

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG MATHEMATIK II

BLATT 3

Aufgabe 1 (Logarithmen)

(12 Punkte)

Vereinfache folgende Ausdrücke für $a, b, r, x > 0$, $b \neq 1$.

a) $\log_b(\ln r) = \log_b(\ln a) + \log_b(x)$

c) $z = e^{\log_2(b) \log_b(512^{\ln 2})} \cdot e^{\ln((-1)^{14})}$

b) $y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} \right) + \ln(\sqrt{a})$ mit $x > a$

d) $u = \log_b \left(a^{\frac{\log_2 e^x}{\log_b a}} \right) - x \log_2 e$

Aufgabe 2 (Logarithmen und Gleichungen)

(12 Punkte)

Löse folgende Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$.

a) $\log_4(x+2) - \log_4(x-2) = \frac{1}{2}$

c) $2^{3-x} 3^{x-1} = 6^{2x-3}$

b) $\log_2(x) - \log_2(x-6) = 3$

d) $4^x + 4 = 2^{x+2} + 2^x$

Aufgabe 3 (Funktionen)

(12 Punkte)

Bestimme für die folgenden Zuordnungsvorschriften den maximalen Definitionsbereich und ihren Wertebereich. Sind die entstandenen Funktionen injektiv, surjektiv, bijektiv? Bestimme falls möglich ihre Umkehrfunktionen. Gebe auch den Definitionsbereich und Wertebereich der Umkehrfunktion an.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

d) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, wobei die sogenannte *Gauß-Klammer* $\lfloor x \rfloor$ von x die größte ganze Zahl kleiner gleich x liefert.

b) $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{x^2-1}}$

Aufgabe 4 (Bonus)

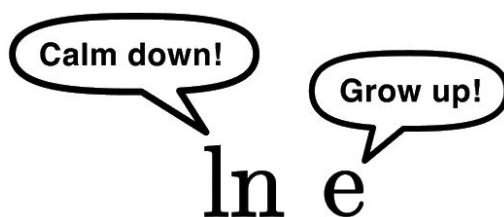
(2+2+2 Punkte)

Computer speichern Daten grundsätzlich in Form von *Bits*, d.h. Werten, die entweder 0 oder 1 sind. Wie viele Bits benötigt ein Computer, um die Zahl 65^{365} darzustellen? (Hier und im Folgenden gehen wir davon aus, dass nur natürliche Zahlen codiert werden.)

Meistens sollen jedoch nicht nur Zahlen gespeichert werden, sondern auch Programme auf diesen Zahlen operieren. Die *Laufzeit* von Programmen wird für gewöhnlich in der Länge der Eingabe ausgedrückt, d.h. wenn ein Programm eine Eingabe der Länge n Bits erhält, dann benötigt es $f(n)$ Rechenschritte.

Betrachte nun ein Programm, das $n \lceil \log_2 n \rceil$ viele Rechenschritte auf einer Eingabe von n Länge Bits benötigt. Wie viele Rechenschritte führt es auf den Zahlen 10, 256, 1000 aus?

Was ist die kleinste Eingabe, auf der der Algorithmus mindestens 100 Schritte braucht?



Lösungen ohne Lösungsweg werden nicht bewertet.

Abgabe der Übungen immer mittwochs bis 10:15 Uhr in der Vorlesung oder bis 10:00 Uhr im Postfach B. Dorn (C-Bau, Erdgeschoss).