

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG MATHEMATIK II

BLATT 4

Aufgabe 1 (Grenzwerte)

(12 Punkte)

Entscheide, ob die Grenzwerte existieren und bestimme sie gegebenenfalls. Der Definitionsbereich D ist jeweils angegeben.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 8x}{x - 2}, D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}, D = [1, \infty) \setminus \{5\}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}, D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right), D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Aufgabe 2 (Stetigkeit)

(8+4 Punkte)

Begründe, ob die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im angegebenen Punkt x_0 stetig ist.

a) $x_0 = 0, f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{für } x > 0 \\ 3x - 4 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$

b) $x_0 = -1, f(x) = \begin{cases} |x - 2| + x^2 & \text{für } x \geq -1 \\ 2x + 6 & \text{für } x < -1 \end{cases}$

Bestimme weiterhin $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f = \begin{cases} \frac{x}{a-2} & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 + b & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

in $x_0 = 1$ stetig ist und $f(-1) = 1$ gilt.

Aufgabe 3 (Stetigkeit)

(12 Punkte)

Entscheide begründet, wo die folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Verwende hierbei die Sätze aus der Vorlesung.

a) $f(x) = \sqrt{|\sin(x^2 - 8x + 2)|} \cdot e^{x-1}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{für } x \in]-\frac{\pi}{2}, \pi[\\ -\sin(x - \frac{\pi}{2}) & \text{für } x \geq \pi \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{|x|}} & \text{für } x \leq -4 \\ x^2 + 3x - 6 & \text{für } x \in]-4, 0[\\ 3^{\lfloor x/2 \rfloor} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

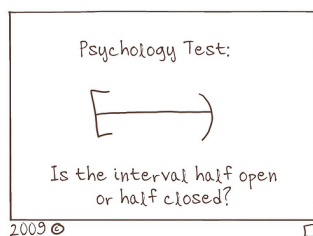
Aufgabe 4 (Bonus)

(2+2+2 Punkte)

Zeige:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}x \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) = \pi$$

Zeige dazu zuerst $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.



Psychology Test
<http://brownsharpie.courtneygibbons.org/?p=1104>

Lösungen ohne Lösungsweg werden nicht bewertet.

Abgabe der Übungen immer mittwochs bis 10:15 Uhr in der Vorlesung oder bis 10:00 Uhr im Postfach B. Dorn (C-Bau, Erdgeschoss).