbf{A}\mathbf{v}) = |\mathbf{A}\mathbf{v}|^2 = 0 \tag{33}$$

Matrixligningen (33) er kun sand når $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dette er tilfældet når $\mathbf{v}$ er 0-vektoren. Da $\mathbf{A}$ har fuld rang, er det imidlertid *kun* tilfældet når $\mathbf{v}$ er 0-vektoren. Herved er det vist at den eneste løsning til ligningen (33) er nulvektoren, og derved har koefficientmatricen $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, fuld rang. Heraf følger at ligningssystemet (26) har en entydig løsning, og dermed at $\phi(\mathbf{x})$ kun har ét stationært punkt.
Ved at undersøge Hesse-matricen for ϕ i punktet, kan det måske afgøres om der er tale om et minimum for ϕ i punktet. Hesse-matricen kan findes således:

$$H(\phi) = \begin{bmatrix} \nabla\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \nabla\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \nabla\frac{\partial\phi}{\partial z} \\ \nabla\frac{\partial\phi}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla(2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_1\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T)_1\mathbf{b}) \\ \nabla(2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_2\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T)_2\mathbf{b}) \\ \nabla(2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_3\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T)_3\mathbf{b}) \\ \nabla(2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_4\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T)_4\mathbf{b}) \end{bmatrix} \tag{34}$$

Der kigges nu på en enkelt "række", hvoraf følgende observeres:

$$\left[\nabla(2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_i\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T)_i\mathbf{b})\right]$$

Da $(\mathbf{A}^T)_i\mathbf{b}$ blot er en konstant har denne ingen inflydelse når gradienten tages, denne ignoreres allerede nu for illustrative formål.
Nu kan følgende vises:

$$\left[\nabla(2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_i\mathbf{x}\right]$$
$$=$$
$$[\nabla(2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{i1}\mathbf{x}_1 + 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{i2}\mathbf{x}_2 + 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{i3}\mathbf{x}_3 + 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{i4}\mathbf{x}_4)]$$
$$=$$
$$[\nabla(2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{i1}x + 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{i2}y + 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{i3}z + 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{i4}w)]$$

Dennes gradient aflæses direkte til:

$$\left[2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{i1} \quad 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{i2} \quad 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{i3} \quad 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{i4})\right]$$

Dette gøres for hver række og indsættes tilbage i udtrykket for Hesse-matricen i (34):

$$\begin{bmatrix} \nabla(2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_1\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T)_1\mathbf{b}) \\ \nabla(2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_2\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T)_2\mathbf{b}) \\ \nabla(2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_3\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T)_3\mathbf{b}) \\ \nabla(2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_4\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T)_4\mathbf{b}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{11} & 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{12} & 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{13} & 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{14}) \\ 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{21} & 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{22} & 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{23} & 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{24}) \\ 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{31} & 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{32} & 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{33} & 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{34}) \\ 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{41} & 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{42} & 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{43} & 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{44}) \end{bmatrix} = 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$$

Hvis det kan bekræftes, at hesse-matricen i punktet er positiv definit, er der tale om en minimum i punktet. Det er imidlertid tilstrækkeligt at undersøge $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, da hesse-matricen blot er denne matrix ganget med en konstant, hvilket ikke har indflydelse på, om matricen er positiv definit eller ej.
Altså ønskes følgende udtryk at være positivt, i de tilfælde hvor $\mathbf{x}$ ikke er nulvektoren, og 0 i de tilfælde hvor $\mathbf{x}$ er nulvektoren:

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \tag{35}$$

Da det tidligere viste sig at $|\mathbf{A}\mathbf{v}|^2 = 0$ kun har én løsning, nulvektoren, så kan det extrapoleres at $|\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 > 0$ for alle andre vektorer end nulvektoren. $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ er altså positiv definit, og derved er alle dens egenværdier positive
Dermed er hesse-matricen for ϕ positiv definit i ethvert punkt, inklusiv det stationære punkt, der derfor er et minimum.
Løsningen til ligningssystemet (26) er derfor den bedste løsning et system af lineariserede positionsligninger med flere ligninger end variable.

4.2 Iterationer med 6 satellitter

Da der nu haves et lineært ligningssystem til beregning af positionen $\mathbf{x}$, som tager højde for alle seks tilgængelige satellitter, så kan dette bruges som udgangspunktet for den iterative løsningsmetode [6]. Gøres dette fås følgende forskelle fra den på forhånd kendte sande position, givet at jordens centrum bruges som udgangspunkt for iterationerne:

$$\Delta \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \overset{1}{\begin{bmatrix} 493023 \\ 70640 \\ 864316 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{2}{\begin{bmatrix} 8520 \\ -100 \\ 18217 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{3}{\begin{bmatrix} 3.40 \\ -0.67 \\ 8.35 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{4}{\begin{bmatrix} -0.05 \\ -0.02 \\ -0.03 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{5}{\begin{bmatrix} -0.05 \\ -0.02 \\ -0.03 \end{bmatrix}} \tag{36}$$

Det observeres at langt højere præcision end tidligere opnås. Som resultat heraf kan et langt strammer stopkriterie vælges. Ud fra de givne udregninger vælges følgende stopkriterie:

> *Er distancen mellem **x** fundet ved den nuværende og forrige iteration mindre end 20 centimeter, så stop iterationerne*

4.3 Effektivitet af metoder

Ved at løse ligningssystemet (26) for $\mathbf{x}$ ved brug af de givne seks satellitter og ved at iterere indtil stopkritetiet er nået fås følgende værdi af $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3504320 \\ 780753 \\ 5252129 \\ -1857 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Residualerne af denne position kan ved ligning (17) bestemmes til:

$$\begin{bmatrix} -3.824 \\ 1.006 \\ 2.270 \\ -0.837 \\ 2.425 \\ -1.035 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Det noteres at variansen blandt residualerne er stærkt reduceret i forhold til (18), hvilket var formålet med den nye metode.
Differencen mellem de kendte sande koordinater og de beregnede koordinater fundet ved gennemsnittet findes til følgende, givet et fornuftigt antal iterationer:

$$\Delta\mathbf{x}_{gennemsnit} = \begin{bmatrix} -10.650 \\ -0.061 \\ -8.587 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Differencen for $\mathbf{x}$ fundet ved metoden i ligning (26) findes til følgende, ligeledes givet et fornuftigt antal iterationer:

$$\Delta\mathbf{x}_{R^2} = \begin{bmatrix} -0.051 \\ -0.015 \\ -0.025 \end{bmatrix} \tag{40}$$

[6] Se bilag 2 for implementation af dette i Maple

Forskellen mellem den sande position og den beregnede ses at være langt mindre for ligning (26), hvilket er at forvente, da denne tager højde for at satellitterne nok har samme unøjagtighed.

Det kunne måske overvejes om den mere upræcise metode ved at bruge gennemsnittet af de i det givne tilfælde $\binom{6}{4} = 15$ forskellige kombinationer af fire satellitter ud af totalen på seks kunne være den hurtigere metode. Dette er ikke tilfældet. Bruges f.eks. origo som udviklingspunkt skal der ca. fire iterationer af den oprindelige procedure baseret på fire satelitter til per kombination. I tilfældet med 6 satelitter skal i alt $\binom{6}{4} \cdot n_{iterationer} = 15 \cdot 4 = 60$ iterationer foretages! Øges antallet af sete satellitter med 2 til en total på 8 ses metoden baseret på mindste kvadrerede residualer at være næsten uændret, da vores matrixprodukter blot vil tage en smule længere at regne ud, og antallet af iterationer forbliver det samme. Bruges metoden med gennemsnittet når der ses 8 satellitter skal i alt $\binom{8}{4} \cdot n_{iterationer} = 70 \cdot 4 = 280$ iterationer foretages! Metoden med de mindste kvadrerede residualer ses at være den foretrukne hvad angår beregningstid og nøjagtighed.

5 Konklusion

To forskellige metoder til bestemmelse af position ved brug af GPS er blevet undersøgt. Disse er Gauss-Newton-metoden med 4 satellitter og mindste kvadraters metode, hvor sidstnævnte er en udvidelse af førstnævnte, der fører til højere præcision.