

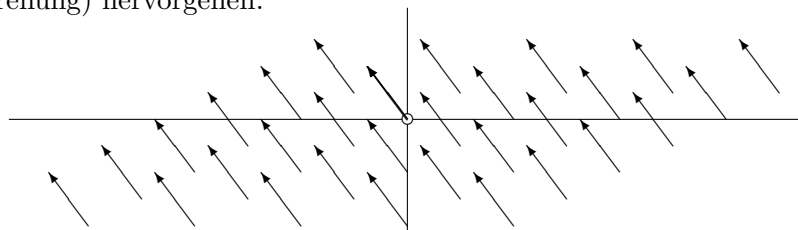
# Kapitel 2

## Vektorrechnung

### 2.1 Vektoren geometrisch

Sowohl in der Mathematik als auch in der Physik, den Ingenieurwissenschaften und vielen anderen Anwendungsbereichen spielen *Vektoren* eine zentrale Rolle.

Die anschaulichste von vielen möglichen Interpretationen des Vektorbegriffs ist es, sich unter einem Vektor eine gerichtete Strecke, also einen Pfeil in der Ebene oder im Raum vorzustellen. Dabei ist es wichtig, dass man Vektoren als gleich ansieht, die auseinander durch Verschiebung (ohne Drehung) hervorgehen.

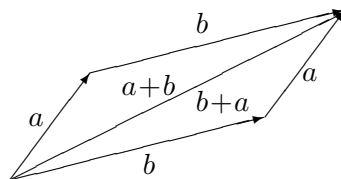


Unter all diesen “gleichen” Vektoren gibt es jedoch nach Wahl eines Koordinatensystems stets einen ausgezeichneten, der im Ursprung (Schnittpunkt der Koordinatenachsen) startet. Man spricht dann von einem *Ortsvektor*, weil er die Position eines bestimmten Punktes (nämlich des Zielpunktes) festlegt. In diesem Sinne entspricht also jedem Punkt der Ebene bzw. des Raumes genau ein (Orts-)Vektor. In allgemeineren (höher dimensional)en Vektorräumen funktioniert diese anschauliche Interpretation von Vektoren als Pfeilen allerdings nicht mehr.

Vektoren werden unterschiedlich bezeichnet, z. B. mit Kleinbuchstaben, Großbuchstaben, Fettdruckbuchstaben oder durch darüber gesetzte Pfeile (also z.B.  $a$ ,  $A$ ,  $\mathbf{a}$  oder  $\vec{a}$ ). Wir werden die einfachste Notation mittels Kleinbuchstaben wie  $a, b, c$  verwenden.

#### Parallelogrammregel

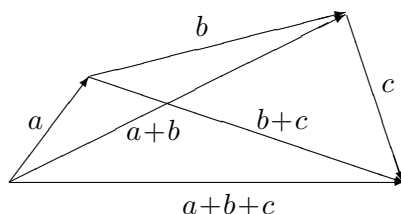
Zwei Vektoren addiert man, indem man den Startpunkt des einen in den Zielpunkt des anderen verschiebt.



In der so definierten Summe sind die Summanden vertauschbar:

$$a + b = b + a.$$

Allgemein erhält man die Summe von mehreren Vektoren durch Aneinanderhängen:



Wie man sieht, kommt es auf die Reihenfolge des Aneinanderhängens nicht an:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Der *Nullvektor*  $0$  spielt eine besondere Rolle, da er weder eine positive Länge noch eine Richtung besitzt. Offenbar gilt

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

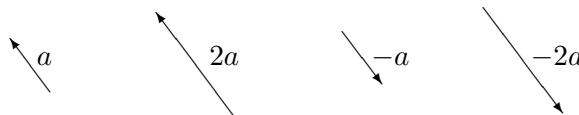
Bezeichnet  $-a$  denjenigen Vektor, der die gleiche Länge wie  $a$ , aber die umgekehrte Richtung hat, so gilt

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Wir setzen  $a - b := a + (-b)$ .

Einen Vektor  $a$  kann man mit einer reellen Zahl  $r$  multiplizieren. Dabei entsteht geometrisch der um den Faktor  $r$  gestreckte Vektor  $ra$ ; für negatives  $r$  zeigt er in die entgegengesetzte Richtung wie der Vektor  $a$ :

$$(-r)a = -ra.$$



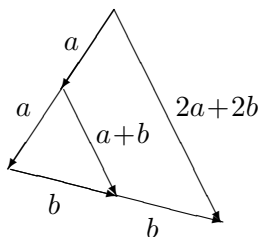
Außerdem gelten für reelle Zahlen  $r, s$  und Vektoren  $a, b$  die Regeln

$$(rs)a = r(sa)$$

$$(r + s)a = ra + sa$$

$$r(a + b) = ra + rb.$$

Die letzte Gleichung ist geometrisch nichts Anderes als der *Strahlensatz*:



Die beiden Dreiecke sind ähnlich, da der untere und der obere Strahl von den parallelen Strahlen berührt wird. Die Summen werden um den gleichen Faktor gestreckt wie die einzelnen Vektoren.

## 2.2 Vektoren algebraisch

Seit René Descartes (1596-1650) beschreibt man Punkte einer Geraden, einer Ebene oder des Raumes mit Hilfe von Koordinaten, also durch gewisse Paare oder Tripel reeller Zahlen. Hier greifen Algebra und Geometrie eng ineinander, man spricht von *analytischer Geometrie*.

Eine vereinheitlichende und allgemeinere Sicht gewinnt man durch simultane Betrachtung aller  $n$ -dimensionalen Räume, wobei  $n$  eine beliebige natürliche Zahl (sogar 0) sein darf.

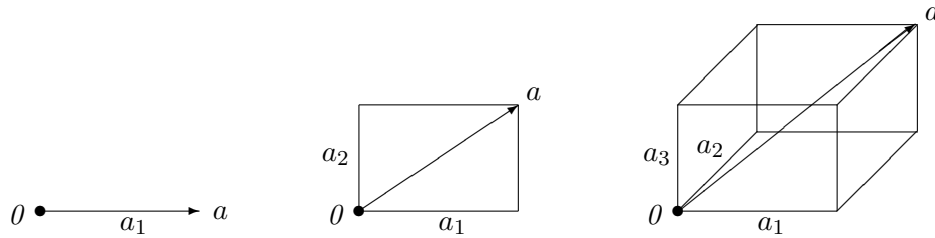
Die Elemente des kartesischen Produktes  $\mathbb{R}^n$ , d. h. die  $n$ -Tupel oder *Zeilenvektoren*  $(a_1, \dots, a_n)$  mit  $a_k \in \mathbb{R}$  für  $k \in \underline{n}$ , interpretiert man als *Punkte* eines  $n$ -dimensionalen Raumes. Dabei hat  $\mathbb{R}^n$  für  $n \leq 3$  folgende anschauliche Bedeutungen:

$n = 0$  : Einpunktige Menge  $\{0\}$

$n = 1$  : Zahlengerade  $\mathbb{R}$

$n = 2$  : Euklidische Ebene  $\mathbb{R}^2$

$n = 3$  : Euklidischer (3-dimensionaler) Raum  $\mathbb{R}^3$



### 2.2.1 Schreibweise. (Koordinatenbeschreibung von Vektoren)

Der *Spaltenvektor*  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  beschreibt den Vektor vom Nullpunkt zum Punkt  $(a_1, \dots, a_n)$ .

Die Gesamtheit aller solchen Spaltenvektoren bezeichnen wir mit  $\mathbb{R}_n$ .

Vielfach wird zwischen dem *Zeilenraum*  $\mathbb{R}^n$  und dem *Spaltenraum*  $\mathbb{R}_n$  nicht unterschieden.

### 2.2.2 Definition. (Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren)

Für  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  und  $r \in \mathbb{R}$  setzen wir

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}, \quad r \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ra_1 \\ \vdots \\ ra_n \end{pmatrix}, \quad 0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (Nullvektor)}$$

sowie  $-a := (-1)a$  für  $a \in \mathbb{R}_n$ . Analog für Zeilenvektoren, d. h. Elemente von  $\mathbb{R}^n$ .

Im Folgenden arbeiten wir wahlweise mit Zeilen- oder Spaltenvektoren und schreiben

$$\mathbb{R}^{n*} \text{ für } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \mathbb{R}_n^* \text{ für } \mathbb{R}_n \setminus \{0\}.$$

Für reelle Zahlen verwendet man oft zur Unterscheidung von Vektoren griechische Buchstaben.

Aus den bekannten Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen folgen entsprechende Gesetze für Vektoren, welche algebraisch die im ersten Abschnitt geometrisch plausibel gemachten Beziehungen widerspiegeln.

### 2.2.3 Lemma. (Rechenregeln für Vektoren)

Für Vektoren  $a, b, c \in \mathbb{R}^n$  und  $r, s \in \mathbb{R}$  gelten folgende Gleichungen:

$$(1^+) \quad a + b = b + a \quad (\text{Kommutativgesetz für Vektoren})$$

$$(2^+) \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{Assoziativgesetz für Vektoren})$$

$$(3^+) \quad 0 + a = a + 0 = a \quad (\text{additives neutrales Element})$$

$$(4^+) \quad a + (-a) = 0 \quad (\text{negatives Element})$$

$$(1^-) \quad r(sa) = (rs)a \quad (\text{Assoziativgesetz für Skalare})$$

$$(2^-) \quad r(a + b) = ra + rb \quad (\text{Distributivgesetz für Vektoren})$$

$$(3^-) \quad (r + s)a = ra + sa \quad (\text{Distributivgesetz für Skalare})$$

$$(4^-) \quad 1a = a \quad (\text{multiplikatives neutrales Element})$$

Um (verschobene) Pfeile in der Ebene festzulegen, braucht man *vier* Koordinaten: die ersten beiden für den Startpunkt und die letzten beiden für den Zielpunkt. Bei genauer symbolischer Zeichnung wird man einen Pfeil durch einen Polygonzug darstellen (siehe unten).

Für das Arbeiten mit Vektoren in der Ebene ist häufig die sogenannte *Polardarstellung* nützlich:

### 2.2.4 Lemma. (Polardarstellung)

Zu jedem (Orts-)Vektor  $a = (a_1, a_2) \neq 0$  in der Ebene gibt es genau eine Zahl  $r > 0$  und eine Zahl  $t$  im halboffenen Intervall  $[0, 1[$  mit

$$a_1 = r \cos 2\pi t, \quad a_2 = r \sin 2\pi t.$$

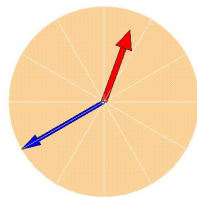
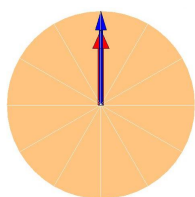
### 2.2.5 Beispiel. Uhrzeiger

Legt man den Koordinatenursprung in die Mitte einer Uhr, so hat der „große“ Minutenzeiger der Länge  $m$  zum Zeitpunkt  $t$  (in Stunden!) den Koordinatenvektor

$$(m \cos 2\pi t, m \sin 2\pi t).$$

Der „kleine“ Stundenzeiger der Länge  $h$  hat hingegen zum Zeitpunkt  $t$  (ebenfalls in Stunden!) den Koordinatenvektor

$$\left(h \cos \frac{2\pi t}{12}, h \sin \frac{2\pi t}{12}\right).$$



## 2.3 Das Skalarprodukt

Um mit Winkeln und Abständen in der Ebene, im Raum oder allgemein im  $\mathbb{R}^n$  bequem rechnen zu können, benutzt man das Skalarprodukt; es ordnet je zwei *Vektoren*  $a, b$  eine gewisse *reelle Zahl*  $a \cdot b$  („Skalar“) zu.

Geometrisch beschreibt der Betrag des Skalarprodukts  $a \cdot b$  den Flächeninhalt des durch die Projektion von  $a$  auf  $b$  und einem zu  $a$  senkrechten und gleich langen Vektor aufgespannten Rechtecks. Wir definieren hier allerdings das Skalarprodukt erst algebraisch und leiten später seine geometrischen Eigenschaften ab.

### 2.3.1 Definition. (Skalarprodukt)

Für Vektoren  $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  ist das *Skalarprodukt*  $a \cdot b$  definiert als

$$a \cdot b := a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Speziell im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ :

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2, \quad (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

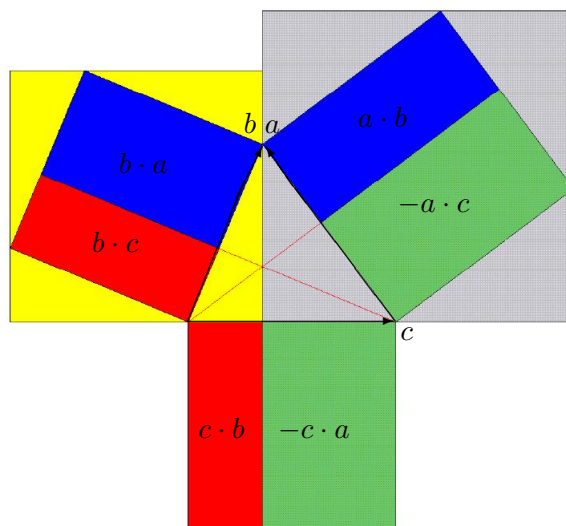
### 2.3.2 Lemma. (Rechenregeln für das Skalarprodukt)

Für Vektoren  $a, b, c \in \mathbb{R}^n$  und  $r \in \mathbb{R}$  gelten folgende Regeln:

- (S1)  $a \cdot a \geq 0$ ;  $a \cdot a = 0 \iff a = 0$  (positive Definitheit)
- (S2)  $r(a \cdot b) = ra \cdot b = a \cdot rb$  (Assoziativgesetz)
- (S3)  $a \cdot b = b \cdot a$  (Kommutativgesetz)
- (S4)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  (Distributivgesetz)

Das Kommutativgesetz führt auf den „schiefwinkligen Kathetensatz“:

In der nachfolgenden Figur haben die gleichgefärbten Rechtecke jeweils gleichen Flächeninhalt.



**2.3.3 Definition. (Orthogonalität, Länge und Abstand)**

- (1) Zwei Vektoren  $a$  und  $b$  aus  $\mathbb{R}^n$  heißen zueinander *orthogonal* (oder *stehen aufeinander senkrecht*), in Zeichen  $a \perp b$ , falls ihr Skalarprodukt verschwindet:  $a \cdot b = 0$ .
- (2) Es seien  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . Die Zahl  $\|a\| := \sqrt{a \cdot a}$  heißt *Länge*, *Norm* oder *Betrag* des Vektors  $a$ , und  $d(a, b) := \|a - b\|$  heißt *Abstand* zwischen  $a$  und  $b$ .
- (3) Für nichtleere Mengen  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  versteht man unter dem (*Minimal-*)*Abstand* zwischen  $A$  und  $B$  das Infimum

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Im Falle  $A = \{a\}$  schreibt man  $d(a, B)$  für  $d(A, B)$ , entsprechend  $d(A, b)$  statt  $d(A, \{b\})$ .

Es ergeben sich folgende Spezialfälle:

$$\text{Im } \mathbb{R}^1 : \|a\| = \sqrt{a^2} = \max\{a, -a\} = |a|, \quad d(a, b) = |a - b|.$$

$$\text{Im } \mathbb{R}^2 : \|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad d(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

$$\text{Im } \mathbb{R}^3 : \|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad d(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Viele algebraische und geometrische Anwendungen hat die folgende Regel:

**2.3.4 Satz. (Rechteckregel)**

Für je zwei Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^n$  sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- (a)  $a \perp b$ .
- (b)  $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ .
- (c)  $\|a - b\| = \|a + b\|$ .

*Beweis.* (a)  $\Rightarrow$  (c):  $a \cdot b = 0 \Rightarrow \|a - b\|^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a \pm 2a \cdot b + b \cdot b = (a + b) \cdot (a + b) = \|a + b\|^2$ .

(c)  $\Rightarrow$  (b):  $2\|a + b\|^2 = \|a - b\|^2 + \|a + b\|^2 = 2a \cdot a + 2a \cdot b - 2a \cdot b + 2b \cdot b = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a):  $0 = \|a + b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 = (a \cdot a + 2a \cdot b + b \cdot b) - (a \cdot a + b \cdot b) = 2a \cdot b$ .  $\square$

**2.3.5 Folgerungen. (Geometrische Interpretationen der Rechteckregel)**

- (1) **Satz des Pythagoras:**

*Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate ist.*

- (2) **Satz des Thales:**

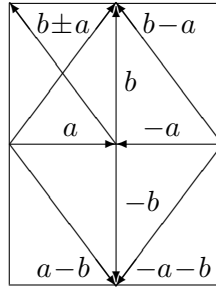
*Der Durchmesser eines Kreises wird von jedem Peripheriepunkt aus unter einem rechten Winkel gesehen.*

- (3) **Satz vom Rechteck:**

*Ein Parallelogramm hat genau dann gleichlange Diagonalen, wenn benachbarte Seiten aufeinander senkrecht stehen.*

- (4) **Satz vom Rhombus:**

*Ein Parallelogramm hat genau dann gleichlange Seiten (d. h. es ist ein Rhombus bzw. eine Raute), wenn seine Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.*



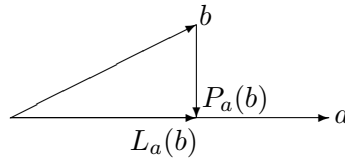
Rechtecke und Raute

**2.3.6 Satz und Definition. (Orthogonalprojektion)**

Für  $a \in \mathbb{R}^{n*}$  kann jeder Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  auf eindeutige Weise als Differenz zweier Vektoren dargestellt werden, die aufeinander senkrecht stehen und von denen der eine die Form  $ra$ , also dieselbe oder entgegengesetzte Richtung wie  $a$  hat. Dieser Vektor liefert den Lotfußpunkt der senkrechten Projektion von  $b$  auf  $a$  und wird mit  $L_a(b)$  bezeichnet; der zweite heißt Lot oder Projektionsvektor von  $b$  auf  $a$  und wird mit  $P_a(b)$  oder kurz  $p$  bezeichnet. Also:

$$b = L_a(b) - P_a(b), \quad L_a(b) = ra \perp P_a(b).$$

Hierbei ist  $r = \frac{a \cdot b}{a \cdot a} = \frac{a \cdot b}{\|a\|^2}$  und  $\|L_a(b)\| = \frac{|a \cdot b|}{\|a\|}$ .



*Beweis.* Gilt  $b = ra - p$  und  $a \perp p$ , so folgt  $a \cdot b = a \cdot (ra - p) = r a \cdot a - a \cdot p = r a \cdot a$  und daraus

$$r = \frac{a \cdot b}{a \cdot a} = \frac{a \cdot b}{\|a\|^2} \quad \text{und} \quad \|ra\| = |r| \|a\| = \frac{|a \cdot b|}{\|a\|}.$$

Setzt man umgekehrt  $r = \frac{a \cdot b}{a \cdot a}$  und  $p = ra - b$ , so ergibt sich tatsächlich  $b = ra - p$  und  $a \cdot p = a \cdot (ra - b) = r a \cdot a - a \cdot b = 0$ , d.h.  $a \perp p$ . □

**2.3.7 Satz. (Ungleichung von Cauchy–Schwarz)**

Für  $a, b \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$|a \cdot b| \leq \|a\| \|b\|.$$

Gleichheit besteht genau dann, wenn  $a = 0$  oder  $b = sa$ , d.h.  $P_a(b) = 0$  gilt.

*Beweis.* Da die Ungleichung für  $a = 0$  klar ist, können wir  $a \neq 0$  und damit  $\|a\| \neq 0$  annehmen. Aus der Orthogonalzerlegung und dem Satz von Pythagoras folgt sofort

$$r^2 \|a\|^2 \leq r^2 \|a\|^2 + \|p\|^2 = \|ra - p\|^2 = \|b\|^2, \quad \text{also} \quad \frac{|a \cdot b|}{\|a\|} \leq \|b\|,$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn  $P_a(b) = p = 0$  ist. □

Nach Division durch  $\|a\| \|b\|$  im Falle  $a \neq 0 \neq b$  besagt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

**2.3.8 Folgerung. (Winkel zwischen Vektoren)**

Für  $a, b \in \mathbb{R}^{n*}$  gilt:

$$-1 \leq \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|} \leq 1.$$

Also existiert genau ein Winkel  $\gamma \in [0, \pi]$  (bzw. zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$ ) mit  $\cos \gamma = \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}$ .

Im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  ist  $\gamma$  der mit  $\angle(a, b)$  bezeichnete Winkel zwischen  $a$  und  $b$ . Insbesondere:

$$a \perp b \iff a \cdot b = \cos \gamma = 0 \iff \gamma \text{ ist ein rechter Winkel.}$$

**2.3.9 Folgerung. (Cosinussatz)**

Für  $a, b \in \mathbb{R}^{n*}$  und den Winkel  $\gamma = \angle(a, b)$  gilt:

$$\|a \pm b\|^2 = \|a\|^2 \pm 2(a \cdot b) + \|b\|^2 = \|a\|^2 \pm 2\|a\| \|b\| \cos \gamma + \|b\|^2.$$

Spezialfall (Pythagoras):  $a \perp b \iff \cos \gamma = 0 \iff \|a \pm b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ .

**2.3.10 Satz. (Norm)**

Für Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^n$  und  $r \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(N1) \quad \|a\| \geq 0, \|a\| = 0 \iff a = 0 \quad (\text{Positivität})$$

$$(N2) \quad \|ra\| = |r| \|a\| \quad (\text{Homogenität})$$

$$(N3) \quad \|a \pm b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad (\text{Dreiecks-Ungleichung}).$$

Zu (N3):  $\|a \pm b\|^2 = \|a\|^2 \pm 2a \cdot b + \|b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2\|a\| \|b\| + \|b\|^2 = (\|a\| + \|b\|)^2$ .

**2.3.11 Definition.** Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  heißt *Einheitsvektor* oder *normiert*, falls  $\|v\| = 1$ .

Jeder Vektor  $u \in \mathbb{R}^{n*}$  kann „normiert werden“: Der Vektor

$$u^\circ := \frac{u}{\|u\|}$$

hat die Norm 1 und es gilt  $u = \|u\| u^\circ$  („Länge mal Richtungsvektor“).

**2.3.12 Definition. (Orthonormalbasen)**

Eine *Orthogonalbasis* des  $\mathbb{R}^n$  besteht aus  $n$  paarweise orthogonalen Vektoren  $b_1, \dots, b_n \neq 0$ . Haben sie alle die Länge 1, spricht man von einer *Orthonormalbasis* (kurz *ONB*). Mit dem *Kronecker-Symbol*

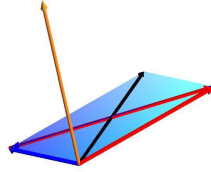
$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } j = k \\ 0 & , \text{ falls } j \neq k \end{cases} \quad \text{gilt dann: } b_j \cdot b_k = \delta_{jk}.$$

Die Vektoren  $e_k = (\delta_{jk} \mid j \in \underline{n}) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  heißen *kanonische Einheitsvektoren* des  $\mathbb{R}^n$ ; sie bilden die *kanonische Orthonormalbasis*.



## 2.4 Das Vektorprodukt

Von großem Nutzen für viele Berechnungen im dreidimensionalen Raum (auch in Anwendungsbereichen wie Physik und Technik) ist das Vektorprodukt, welches je zwei Vektoren des  $\mathbb{R}_3$  einem dritten zuordnet, der auf diesen beiden senkrecht steht.



**2.4.1 Definition.** Das *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* von  $u$  und  $v$  aus  $\mathbb{R}_3$  ist der Vektor

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3, \text{ wobei } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Während das Skalarprodukt zweier Vektoren eine *Skalar*, d. h. eine reelle Zahl ist, ergibt das Vektorprodukt einen *Vektor* (aus  $\mathbb{R}_3$ )!

Mit einigen zum Teil etwas aufwändigen Rechnungen ergibt sich:

### 2.4.2 Satz. (Rechenregeln für das Vektorprodukt)

Für  $u, v, w \in \mathbb{R}_3$  gilt:

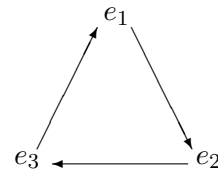
- (1)  $u \times v = -v \times u$ , insbesondere  $u \times u = 0$  (Anti-Kommutativgesetz)
- (2)  $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$  (Distributivgesetz)
- (3)  $\lambda(u \times v) = \lambda u \times v = u \times \lambda v$  (Assoziativgesetz)
- (4)  $(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$  (Orthogonalität)
- (5)  $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$  (Grassmann-Identität)
- (6)  $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$  (Jacobi-Identität)
- (7)  $\|u \times v\|^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$  (Cauchy-Schwarz-Identität)

Zum Beispiel erhält man (4) folgendermaßen:

$$(u \times v) \cdot u = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_2 v_3 u_1 - u_3 v_2 u_1 + u_3 v_1 u_2 - u_1 v_3 u_2 + u_1 v_2 u_3 - u_2 v_1 u_3 = 0.$$

### 2.4.3 Tabelle. (Festlegung des Vektorprodukts durch die Einheitsvektoren)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c|ccc} \times & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 \end{array}$$



Durch die Multiplikationstabelle und 2.4.2 (2)–(3) ist das Vektorprodukt vollständig bestimmt:

$$\begin{aligned} u \times v &= (u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) \times (v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) e_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) e_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_3. \end{aligned}$$

**2.4.4 Definition.** Für  $u, v, w \in \mathbb{R}_3$  heißt die Zahl

$$uvw = (u \times v) \cdot w = (v \times w) \cdot u = (w \times u) \cdot v = -(v \times u) \cdot w = -(w \times v) \cdot u = -(u \times w) \cdot v$$

das *Spatprodukt* von  $u, v$  und  $w$ .

Man nennt  $(u, v, w)$  ein *Rechtssystem* (bzw. *Linkssystem*), falls  $uvw > 0$  (bzw.  $uvw < 0$ ) gilt.

Zum Beispiel bilden die kanonischen Einheitsvektoren in der Reihenfolge  $(e_1, e_2, e_3)$  ein Rechtssystem, in der Reihenfolge  $(e_1, e_3, e_2)$  dagegen ein Linkssystem.

**2.4.5 Lemma. (Berechnung des Spatprodukts)**

$$uvw = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} := u_1 v_2 w_3 + u_3 v_1 w_2 + u_2 v_3 w_1 - u_3 v_2 w_1 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3$$

**2.4.6 Satz. (Geometrische Beschreibung des Vektorprodukts)**

Das Vektorprodukt  $u \times v$  liefert zu  $u, v \in \mathbb{R}_3$  den einzigen Vektor mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Er steht senkrecht auf  $u$  und  $v$ .
- (2) Seine Länge ist gleich dem Flächeninhalt des von  $u$  und  $v$  aufgespannten Parallelogramms:

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \angle(u, v).$$

- (3)  $(u, v, u \times v)$  ist ein Rechtssystem.

$$\text{Zu (2): } \|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 = (\|u\| \|v\|)^2 (1 - \cos^2 \angle(u, v)) = (\|u\| \|v\| \sin \angle(u, v))^2.$$

**2.4.7 Folgerung. (Orthonormalbasen des  $\mathbb{R}_3$ )**

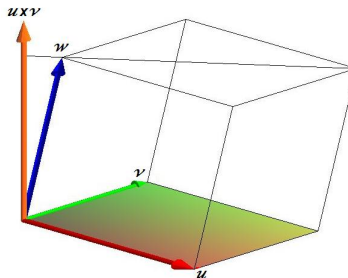
Einheitsvektoren  $u, v, w \in \mathbb{R}_3$  bilden genau dann eine ONB, wenn  $u \cdot v = 0$  und  $w = \pm u \times v$  gilt.

**2.4.8 Satz und Definition. (Spatvolumen)**

Für  $u, v, w \in \mathbb{R}_3$  ist  $|uvw|$  das Volumen des von  $u, v, w$  aufgespannten Spates

$$[u, v, w] = \{ru + sv + tw \mid r, s, t \in [0, 1]\}.$$

Hierbei kann man das Volumen definieren als „Grundfläche mal Höhe“.



## 2.5 Geraden, Ebenen und Hyperebenen

Die wichtigsten Objekte der Geometrie sind Punkte, Geraden und Ebenen. Das sind Spezialfälle sogenannter *affiner Teilräume*. Sie entstehen durch Verschiebung von *linearen Unterräumen*; bei diesen handelt es sich um affine Teilräume, die den Nullvektor enthalten.

### 2.5.1 Definition. (Parameterdarstellung von Geraden)

Für  $v \in \mathbb{R}^{n*}$  heißt

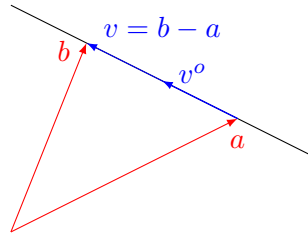
$$\mathbb{R}v := \{rv \mid r \in \mathbb{R}\}$$

die Gerade durch 0 und  $v$ . Allgemeiner heißt für  $a \in \mathbb{R}^n$

$$a + \mathbb{R}v := \{a + rv \mid r \in \mathbb{R}\}$$

die Gerade durch  $a$  mit Richtung  $v$  (oder *parallel* zu  $v$ ).

Wegen  $a + \mathbb{R}v = a + \mathbb{R}v^\circ$  kann der „Richtungsvektor“  $v$  immer normiert gewählt werden.



### 2.5.2 Satz. (Gerade durch zwei Punkte)

Durch je zwei verschiedene Punkte  $a, b \in \mathbb{R}^n$  geht genau eine Gerade, nämlich

$$a + \mathbb{R}(b-a) = b + \mathbb{R}(a-b).$$

*Beweis.*  $a = a + 0(b-a)$  und  $b = a + 1(b-a)$  liegen auf  $a + \mathbb{R}(b-a)$ . Ist  $c + \mathbb{R}v$  irgend eine Gerade, die  $a$  und  $b$  enthält, so gibt es  $r, s \in \mathbb{R}$  mit  $a = c + rv$  und  $b = c + sv$ ; es folgt dann  $b - a = (s - r)v$ , also  $\mathbb{R}(b-a) = \mathbb{R}v$  und wegen  $a - c \in \mathbb{R}v$  sogar  $a + \mathbb{R}(b-a) = c + \mathbb{R}v$ .  $\square$

### 2.5.3 Bemerkung. (Schnittpunkt zweier Geraden)

Sind zwei Geraden

$$G = a + \mathbb{R}u \text{ und } H = b + \mathbb{R}v$$

mit verschiedenen Ortsvektoren  $a$  und  $b$  gegeben, so muss man zur Bestimmung des Schnittpunkts (sofern er existiert) das folgende lineare Gleichungssystem nach  $r$  und  $s$  auflösen:

$$a + ru = b + sv \quad (+).$$

Multiplikation der vektoriellen Gleichung (+) mit  $u$  bzw.  $v$  ergibt das lineare Gleichungssystem

$$a \cdot u + ru \cdot u = b \cdot u + sv \cdot u$$

$$b \cdot v + sv \cdot v = a \cdot v + ru \cdot v$$

woraus man leicht  $r$  und  $s$  bestimmen kann. Im Falle  $u \cdot v = 0$ , d.h. bei aufeinander senkrecht

stehenden Richtungsvektoren, ergibt sich die Lösung

$$r = \frac{(b-a) \cdot u}{u \cdot u}, \quad s = \frac{(a-b) \cdot v}{v \cdot v}.$$

Spätestens beim Übergang von Geraden zu Ebenen brauchen wir die folgenden, in vielen Zusammenhängen wichtigen und nützlichen Begriffe:

### 2.5.4 Definition. (Linearkombinationen)

- (1) Für Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  und  $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}$  heißt die Summendarstellung

$$r_1 v_1 + \dots + r_k v_k = \sum_{j=1}^k r_j v_j$$

eine *Linearkombination* der Vektoren  $v_j$ . Sie heißt *trivial*, falls  $r_1 = \dots = r_k = 0$ .

- (2) Eine Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}^n$  heißt *linear unabhängig*, falls sich der Nullvektor  $0 = (0, \dots, 0)$  nur trivial als Linearkombination paarweise verschiedener Vektoren aus  $X$  darstellen läßt oder  $X$  leer ist. Andernfalls heißt  $X$  *linear abhängig*.

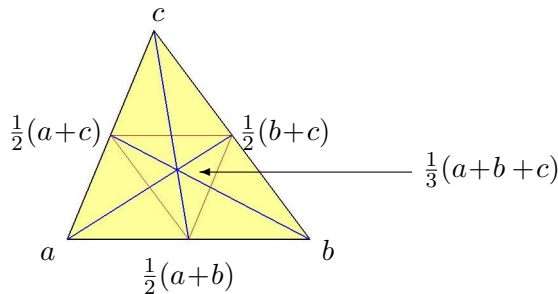
Lineare (Un-)Abhängigkeit ist eine Eigenschaft von Mengen von Vektoren, nicht von einzelnen Vektoren! Trotzdem sagt man statt „ $\{v_1, \dots, v_k\}$  ist linear (un-)abhängig“ auch „die Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  sind linear (un-)abhängig“.

### 2.5.5 Beispiel. (Dreieck, Schwerlinien und Schwerpunkt)

Drei Punkte  $a, b, c$  im  $\mathbb{R}^n$  bilden die Ecken eines Dreiecks, wenn die Differenzvektoren  $b-a$  und  $c-a$  linear unabhängig sind (siehe 2.5.7 (2)). Die *Schwerlinien* (*Seitenhalbierenden*) des Dreiecks verbinden je eine Ecke mit dem Mittelpunkt der Gegenseite. Die Gerade durch die Schwerlinie, die eine Ecke  $a$  mit dem gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt  $\frac{1}{2}(b+c)$  verbindet, hat die Parameterdarstellung  $S_a = a + \mathbb{R}(b+c-2a) = \{a + r(b+c-2a) \mid r \in \mathbb{R}\}$ . (Warum?) Der *Schwerpunkt* des Dreiecks mit den Ecken  $a, b, c$  ist der Schnittpunkt der drei Schwerlinien. Er entsteht durch die Linearkombination

$$\frac{1}{3}(a+b+c) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c,$$

ist also das *arithmetische Mittel* der Eckvektoren, wie man sofort durch Einsetzen von  $r = \frac{1}{3}$  in die Gleichungen der drei Schwerlinien sieht.



Jetzt können wir Ebenen ganz analog wie Geraden beschreiben:

### 2.5.6 Definition. (Parameterdarstellung von Ebenen)

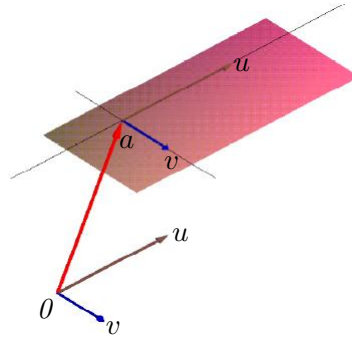
Für zwei linear unabhängige Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^n$  ist

$$\mathbb{R}u + \mathbb{R}v = \{ru + sv \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

die Ebene durch  $0, u$  und  $v$ . Allgemeiner ist für  $a \in \mathbb{R}^n$

$$a + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v := \{a + ru + sv \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

die zu  $u$  und  $v$  parallele Ebene durch  $a$ .



### 2.5.7 Satz. (Lineare Abhängigkeit von Vektoren)

- (1) Ein Vektor  $v$  bzw. die Menge  $\{v\}$  ist nur dann linear abhängig, wenn  $v$  der Nullvektor ist.
- (2) Zwei Vektoren  $u, v$  sind genau dann linear abhängig, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden durch  $0$  liegen, d.h., wenn  $u = 0$  gilt oder ein  $r \in \mathbb{R}$  mit  $v = ru$  existiert.  
Zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  sind genau dann linear abhängig, wenn ihr Vektorprodukt Null ist.
- (3) Drei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene durch  $0$  liegen.  
Drei Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$  sind genau dann linear abhängig, wenn ihr Spatprodukt Null ist.

*Beweis.* (1) gilt wegen  $rv = 0 \Leftrightarrow r = 0$  oder  $v = 0$ .

(2) Gilt  $u = 0$  oder  $v = ru$ , so haben wir eine nicht triviale Linearkombination  $1u + 0v = 0$  oder  $ru - 1v = 0$ . Ist umgekehrt  $\{u, v\}$  linear abhängig, etwa  $r_1u + r_2v = 0$  mit  $r_1 \neq 0$  oder  $r_2 \neq 0$ , so ist für  $u \neq 0$  auch  $r_2 \neq 0$  und  $v = -\frac{r_1}{r_2}u$ . Nach Satz 2.4.6 (2) liegen  $u$  und  $v$  in  $\mathbb{R}^3$  genau dann auf einer Geraden durch  $0$ , wenn  $u \times v$  der Nullvektor ist.

(3) Gilt  $r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 = 0$  und z. B.  $r_1 \neq 0$ , so liegen  $v_1, v_2, v_3$  in der Ebene  $\mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3$ . Liegen andererseits  $v_1, v_2, v_3$  alle in einer Ebene  $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ , so gibt es  $r_i, s_i \in \mathbb{R}$  mit  $v_i = r_iu + s_iv$ , und dann folgt  $(r_2s_3 - r_3s_2)v_1 + (r_3s_1 - r_1s_3)v_2 + (r_1s_2 - r_2s_1)v_3 = 0$ . Sind alle drei Koeffizienten Null, so bedeutet das für die Koeffizientenvektoren  $r, s \in \mathbb{R}^3$  gerade  $r \times s = 0$ , also nach (2) entweder  $s = 0$  und somit  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}u$ , oder  $r = ts$  für ein  $t \in \mathbb{R}$ , und somit gilt dann  $v_i = s_i(tu + v) \in \mathbb{R}(tu + v)$ . In diesen Fällen liegen alle drei Vektoren sogar auf einer Geraden durch  $0$  und sind daher ebenfalls linear abhängig. Hieraus folgt mit Satz 2.4.8 die Aussage über das Spatprodukt (denn das Volumen eines Spats, der ganz in einer Ebene liegt, ist Null).  $\square$

**2.5.8 Definition. (kollinear und komplanar)**

Mehrere Punkte des  $\mathbb{R}^n$  heißen *kollinear*, wenn sie auf einer Geraden liegen, und *komplanar*, wenn sie in einer Ebene liegen.

**2.5.9 Folgerungen. (Geraden und Ebenen durch drei oder vier Punkte)**

(1)  $a, b, c \in \mathbb{R}^n$  sind genau dann kollinear, wenn  $b-a$  und  $c-a$  linear abhängig sind.

(2) Durch je drei nicht kollineare Punkte  $a, b, c$  geht genau eine Ebene, nämlich

$$a + \mathbb{R}(b-a) + \mathbb{R}(c-a).$$

(3) Vier Punkte  $a, b, c, d$  sind genau dann komplanar, wenn  $b-a, c-a, d-a$  linear abhängig sind.

**2.5.10 Bemerkung. (Gleichungsdarstellung von Geraden)**

Eine Gerade  $a + \mathbb{R}v$  in der Ebene lässt sich nach Wahl eines zu  $v$  senkrechten Vektors  $w \neq 0$  (z. B.  $w = (-v_2, v_1)$  für  $v = (v_1, v_2)$ ) durch die Gleichung  $(x-a) \cdot w = 0$  beschreiben.

In 3- und höherdimensionalen Räumen lassen sich Geraden nicht mehr durch eine einzige Koordinaten-Gleichung festlegen. Im  $\mathbb{R}^3$  braucht man entweder eine vektorielle Gleichung

$$(x-a) \times v = 0,$$

die besagt, dass die Vektoren zwischen zwei Punkten der Geraden stets Vielfache des Richtungsvektors sind. Oder man beschreibt die Gerade durch zwei Koordinatengleichungen, was geometrisch der Tatsache entspricht, dass eine Gerade (auf vielfache Weise!) als Schnittmenge zweier Ebenen darstellbar ist: Für linear unabhängige Vektoren  $u, v, w$  ist die Gerade

$$G = a + \mathbb{R}u$$

der Durchschnitt der Ebenen

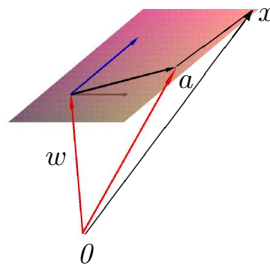
$$E = a + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v \text{ und } F = a + \mathbb{R}u + \mathbb{R}w.$$

**2.5.11 Definition. (Hyperebenen)**

Für  $w \in \mathbb{R}^{n*}$  und  $a \in \mathbb{R}^n$  heißt

$$H_{a,w} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid w \perp (x-a)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid w \cdot x = w \cdot a\}$$

zu  $w$  senkrechte Hyperebene durch  $a$ .

**2.5.12 Bemerkung. (Hyperebenen-Gleichung)**

In Koordinatenschreibweise ergibt sich für  $w = (w_1, \dots, w_n)$  und  $t = w \cdot a \in \mathbb{R}$ :

$$H_{a,w} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid w_1 x_1 + \dots + w_n x_n = t\}.$$

Umgekehrt beschreibt jede Gleichung

$$w_1x_1 + \cdots + w_nx_n = t$$

mit  $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^{n*}$  und  $t \in \mathbb{R}$  eine Hyperebene.

In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  sind die Hyperebenen genau die Geraden, im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  sind Hyperebenen nichts anderes als Ebenen. Insbesondere liefert

$$w_1x_1 + w_2x_2 = t$$

eine Gerade in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und

$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = t$$

eine Ebene im Raum  $\mathbb{R}^3$ .

Wie bekommt man eine Parameterdarstellung einer Ebene aus einer Ebenen-Gleichung und umgekehrt? Die Antwort gibt der folgende Satz, dessen Beweis eine leichte Aufgabe ist.

### 2.5.13 Satz. (Ebenen im dreidimensionalen Raum)

Für eine Ebene  $E = a + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$  im  $\mathbb{R}^3$  und  $w = u \times v$  gilt

$$E = H_{a,w} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = t\} \quad \text{mit } t = w \cdot a.$$

Umgekehrt findet man für eine Ebene in Gleichungsform  $E = H_{a,w}$  Parameterdarstellungen, indem man das Gleichungssystem  $w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = t$  löst und zwei linear unabhängige Lösungsvektoren  $u$  und  $v$  auswählt. Dann ist  $E = a + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ .

### 2.5.14 Bemerkung. (Schnitt zweier Ebenen)

Will man die Schnittmenge zweier Ebenen durch Lösen von Gleichungen bestimmen, so empfiehlt es sich, eine der beiden Ebenen in Parameterform und die andere durch eine Gleichung darzustellen:

$$E = \{a + ru + sv \mid r, s \in \mathbb{R}\}, \quad F = \{x \mid x \cdot w = t\}.$$

Dann kann man die Parameterdarstellung in die Gleichung einsetzen. Die Schnittmenge besteht aus den Lösungen

$$x = a + ru + sv$$

der Gleichung

$$(a + ru + sv) \cdot w = t,$$

d. h. falls  $u \cdot w$  nicht 0 ist,

$$r = \frac{(t - a \cdot w - s v \cdot w)}{u \cdot w},$$

$$x = a + \frac{(t - a \cdot w)}{u \cdot w} u + s(v - \frac{v \cdot w}{u \cdot w} u),$$

und analog verfährt man, falls  $v \cdot w$  nicht 0 ist. Die Lösungsmenge ist dann eine Gerade.

(Diese Formeln braucht man sich nicht zu merken, nur den Lösungsweg dorthin.)

Gilt sowohl  $u \cdot w = 0$  als auch  $v \cdot w = 0$ , so sind die Ebenen parallel. (Warum?) Ist dann auch noch  $a \cdot w = t$ , so sind die Ebenen sogar gleich, andernfalls ist ihr Schnitt leer.

**2.5.15 Satz. (Lot auf Gerade oder Hyperebene)**

Gegeben seien  $a, b, w \in \mathbb{R}^n$  mit  $w \neq 0$ . Dann stehen die Hyperebenen  $E = H_{a,w}$  und  $F = H_{b,w}$  senkrecht auf der Geraden  $G = b + \mathbb{R}w$ , d.h. für  $x \in E$  und  $y \in G$  gilt  $(x-a) \cdot (y-b) = 0$ .

Für  $r = \frac{(a-b) \cdot w}{w \cdot w}$  ist  $p = b + rw$

der Schnittpunkt von  $E$  und  $G$

der Lotfußpunkt der senkrechten Projektion von  $b$  auf  $E$

der Lotfußpunkt der senkrechten Projektion von  $a$  auf  $G$ .

Weiter ist

$\|p-a\|$  der Abstand zwischen dem Punkt  $a$  und der Geraden  $G$

$\|p-b\|$  der Abstand zwischen dem Punkt  $b$  bzw. der Hyperebene  $F$  und der Hyperebene  $E$ .

Im  $\mathbb{R}^3$  gilt

$$\|p-a\| = \frac{\|(a-b) \times w\|}{\|w\|}.$$

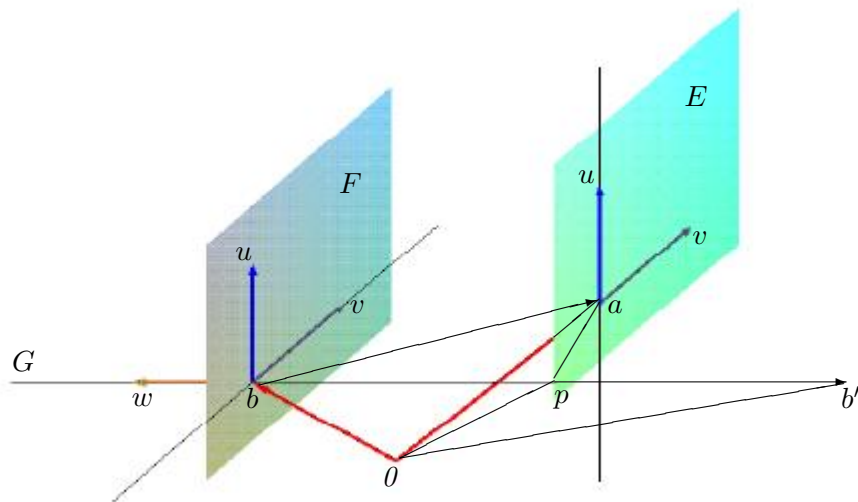
Der Spiegelpunkt  $b' = 2p-b$  von  $b$  an  $E$  hat den gleichen Abstand von  $E$  wie  $b$ , und der Verbindungsvektor  $2(p-b)$  steht senkrecht auf  $E$ .

*Beweis.* Für  $p = b + rw$  ist die Zerlegung  $p = a + c$  mit  $c \perp w$  äquivalent zu  $c = p-a$  und  $(p-a) \cdot w = 0$ , und dies ist wegen  $p = b + rw$  gleichbedeutend mit  $rw \cdot w = (a-b) \cdot w$ .

Die Bedingung  $p-a \perp w$  besagt, dass der Projektionsvektor  $p-a$  senkrecht auf  $G$  steht, und wegen  $p = b + rw$  auch, dass  $p$  der Fußpunkt des Lotes von  $b$  auf  $H_{a,w} = E$  ist.

Für  $x \in G$  gilt wegen  $x-p = sw \perp p-a$  nach Pythagoras  $\|x-a\|^2 = \|x-p\|^2 + \|p-a\|^2 \geq \|p-a\|^2$ ; also ist  $\|p-a\|$  der Minimalabstand von  $a$  zu Punkten aus  $G$ . Ebenso sieht man, dass  $\|p-b\|$  der Minimalabstand von  $b$  zu Punkten aus  $E$  ist: Für  $y \in E$  gilt  $y-p \perp rw = p-b$ , also  $\|y-b\|^2 = \|y-p\|^2 + \|p-b\|^2 \geq \|p-b\|^2$ .

Der Flächeninhalt des von  $a-b$  und  $w$  aufgespannten Parallelogramms ist  $\|(a-b) \times w\|$ , zugleich aber auch  $\|p-a\| \|w\|$  (Breite mal Höhe). Daraus folgt  $\|p-a\| = \frac{\|(a-b) \times w\|}{\|w\|}$ . Die Aussagen über den Spiegelpunkt sind geometrisch klar und rechnerisch leicht nachzuprüfen.  $\square$



Sind Ebenen in Parameterform gegeben, so erhält man ähnlich wie zuvor:



**2.5.16 Satz. (Abstand zwischen Geraden und Ebenen)**

Gegeben seien  $a, b \in \mathbb{R}^n$  und linear unabhängige Vektoren  $u, v$  aus  $\mathbb{R}^n$ . Für  $w \in \mathbb{R}^{n*}$  mit  $u \perp w \perp v$  ist dann  $G = b + \mathbb{R}w$  eine auf den Ebenen  $E = a + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$  und  $F = b + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$  senkrechte Gerade durch  $b$ . Sofern  $G$  und  $E$  sich schneiden (was für  $n = 3$  immer der Fall ist), ist ihr Schnittpunkt gegeben durch  $p = b + rw$  mit  $r = \frac{(a-b) \cdot w}{w \cdot w}$ . Die Länge  $\|p-b\| = \frac{|(a-b) \cdot w|}{\|w\|}$  des senkrechten Verbindungsvektors ist dann der Abstand zwischen

den Ebenen  $E$  und  $F$

der Geraden  $a + \mathbb{R}u$  und der Ebene  $F$

der Geraden  $b + \mathbb{R}v$  und der Ebene  $E$

den Geraden  $a + \mathbb{R}u$  und  $b + \mathbb{R}v$ .

Aus Satz 2.5.15 ergibt sich unmittelbar:

**2.5.17 Folgerung. (Normalform von Hyperebenen)**

Der Abstand eines Punktes  $b \in \mathbb{R}^n$  von einer Hyperebene  $H_{a,w}$  ist

$$|(b-a) \cdot w^\circ|.$$

Im  $\mathbb{R}^3$  läßt sich für linear unabhängige Vektoren  $u, v$  die Ebene  $E = a + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$  durch folgende Normalform beschreiben:

$$E = H_{a, (u \times v)^\circ}.$$

Schließlich erhält man durch Betrachtung des von  $a, b$  und  $u \times v$  aufgespannten Spates:

**2.5.18 Satz. (Abstand zwischen zwei Geraden im Raum)**

Zwei Geraden  $G = a + \mathbb{R}u$  und  $H = b + \mathbb{R}v$  im  $\mathbb{R}^3$  sind genau dann windschief (d. h. disjunkt und nicht parallel), wenn  $(a-b) \cdot (u \times v) \neq 0$  gilt. In diesem Fall ist  $|(a-b) \cdot (u \times v)^\circ|$  der Abstand zwischen

den Geraden  $G$  und  $H$

dem Punkt  $b$  und der Ebene  $E = a + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$

dem Punkt  $a$  und der Ebene  $F = b + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$

den parallelen Ebenen  $E$  und  $F$ .

**2.5.19 Tabelle. (Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen im  $\mathbb{R}^3$ )**

	Punkt $b$	Gerade $b + \mathbb{R}u$	Gerade $b + \mathbb{R}v$
Punkt $a$	$\ a-b\ $	$\ (a-b) \times u^\circ\ $	$\ (a-b) \times v^\circ\ $
Gerade $a + \mathbb{R}u$	$\ (a-b) \times u^\circ\ $	$\ (a-b) \times u^\circ\ $	$ (a-b) \cdot (u \times v)^\circ $
Ebene $a + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$	$ (a-b) \cdot (u \times v)^\circ $	$ (a-b) \cdot (u \times v)^\circ $	$ (a-b) \cdot (u \times v)^\circ $

Hierbei sind  $u$  und  $v$  als linear unabhängig vorausgesetzt.

## 2.6 Unterräume, Erzeugendensysteme und Basen

Jetzt wollen wir zwei gemeinsame Sammelbegriffe für Geraden, Ebenen und Hyperebenen studieren:

### 2.6.1 Definition. (Linearer Unterraum)

Eine nichtleere Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{R}^n$  heißt (*linearer*) *Unterraum* des  $\mathbb{R}^n$ , falls gilt:

$$(U1) \quad u, v \in U \implies u + v \in U.$$

$$(U2) \quad r \in \mathbb{R}, u \in U \implies ru \in U.$$

Definitionsgemäß enthält jeder Unterraum  $U$  den Nullvektor  $0$ , und aus  $u \in U$  folgt  $-u \in U$ .

Wie schon erwähnt, kann man Unterräume vom Nullpunkt wegschieben und bekommt so affine Teilräume:

### 2.6.2 Definition. (Affiner Teilraum)

Eine Teilmenge  $T$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt *affiner Teilraum* des  $\mathbb{R}^n$ , falls für je zwei verschiedene Elemente  $a, b \in T$  auch die Gerade durch  $a$  und  $b$  ganz in  $T$  liegt, d. h. falls für alle  $r, s \in \mathbb{R}$  mit  $r + s = 1$  auch  $ra + sb \in T$  gilt.

Dimension	Unterräume	affine Teilräume	Darstellung
0	Nullraum $\{0\}$	Punkte	$\{a\}$
1	Geraden durch $0$	Geraden	$a + \mathbb{R}v$
2	Ebenen durch $0$	Ebenen	$a + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$
$n-1$	Hyperebenen durch $0$	Hyperebenen	$H_{a,w} = \{x \mid (x-a) \perp w\}$
$n$	Gesamtraum $\mathbb{R}^n$	Gesamtraum	$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

Geometrisch einleuchtend ist folgende Beschreibung affiner Teilräume:

### 2.6.3 Satz. (Differenzraum eines affinen Teilraumes)

Eine nichtleere Teilmenge  $T$  des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann affiner Teilraum, wenn es einen Unterraum  $U$  gibt mit

$$T = a + U = \{a + u \mid u \in U\}.$$

Hierbei ist  $a$  ein beliebiger Vektor aus  $T$ , und  $U$  ist der durch  $T$  eindeutig bestimmte „Differenzraum“

$$\Delta T = \{b - c \mid b, c \in T\}.$$

Speziell sind die Unterräume des  $\mathbb{R}^n$  genau diejenigen affinen Teilräume, die  $0$  enthalten.

**2.6.4 Bemerkung.** Zwei affine Teilräume  $S$  und  $T$  sind genau dann im geometrisch anschaulichen Sinne parallel, wenn  $\Delta S \subseteq \Delta T$  oder  $\Delta T \subseteq \Delta S$  gilt.

Einen Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  nennen wir ab jetzt einfach *Vektorraum* (über  $\mathbb{R}$ ), erwähnen aber, dass es auch viel allgemeinere Vektorraumbegriffe gibt. Zum Beispiel kann man als Skalarbereich statt  $\mathbb{R}$  die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen, die Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen oder sogar

die Menge  $\{0, 1\}$  mit der Additionsregel  $1 + 1 = 0$  nehmen. Außerdem kann man unendlich-dimensionale Vektorräume wie z.B. den der reellen Funktionen betrachten. Auf diese Varianten könne wir an dieser Stelle aus Zeitgründen nicht genauer eingehen.

Wir suchen nun nach sparsamen Methoden, einen Vektorraum mittels Linearkombinationen aus wenigen Vektoren aufzubauen.

### 2.6.5 Definition. (Lineare Hülle, erzeugter Unterraum)

Die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus einer nichtleeren Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  wird mit  $L(A)$  oder  $\langle A \rangle$  bezeichnet und heißt *lineare Hülle von A* oder *von A erzeugter Unterraum*. Für  $A = \emptyset$  setzt man  $L(A) = \{0\}$ .

### 2.6.6 Satz. (Minimalität der linearen Hülle)

Für  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $L(A)$  der kleinste Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ , der  $A$  umfasst. Speziell ist eine Teilmenge  $V$  von  $\mathbb{R}^n$  genau dann ein Vektorraum, wenn  $V = L(V)$  gilt.

*Beweis.* Wegen  $a = 1a$  für  $a \in A$  ist  $A$  natürlich eine Teilmenge von  $L(A)$ . Sind  $u = \sum_{i=1}^k s_i a_i$  und  $v = \sum_{j=1}^{\ell} t_j b_j$  Linearkombinationen von Vektoren aus  $A$ , so auch  $u + v$  und  $r v$  ( $r \in \mathbb{R}$ ). Also ist  $L(A)$  ein Vektorraum, der in jedem  $A$  umfassenden Vektorraum enthalten ist.  $\square$

### 2.6.7 Definition. (Erzeugendensystem und Basis)

Eine Teilmenge  $B$  eines Vektorraums  $V$  heißt *Erzeugendensystem*, falls  $V = L(B)$  gilt. Man sagt auch,  $B$  erzeugt  $V$ . Ist  $B$  außerdem linear unabhängig, so heißt  $B$  *Basis* von  $V$ .

### 2.6.8 Beispiele. (Basen)

- (0)  $\emptyset$  ist Basis von  $\{0\}$ , aber  $\{0\}$  ist keine Basis von  $\{0\}$ , da linear abhängig!
- (1) Für  $v \in \mathbb{R}^{n*}$  ist  $\{v\}$  eine Basis der Geraden  $\mathbb{R}v = L(\{v\})$ .
- (2) Sind  $u, v$  linear unabhängig, so ist  $\{u, v\}$  eine Basis der Ebene  $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v = L(\{u, v\})$ .
- (3)  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ist eine Basis des Vektorraums  $\mathbb{R}^n$ , die *kanonische Basis*.

Linear unabhängige Mengen kann man schrittweise zu neuen erweitern, indem man Vektoren hinzunimmt, die noch nicht in der linearen Hülle der gegebenen Menge liegen:

### 2.6.9 Lemma. (Unabhängigkeitslemma)

Eine nichtleere Teilmenge  $B$  eines Vektorraums  $V$  ist genau dann linear unabhängig, wenn für ein bzw. jedes  $b \in B$  die Menge  $B \setminus \{b\}$  linear unabhängig ist und  $b$  nicht in  $L(B \setminus \{b\})$  liegt.

Denn ist dies für ein  $b \in B$  erfüllt, so folgt für paarweise verschiedene  $v_1, \dots, v_k \in B$  mit  $v_1 = b$  aus  $\sum_{j=1}^k r_j v_j = 0$  erst  $r_1 = 0$  (sonst läge  $b = v_1 = \sum_{j=2}^k \frac{-r_j}{r_1} v_j$  in  $L(B \setminus \{b\})$ ) und dann  $r_2 = \dots = r_k = 0$  aufgrund der linearen Unabhängigkeit von  $v_2, \dots, v_k$ . Umgekehrt ist natürlich jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge wieder linear unabhängig, und keiner ihrer Vektoren kann eine Linearkombination der anderen sein.  $\square$

### 2.6.10 Definition. (Dimension)

Für einen Vektorraum  $V$  heißt die kleinste natürliche Zahl  $m$  mit der Eigenschaft, daß je  $m+1$  Vektoren aus  $V$  linear abhängig sind, *Dimension* von  $V$ ; sie wird mit  $\dim V$  bezeichnet.

Jeder  $m$ -dimensionale Vektorraum enthält definitionsgemäß eine  $m$ -elementige, aber keine  $(m+1)$ -elementige linear unabhängige Teilmenge.

**2.6.11 Beispiele.** Da der  $\mathbb{R}^n$  die  $n$ -elementige kanonische Basis hat, ist seine Dimension, wie erwartet, gleich  $n$ . Die Dimensionsangaben für den Nullraum, Geraden, Ebenen und Hyper-ebenen aus Abschnitt 2.5 sind im Einklang mit dem neuen, allgemeineren Dimensionsbegriff.

Aus dem Unabhängigkeitslemma folgt induktiv:

**2.6.12 Satz. (Basis-Ergänzungssatz)**

*Jede linear unabhängige Teilmenge eines Erzeugendensystems  $Z$  des Vektorraums  $V$  lässt sich zu einer in  $Z$  enthaltenen Basis von  $V$  erweitern. Somit hat jeder Vektorraum eine Basis.*

Aber solche Basen sind keineswegs eindeutig bestimmt! Mit Hilfe des Unabhängigkeitslemmas und des Basis-Ergänzungssatzes zeigt man:

**2.6.13 Satz. (Basis-Charakterisierungssatz)**

*Für eine beliebige Teilmenge  $B$  eines  $m$ -dimensionalen Vektorraums  $V$  sind äquivalent:*

- (a)  $B$  ist eine Basis.
- (b)  $B$  ist ein minimales Erzeugendensystem von  $V$ .
- (c)  $B$  ist ein  $m$ -elementiges Erzeugendensystem von  $V$ .
- (d)  $B$  ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von  $V$ .
- (e)  $B$  ist eine  $m$ -elementige linear unabhängige Teilmenge von  $V$ .
- (f) Jedes  $v \in V$  hat eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von Vektoren aus  $B$ .

**2.6.14 Folgerungen. (Dimension und Basen)**

- (1) Ein Vektorraum ist genau dann  $m$ -dimensional, wenn er eine Basis mit  $m$  Elementen besitzt, und dann hat jede seiner Basen genau  $m$  Elemente.
- (2) Für beliebige Unterräume  $U, W$  eines Vektorraumes  $V$  folgt aus  $U \subseteq W$  und  $\dim U = \dim W$  bereits  $U = W$ .

Zu jeder Menge von Unterräumen eines festen Vektorraumes gibt es einen größten Unterraum, der in all diesen Unterräumen enthalten ist, nämlich deren Durchschnitt, aber auch einen kleinsten Unterraum, der all diese Unterräume umfasst, den sogenannten *Summenraum*.

**2.6.15 Definition. (Summen von Unterräumen)**

Für Unterräume  $U_1, \dots, U_k$  eines Vektorraums  $V$  heißt

$$U_1 + \dots + U_k := \{u_1 + \dots + u_k \mid u_j \in U_j \text{ für } i \in \underline{k}\}$$

die *Summe der Unterräume*  $U_1, \dots, U_k$ .

Ähnlich wie Satz 2.6.6 beweist man:

**2.6.16 Folgerung. (Summenraum als lineare Hülle)**

Für Unterräume  $U_1, \dots, U_k$  eines Vektorraums  $V$  ist  $U_1 + \dots + U_k = L(U_1 \cup \dots \cup U_k)$ .

**2.6.17 Definition. (Direkte Summen)**

Ein Vektorraum  $V$  heißt *direkte Summe* der Unterräume  $U_1, \dots, U_k$ ,

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k,$$

falls  $V = U_1 + \dots + U_k$  gilt und aus  $u_1 + \dots + u_k = 0$  mit  $u_j \in U_j$  ( $j \in \underline{m}$ )  $u_1 = \dots = u_k = 0$  folgt.

**2.6.18 Satz. (Charakterisierung direkter Summen)**

Für Unterräume  $U_1, \dots, U_k$  eines Vektorraums  $V$  sind äquivalent:

- (a)  $V$  ist direkte Summe der  $U_j$ .
- (b) Jedes  $v \in V$  ist eindeutig darstellbar als  $v = u_1 + \dots + u_k$  mit  $u_j \in U_j$ .
- (c) Ist  $B_j$  eine Basis von  $U_j$  ( $j \in \underline{k}$ ), so ist  $B_1 \cup \dots \cup B_k$  eine Basis von  $V$ .
- (d)  $V = U_1 + \dots + U_k$  und  $\dim U = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ .

Die Implikationskette (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (d)  $\Rightarrow$  (a) ist leicht nachzuprüfen.

**2.6.19 Beispiel.** Für jede Basis  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  eines Vektorraums  $V$  ist dieser die direkte Summe der Geraden  $\mathbb{R}b_j$  ( $j \in \underline{m}$ ):  $V = \mathbb{R}b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}b_m$ .

**2.6.20 Definition. (Komplemente)**

Ist ein Vektorraum  $V$  direkte Summe zweier Unterräume  $U$  und  $W$ , d.h.  $V = U + W$  und  $\{0\} = U \cap W$ , so heißt  $W$  *Komplement* von  $U$  in  $V$ .

Aus dem Basis-Ergänzungssatz folgt:

**2.6.21 Folgerung. (Existenz von Komplementen)**

Zu jedem Unterraum  $U$  eines Vektorraums  $V$  gibt es mindestens ein Komplement.

**2.6.22 Beispiele.** Komplemente sind fast nie eindeutig; z.B. ist im  $\mathbb{R}^2$  jede Gerade durch  $0$  Komplement jeder anderen. Allgemein ist jede Hyperebene durch  $0$ , die eine gegebene Gerade  $\mathbb{R}v$  nicht enthält, ein Komplement derselben, und umgekehrt.

Seht wichtig und nützlich ist die folgende Gleichung für Dimensionen:

**2.6.23 Satz. (Dimensionsformel)**

Für je zwei Unterräume  $U$  und  $W$  eines Vektorraumes  $V$  gilt die Dimensionsformel:

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

*Beweis.* Wir wählen je ein Komplement  $U_1$  von  $U \cap W$  in  $U$  und ein Komplement  $W_1$  von  $U$  in  $U + W$ . Dann ist

$$U + W = (U \cap W) \oplus U_1 \oplus W_1, \quad \text{also} \quad \dim(U + W) = \dim(U \cap W) + \dim U_1 + \dim W_1.$$

Für die Dimensionen folgt

$$\dim U = \dim(U \cap W) + \dim U_1, \quad \dim W = \dim(U \cap W) + \dim W_1,$$

$$\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U \cap W) + \dim U_1 + \dim W_1 = \dim(U \cap W) + \dim(U + W).$$

**2.6.24 Beispiele. (Schnitte von Ebenen)**

(1) Schneiden sich die Ebenen  $E$  und  $F$  des Raumes  $\mathbb{R}^3$  in der Geraden  $G$ , so gilt

$$\dim E + \dim F = 2 + 2 = 4 = 3 + 1 = \dim \mathbb{R}^3 + \dim G = \dim(E + F) + \dim(E \cap F).$$

(2) Im  $\mathbb{R}^4$  kann es vorkommen, dass sich zwei Ebenen in einem Punkt schneiden! Das passiert genau dann, wenn sie Komplemente voneinander sind, etwa  $E = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$  und  $F = \mathbb{R}e_3 + \mathbb{R}e_4$ .

**2.6.25 Definition. (Orthogonalräume)**

Für  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  definiert man den *Orthogonalraum* durch

$$A^\perp := \{b \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot b = 0 \text{ für jedes } a \in A\}.$$

Zwei Teilmengen  $A, B$  von  $\mathbb{R}^n$  heißen zueinander *orthogonal*, in Zeichen  $A \perp B$ , falls  $A \subseteq B^\perp$  bzw.  $B \subseteq A^\perp$  gilt, d. h., falls jeder Vektor aus  $A$  orthogonal zu jedem Vektor aus  $B$  ist.

**2.6.26 Beispiel.** Die Hyperebene  $H_{0,w}$  steht senkrecht auf der Geraden  $\mathbb{R}w$ :

$$H_{0,w} = \{w\}^\perp = (\mathbb{R}w)^\perp.$$

**2.6.27 Lemma.**  $A^\perp$  ist für jede Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}^n$  ein Vektorraum:  $A^\perp = L(A)^\perp = L(A^\perp)$ .

**2.6.28 Satz. (Orthokomplementierung)**

Ist  $U$  ein Unterraum von  $V$ , so ist  $U^\perp$  das einzige Komplement von  $U$ , das senkrecht auf  $U$  steht. Die Zuordnung  $U \mapsto U^\perp$  ist eine Bijektion zwischen der Menge der  $m$ -dimensionalen Unterräume des  $\mathbb{R}^n$  und der Menge der  $(n-m)$ -dimensionalen Unterräume des  $\mathbb{R}^n$ . Für beliebige Unterräume  $U, W$  von  $\mathbb{R}^n$  gilt:

$$\dim U + \dim U^\perp = n,$$

$$U = U^{\perp\perp},$$

$$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp,$$

$$(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp.$$

Besonders bequem ist die Konstruktion von Basen mit Hilfe des Skalarprodukts. Wir verallgemeinern dazu den Begriff der Orthogonal- und Orthonormalbasen auf Unterräume:

**2.6.29 Definition.** Sei  $B$  eine Menge paarweise orthogonaler, von  $0$  verschiedener Vektoren des  $\mathbb{R}^n$  und  $U = L(B)$ . Dann heißt  $B$  *Orthogonalbasis* von  $U$ . Gilt außerdem  $\|b\| = 1$  für alle  $b \in B$ , so ist  $B$  eine *Orthonormalbasis* (ONB) von  $U$  (vgl. 2.3.12).

**2.6.30 Satz. (Orthogonalbasen)**

Jede Orthogonalbasis ist eine Basis. Ist  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  eine Orthogonalbasis von  $U$ , so läßt sich jeder Vektor  $u \in U$  eindeutig als Linearkombination  $u = r_1 b_1 + \dots + r_m b_m$  schreiben, wobei  $r_k = \frac{u \cdot b_k}{b_k \cdot b_k}$ . Speziell gilt im Falle einer ONB:  $r_k = u \cdot b_k$ .

**2.6.31 Beispiel.** Einige Orthonormalbasen lassen sich mit der „1–2–3–Regel“ konstruieren: Man verteilt je eine Eins, zwei Zweien und drei Dreien auf drei Brüche und setzt z. B.

$$b_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), \quad b_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), \quad b_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}).$$